A. N. KRÎLOV

LECȚII DE CALCULE PRIN APROXIMAȚII

EDITURA TEHNICĂ

A. N. KRÎLOV

LECȚII DE CALCULE PRIN APROXIMAȚII

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI, 1957

Scanned with OKEN Scanner

DIN PARTEA EDITURII [1]

„Lecţiile de calcule prin aproximaţii“ ale renumitului matematician şi inginer sovietic acad. A. N. Krîlov reprezintă primul curs de calcule prin aproximaţii din literatura mondială, care a servit ca model pentru cursurile apărute ulterior şi scrise de alţi autori. Acest manual clasic a devenit o carte indispensabilă pentru savanţii şi tehnicienii din diferite domenii, care trebuie să rezolve numeric probleme matematice pe care le întîlnesc în practică. Desigur că domeniul matematicii aplicate, căruia îi sînt consacrate lecţiile lui A. N. Krîlov, s-a dezvoltat foarte mult în ultimul deceniu, deoarece în practica calculelor au început să intervină probleme care nu sînt studiate în aceste lecţii; s-au îmbogăţit de asemenea foarte mult mijloacele pe care tehnica modernă le poate pune la dispoziţie pentru rezolvarea problemelor matematice cu ajutorul maşinilor. Totuşi „Lecţiile“ lui A. N. Krîlov şi-au păstrat pe deplin importanţa lor, fiind cel mai bun curs pentru introducerea cititorului în acest domeniu important al ştiinţelor aplicate.

Ediţia de faţă, a şasea, s-a tipărit după ediţia a cincea din 1950, fără modificări.

---

[1]) sovietice.

Original:

А. Н. КРЫЛОВ

ЛЕКЦИИ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1954

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎNTÎI

Cursul de lecții de calcule prin aproximații, cuprins în această carte, a fost ținut de autor în anul 1906 în fața unui cerc restrîns de persoane care se adunau în localul gimnaziului K. May și care formau o facultate liberă de matematică, condusă de prof. N. M. Günther. Cursul a fost atunci litografiat într-un număr restrîns de exemplare, care au fost curînd epuizate.

Ediția de față cuprinde tot ceea ce a conținut cursul litografiat, și, pe lîngă aceasta, s-au făcut adaosuri la cap. VI, despre interpolare și cuadraturi mecanice, și s-a scris din nou cap. VII, despre integrarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale.

Conținutul cursului se poate vedea din sumarul său, iar în ce privește expunerea, se presupune că cititorul cunoaște bazele algebrei superioare, ale calculului diferențial și integral și că are o oarecare practică în efectuarea calculelor numerice.

Motivul care m-a făcut să alcătuiesc acest curs a fost următorul: în manualele moderne de analiză matematică, se atribuie cea mai mare atenție definirii absolut precise a noțiunilor fundamentale și demonstrării riguroase a tuturor consecințelor ce se obțin din ele. Din cauza aceasta, foarte des se demonstrează existența soluției unei probleme și se stabilește posibilitatea teoretică de a obține această soluție cu orice grad de precizie, acordîndu-se de cele mai multe ori o atenție cu mult mai mică părții practice a problemei, adică găsirii efective a soluției cu o aproximație dată, de obicei grosolană, care ajunge pentru aplicații, dar care trebuie obținută cu o pierdere cît mai mică de muncă și de timp. Cursul de lecții de calcule prin aproximații, alcătuit de mine, are scopul să arate: metodele practice și procedeele efectiv utilizabile pentru calculul rădăcinilor ecuațiilor numerice, calculul integralelor definite, aplicarea seriilor trigonometrice și rezolvarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale. Am avut, în special, în vedere să arăt cînd și cum trebuie să ne folosim de una sau de alta din metodele expuse și nu am acordat o atenție deosebită rigurozității teoretice a justificării metodei însăși.

Nu am tratat dezvoltarea funcțiilor în serii de puteri ale variabilei independente și folosirea lor în calcule, căci această problemă se tratează de obicei foarte amănunțit în cursurile obișnuite de analiză. Capitolul referitor la determinarea valorilor adevărate ale expresiilor nedeterminate poate să ne dea însă o mulțime de exerciții, dacă se calculează valoarea acestor expresii pentru valorile variabilei independente apropiate de acelea pentru care are loc nedeterminarea.

Scanned with OKEN Scanner

În încheiere, consider de datoria mea să-mi exprim cele mai adînci mulțumiri Consiliului Institutului Inginerilor de Comunicații, care a făcut posibilă tipărirea acestui curs în colecția Institutului.

Martie 1911

A. Krîlov

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Prima ediție tipărită a acestui curs a fost de mult epuizată; totuși, aceste lecții sînt deseori cerute atît din partea diferitelor institute superioare de învățămînt, în special cele tehnice, cît și din partea birourilor de proiectare, din care cauză Consiliul redacțional și editorial al Academiei de Științe l-a inclus în seria manualelor de literatură tehnică, editate de Academia de Științe.

Textul inițial a fost revizuit și rectificat acolo unde a fost nevoie și, pe lîngă aceasta, s-au făcut o serie de adaosuri esențiale, și anume: în cap. V, s-a expus metoda generală de mărire a rapidității convergenței și de sumare a seriilor trigonometrice și o metodă generală pentru calculul perioadelor și coeficienților acestor serii; în cap. VII, s-a adăugat expunerea metodei lui Adams-Störmer pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale și, în sfîrșit, s-a mai adăugat cap. VIII, în care expunem metoda celor mai mici pătrate, mărginindu-ne totuși la ceea ce este necesar în tehnică.

Septembrie 1932

A. Krîlov

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

INTRODUCERE. REGULILE GENERALE ALE CALCULELOR PRIN APROXIMAȚII

§ 1. Matematica se aplică acum la rezolvarea multor probleme, întîlnite nu numai în științele aplicate, cum ar fi astronomia, geodezia, fizica, ci și în diferite ramuri ale tehnicii. La aceste aplicații, se cere deseori nu numai stabilirea relației funcționale între diferitele mărimi care intră în această problemă, adică nu numai stabilirea unei formule corespunzătoare, ci și folosirea acestei formule în anumite cazuri particulare, pentru a afla valorile numerice ale diferitelor mărimi în funcție de mărimile cunoscute.

În astronomie și geodezie, expunerea este începută, de obicei, cu indicarea metodelor ce trebuie folosite la efectuarea calculelor numerice care se întîlnesc în aceste științe. Nu ne vom opri asupra acestor metode speciale, ci vom prelua numai principiile lor generale, aplicabile în același fel la fiecare gen de calcule, dintre care vom avea în vedere în special pe acelea care se întîlnesc în aplicațiile matematicii la problemele tehnice.

§ 2. Datele necesare pentru determinarea numerică a mărimii căutate sînt de obicei obținute prin observații sau măsurări.

Fiecare știe că, nici o măsurare nu poate fi efectuată *absolut* precis; dimpotrivă, rezultatul conține totdeauna o anumită eroare, care se manifestă prin aceea că la repetarea măsurării se obține un rezultat diferit de primul. După aceste abateri ale rezultatelor, ne putem da seama și de limitele erorii cuprinse în ele.

Se înțelege de la sine, că erorile conținute în mărimile date trec și în mărimile determinate cu ajutorul acestora, chiar și în cazul cînd calculele se efectuează după formule exacte și cu o precizie absolută.

În problemele tehnice, mărimile căutate se determină de obicei pentru ca să fie realizate sau folosite în practică. Și aici apar erorile inevitabile ale execuției sau fabricației; pentru fiecare piesă există așa-numitele „toleranțe", adică limitele erorilor între care piesa respectivă se consideră ca utilizabilă.

De aici rezultă, în mod evident, că pentru problemele aplicate nu este nevoie să se efectueze calculele după formule absolut exacte și cu o precizie perfectă; dimpotrivă, ne putem folosi întotdeauna de formule sau metode neprecise, cu condiția ca să existe siguranța că eroarea care provine din aplicarea lor nu va depăși limitele care se admit în problema dată.

La utilizarea unor formule și metode de calcul neprecise sau aproximative ne conduc și următoarele considerații: în aplicații, nu ne intere-

sează de obicei mersul calculului, ci rezultatul lui; din aceste motive, ne vom strădui să obținem acest rezultat cu o precizie suficientă, cu cheltuiala cea mai mică de muncă și timp.

Tocmai pe acest punct de vedere tehnic ne vom situa în aceste lecții, al căror obiect va fi expunerea metodelor generale ale calculelor prin aproximații, aplicate la: 1) rezolvarea ecuațiilor numerice, 2) aflarea valorii numerice a integralelor definite simple și multiple, 3) aflarea sumelor diferitelor serii și 4) integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare. Cu această ocazie, vom face cunoștință și cu dispozitivele mecanice pentru efectuarea automată a cîtorva din operațiile amintite mai sus.

§ 3. Înainte de toate, este nevoie să ne oprim asupra noțiunii de *precizie* a unui rezultat.

Diferența dintre valoarea reală și cea aproximativă a unei mărimi oarecare se numește *eroare absolută* a acestei valori.

Indicarea numai a erorii absolute dă, de obicei, o caracterizare insuficientă a valabilității rezultatului. Astfel, de exemplu, dacă se spune că eroarea unei anumite lungimi este de 1 mm, atunci nu se poate spune încă dacă măsurarea s-a efectuat în mod greșit sau nu, deoarece este nevoie să se cunoască și însăși valoarea mărimii măsurate. Astfel, dacă eroarea de mai sus s-ar referi la o lungime de 10 km, atunci s-ar putea spune că rezultatul a fost obținut cu o precizie nemaiauzită; însă, dacă s-ar măsura de exemplu diametrul unei sîrme sau grosimea unei foi metalice și s-ar obține în loc de 3 mm numai 2 mm, atunci este probabil că fiecare va spune că această măsurătoare nu este bună la nimic.

Calitatea unui rezultat se caracterizează cu mult mai bine prin indicarea așa-numitei *erori relative*, care reprezintă raportul dintre eroarea absolută și valoarea mărimii măsurate.

Evident că eroarea relativă se exprimă totdeauna printr-un număr *abstract*; astfel, în primul din exemplele noastre, ea constituie $\frac{1}{10\,000\,000}$ și în al doilea $\frac{1}{2}$.

Cu cît eroarea relativă este mai mică, cu atît mai mare este precizia cu care se cunoaște mărimea căutată; de aceea, eroarea relativă este considerată ca o măsură pentru precizia rezultatului.

Rezultatul fiecărui calcul și al fiecărei măsurători se exprimă printr-un număr. Să convenim a indica aceste numere astfel, încît după însăși scrierea lor să ne putem da seama de gradul de precizie; în acest scop, trebuie să adoptăm ca regulă scrierea unui număr astfel, încît toate cifrele, în afară de ultima, să fie exacte și ca numai ultima cifră să fie îndoielnică, însă cu cel mult o unitate.

Rezultatele cele mai precise se obțin la cîntăriri; pentru greutăți de circa 1 kg se atinge o precizie pînă la $\frac{1}{100}$ mg, astfel încît eroarea relativă este de numai $\frac{1}{100\,000\,000}$; prin urmare, primele opt cifre ale numărului vor fi exacte și numai cea de a noua îndoielnică, sau cum se mai spune, rezultatul va fi exact pînă la zecimala a noua. Însă, în acest scop, trebuie să se ia atîtea precauțiuni, încît cîntărirea durează de exemplu la „Bureau International des Poids et Mesures“ circa 24 ore.

Scanned with OKEN Scanner

Cea mai precisă măsurătoare de lungime atinge numai zecimala a șaptea. În cea mai mare parte a problemelor tehnice, este suficientă o precizie pînă la $\frac{1}{1\,000}$, ceea ce înseamnă că și toate calculele pot fi efectuate numai cu patru zecimale.

Atragem însă atenția asupra modului de scriere a numerelor mari. Să presupunem, de exemplu, că în numărul 12 732 000 cifra a patra este îndoielnică; în acest caz, vom scrie acest număr în felul următor: $1{,}273 \cdot 10^7$; dacă ar fi îndoielnică cifra a cincea, atunci acest număr s-ar scrie în felul următor: $1{,}2732 \cdot 10^7$.

În același fel, pentru a arăta că într-o mărime, care se exprimă printr-un număr întreg, de exemplu 37, eroarea începe numai cu a treia zecimală, acest număr trebuie să fie scris astfel: 37,000.

§ 4. Să examinăm cum este influențată precizia rezultatului la diferite operații aritmetice efectuate cu numere aproximative.

Adunarea. Să presupunem că sînt date numerele

$$N_1, N_2, .., N_k,$$

ale căror erori relative sînt respectiv

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_k.$$

Se vede ușor că eroarea relativă ε a sumei acestor numere este cuprinsă între cea mai mare și cea mai mică dintre erorile relative ale termenilor.

În adevăr, notînd cu

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$$

erorile relative ale termenilor, se observă că

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k}{N_1 + N_2 + \ldots + N_k}.$$

Pe de altă parte, avem egalitățile

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{N_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{N_2}, \ldots, \quad \varepsilon_k = \frac{\delta_k}{N_k} \quad (*)$$

și, deoarece toate fracțiile (*) sînt considerate numai în ce privește valoarea lor numerică, urmează că fracția

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k}{N_1 + N_2 + \ldots + N_k},$$

care reprezintă raportul sumei numărătorilor la suma numitorilor, este cuprinsă între fracția cea mai mare și cea mai mică din (*).

De aceea, în cazul cînd toți termenii sînt aproximativ egali (raportul celui mai mare la cel mai mic este mai mic decît 10), atunci toți termenii trebuie scriși cu același număr zecimal și același număr de zecimale exacte va exista și în sumă.

Deseori, însă, trebuie să se adune numere care sînt cunoscute cu același grad de precizie, dar care diferă mult în ce privește valoarea lor; atunci, se poate simplifica operația fără ca să se aducă un prejudiciu preciziei rezultatului final.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem, de exemplu, că trebuie să se adune numerele

52,374; 2,8232; 0,52181 și 0,014253,

care toate au primele cinci cifre exacte. În acest caz, adunarea nu trebuie făcută astfel:

$$\begin{array}{r} 52{,}374 \\ 2{,}8232 \\ 0{,}52181 \\ 0{,}014253 \\ \hline 55{,}733263, \end{array}$$

căci este evident, ultimele trei cifre din sumă sînt îndoielnice; în urma acestui fapt nu avem nici un motiv să indicăm aceste trei cifre din urmă, cît și cele din care ele se obțin, iar adunarea trebuie efectuată astfel:

$$\begin{array}{r} 52{,}374 \\ 2{,}823 \\ 0{,}522 \\ 0{,}014 \\ \hline 55{,}733 \end{array}$$

adică, scriind cel mai mare din termeni, se mențin la ceilalți numai atîtea zecimale după virgulă, cîte sînt conținute în termenul cel mai mare (în exemplul nostru — trei), lăsînd la o parte celelalte zecimale; ultima din zecimalele păstrate trebuie să fie mărită cu 1, cînd prima zecimală lăsată la o parte este 5 sau mai mare decît 5.

În legătură cu adunarea numerelor aproximative, apare următoarea problemă: eroarea poate fi de obicei atît pozitivă cît și negativă, prin urmare la adunare poate avea loc o compensare reciprocă a erorilor, în special atunci cînd numărul termenilor este mare. Această problemă este analizată și rezolvată în calculul probabilităților, iar noi ne vom mai ocupa de ea în cap. V.

Înmulțirea. Vom arăta că la înmulțire, eroarea relativă a produsului este egală cu suma erorilor relative ale factorilor. În adevăr, să presupunem că factorii sînt N_1, N_2 și că erorile lor relative sînt ε_1 și ε_2. Prin urmare, valorile adevărate ale acestor factori sînt:

$$N_1' = N_1 (1 + \varepsilon_1) \text{ și } N_2' = N_2 (1 + \varepsilon_2).$$

Aceasta înseamnă că valoarea adevărată a produsului va fi

$$N_1' N_2' = N_1 N_2 (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) = N_1 N_2 [1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2].$$

Fracțiile ε_1 și ε_2 sînt de obicei foarte mici, de exemplu $\frac{1}{1\,000}$; în acest caz, produsul $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ va fi foarte mic în comparație cu suma $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, din care cauză poate fi neglijat. Avem atunci:

$$N_1' N_2' = N_1 N_2 [1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] = N_1 N_2 + N_1 N_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

ceea ce confirmă proprietatea menționată pentru cazul a doi factori.

Evident că această proprietate se extinde imediat asupra unui număr oarecare de factori.

Scanned with OKEN Scanner

Împărțirea. Deoarece împărțirea la numărul N este echivalentă cu înmulțirea cu numărul $\frac{1}{N}$, rezultă că la împărțire, eroarea relativă a cîtului este egală cu suma erorilor relative a deîmpărțitului și a împărțitorului. Trebuie să menționăm aici că această valoare a erorii este atinsă atunci cînd erorile absolute ale deîmpărțitului și împărțitorului au semne diferite.

Ridicarea la o putere. Din cele spuse despre înmulțire rezultă imediat că eroarea relativă a pătratului unui număr este egală cu dublul erorii relative a acestui număr, cea a cubului este egală cu valorea triplă etc. Această proprietate este valabilă și pentru puteri fracționare. În adevăr, să presupunem că N_1 este valoarea aproximativă a mărimii ce urmează a fi ridicată la putere și că ε_1 este eroarea ei relativă.

Valoarea adevărată va fi atunci $N = N_1 (1 + \varepsilon_1)$, de unde, ridicînd la puterea p, obținem:

$$N^p = N_1^p (1 + \varepsilon_1)^p = N_1^p \left(1 + p\,\varepsilon_1 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}\,\varepsilon_1^2 + \ldots\right).$$

Fracția ε este de obicei atît de mică, încît toți termenii care conțin această fracție la o putere mai mare decît 1 pot fi neglijați, astfel încît vom avea

$$N^p = N_1^p (1 + p\varepsilon) = N_1^p + p\varepsilon N_1^p.$$

De aici rezultă că eroarea relativă a mărimii N_1^p este $p\varepsilon$, ceea ce confirmă proprietatea menționată.

În multe calcule, avem de-a face cu pătratele și cuburile diferitelor numere. Pentru pătratele și cuburile numerelor întregi de la 1 la 10 000 sînt alcătuite tabele, în care se dau valorile exacte ale pătratelor și cuburilor.

La folosirea acestor tabele, trebuie să se evite scrierea zecimalelor de prisos. Astfel, de exemplu, să presupunem că este dat numărul

$$N_1 = 11{,}66.$$

Aceasta înseamnă că nu ne putem bizui pe ultima zecimală, iar valoarea adevărată a numărului ar putea fi, de exemplu, și 11,67; însă

$$11{,}66^2 = 135{,}955\,6 \text{ și } 11{,}66^3 = 1\,585{,}242\,296,$$

iar

$$11{,}67^2 = 136{,}188\,9 \text{ și } 11{,}67^3 = 1\,589{,}324\,463.$$

De aici este evident cît de nefolositor ar fi să se scrie toate cifrele care urmează după a patra sau chiar a treia, căci toate aceste cifre nu sînt exacte pentru numărul nostru aproximat, iar scrierea lor nu reprezintă decît o pierdere inutilă de muncă și timp.

§ 5. La calculele cu numere aproximative, cea mai dezavantajoasă operație este scăderea, în cazul cînd diferența este mică în raport cu descăzutul și scăzătorul. În adevăr, fie date numerele 52,287 și 51,939; după cum vedem, ne putem bizui în fiecare din ele pe primele patru cifre și deoarece la ultima zecimală eroarea nu depășește o unitate, urmează că eroarea relativă a acestor date nu depășește $\frac{1}{50\,000}$. Diferența acestor numere este 0,348, iar ultima zecimală poate să nu fie valabilă cu două unități, fapt datorită

căruia eroarea relativă poate să fie de $\frac{2}{348}$, adică de 300 de ori mai mare decît eroarea mărimilor date.

De aceea, *la efectuarea calculelor trebuie să încercăm să transformăm formulele în așa fel, încît diferențele mici a două mărimi să fie calculate direct, fără ca să se calculeze mărimile înseși.* Dacă acest lucru nu este însă posibil, atunci trebuie avut în vedere că eroarea relativă a diferenței este de atîtea ori mai mare decît eroarea relativă a termenilor, de cîte ori diferența este mai mică decît fiecare din ei.

De aici se înțelege și avantajul, obținut la calculul unui șir de valori ale unei mărimi, care diferă puțin între ele, dacă acest calcul se efectuează în felul următor: se calculează numai una din aceste valori în mod direct, iar pentru obținerea valorilor rămase se calculează corecțiile care trebuie adăugate la valoarea aflată, pentru a obține toate celelalte. Aceste corecții pot fi calculate cu o eroare relativă cu atît mai mare, cu cît acestea sînt mai mici în comparație cu mărimea însăși.

O mare parte a calculelor din astronomie se efectuează potrivit celor descrise mai sus, adică se tinde totdeauna să se calculeze corecțiile și abaterile.

§ 6. Logaritmii. La multe calcule, ca un mijloc auxiliar servesc logaritmii, din care cauză trebuie să se stabilească cît de mare este eroarea relativă care se obține cînd se calculează cu logaritmi, ținînd seama de numărul zecimalelor.

Tabelele de logaritmi cele mai des folosite, adică tabelele cu 4, 5 și 7 zecimale, se aranjează în așa fel, încît la căutarea logaritmilor numerelor care nu sînt indicate în tabele să se folosească numai primele diferențe, sau părțile proporționale. Aceasta se realizează datorită faptului că diferența între două argumente învecinate este suficient de mică în comparație cu ele. În adevăr, să presupunem că N și $N + h$ sînt două argumente ce urmează unul după celălalt; atunci, diferența logaritmilor lor (zecimali) va fi

$$\Delta = \lg (N + h) - \lg N = \lg \frac{N+h}{N} = \lg \left(1 + \frac{h}{N} \right).$$

Însă după o formulă cunoscută avem

$$\lg \left(1 + \frac{h}{N} \right) = M \left[\frac{h}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{N} \right)^3 - \ldots \right], \quad (*)$$

unde M este modulul logaritmilor zecimali, egal cu 0,434 29...; pentru a folosi la căutarea logaritmilor numai părțile proporționale, este necesar ca, în formula (*), termenul

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2$$

să fie atît de mic în comparație cu primul, încît să nu influențeze ultima zecimală a logaritmului indicat în tabelă. Astfel, dacă se ia pentru tabelele cu patru zecimale (după cum se și face)

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{100},$$

vom avea

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2 < \frac{1}{20\,000},$$

adică mai mic cu cinci unități decît a cincea zecimală, din care cauză argumentele tabelelor cu patru zecimale sînt cuprinse între 100 și 1 000, succedîndu-se la intervale de o unitate.

În același fel se ia la tabelele cu cinci zecimale

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{1\,000},$$

și atunci

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 < \frac{1}{2\,000\,000}.$$

În sfîrșit, la tabelele cu șapte zecimale, argumentele sînt numerele întregi de la 10 000 la 100 000, și, prin urmare,

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{10\,000} \text{ și } \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 < \frac{1}{200\,000\,000},$$

adică mai puțin de 0,000 000 005, ceea ce nu influențează zecimala a șaptea.

Astfel, pentru fiecare tabelă de logaritmi, diferența Δ, adică diferența dintre doi logaritmi consecutivi, corespunzători numerelor N și $N + 1$, este exprimată cu o precizie suficientă de formula

$$\Delta = M\frac{1}{N} = 0{,}434 \cdot \frac{1}{N}. \qquad (1)$$

De aici reiese în mod evident că, dacă numărul dat N_1 — pentru care trebuie să se găsească logaritmul — este cuprins între N și $N + 1$, astfel încît

$$N < N_1 < N + 1,$$

atunci, punînd

$$N_1 = N + h,$$

vom avea:

$$\lg N_1 = \lg N + 0{,}434\,\frac{h}{N} = \lg N + h \cdot \Delta. \qquad (2)$$

Pe această formulă este bazată aflarea logaritmului pentru un număr dat, și reciproc, folosindu-se părțile proporționale.

Toți logaritmii indicați în tabelă conțin erori, care pot ajunge pînă la $\frac{1}{2}$ din unitatea ultimei zecimale.

De aici reiese în mod evident, că și atunci cînd numărul este cunoscut absolut precis, logaritmul lui se va putea afla numai în mod aproximativ, cu eroarea susmenționată.

Dar dacă numărul însuși nu este cunoscut decît aproximativ, de exemplu cu eroarea relativă $\frac{h}{N} = \varepsilon$, atunci se vede din formula (2) că eroarea la logaritm — care provine din eroarea numărului dat — este de 0,43 ε. Pentru ca această eroare să nu fie mai mare de $\frac{1}{2}$ din unitatea ultimei zecimale a logaritmului, trebuie ca eroarea relativă a numărului să fie tocmai atît, cît o unitate a ultimei zecimale a logaritmului, adică pentru un logaritm cu patru zecimale — de $\frac{1}{10\,000}$, pentru unul cu cinci zecimale — de $\frac{1}{100\,000}$ etc.;

cu alte cuvinte, numărul trebuie să cuprindă atîtea cifre *exacte* cîte există la mantisa logaritmului.

De aici rezultă că este inutil să se caute pentru un număr care are, de exemplu, numai patru cifre exacte, un logaritm cu șapte zecimale.

La căutarea unui număr al cărui logaritm este cunoscut, cu o eroare constituind o unitate a ultimei zecimale, facem la acest număr o eroare relativă de $\varepsilon = \frac{1}{0{,}43}$, adică de 2,30 ori această unitate, ceea ce înseamnă pentru un logaritm cu cinci zecimale $\frac{2{,}30}{100\,000} = \frac{1}{43\,400}$, independent de mărimea numărului.

Se vede de aici că la determinarea unui număr prin logaritmul său se pot obține numai atîtea cifre exacte la acest număr cîte zecimale are mantisa logaritmului, dacă prima cifră a numărului este 4 sau mai puțin, și cu o cifră mai puțin, dacă această primă cifră este 5 sau mai mult.

Să presupunem aici că eroarea logaritmului este de o unitate la ultima zecimală. Trebuie să se observe că logaritmul, după care trebuie să se caute numărul, provine de obicei din adunarea a cel puțin alți doi logaritmi, din care cauză este absolut posibilă o eroare cu o unitate a ultimei zecimale.

Numai la extragerea rădăcinilor, în special a celor de indice mare, s-ar putea întîmpla că erorile din ultima zecimală a logaritmului să fie neglijabile.

De aici rezultă următoarea regulă practică: *la calculul cu logaritmi trebuie să se folosească logaritmi cu același număr de zecimale ca și cel al numerelor care figurează în calcule.* Din aceste motive, pentru majoritatea problemelor tehnice sînt suficiente tabelele cu patru zecimale și adeseori ar fi suficiente și tabelele cu trei zecimale. Nu face însă să ne folosim de tabele cu trei zecimale, deoarece, în acest caz, este cu mult mai convenabil să folosim o riglă de calcul; dacă rigla are lungimea de 25 cm, se atinge aceeași precizie ca și la tabelele cu trei zecimale. Cu o riglă de 50 cm se poate obține aproape aceeași precizie ca și la tabelele de logaritmi cu patru zecimale.

§ 7. La calculele cu logaritmi trebuie să ne obișnuim a folosi logaritmii lui Gauss ai sumelor și diferențelor.

Să presupunem că numerele A și B sînt cunoscute numai prin logaritmii lor și că trebuie să se găsească logaritmul sumei lor, adică $\lg (A + B)$.

Să presupunem că $A > B$. Avem în mod evident:

$$\lg (A + B) = \lg A\left(1 + \frac{B}{A}\right) = \lg A + \lg\left(1 + \frac{B}{A}\right).$$

Deoarece logaritmii numerelor A și B sînt cunoscuți, urmează că luînd diferența $\lg A - \lg B = \lg \frac{A}{B}$, am avea posibilitatea să calculăm mărimea $\lg\left(1 + \frac{B}{A}\right)$. Pentru aceasta s-au și alcătuit tabele care arată direct pentru diversele valori ale diferenței $\lg A - \lg B$ valorile respective $\lg\left(1 + \frac{B}{A}\right)$; adăugînd aceste valori la $\lg A$, obținem $\lg (A + B)$. Astfel, de exemplu, pentru

$$\lg A = 0{,}47712,$$
$$\lg B = 0{,}30103,$$

avem

$$\lg A - \lg B = 0{,}17609.$$

Pentru acest argument aflăm, din tabela logaritmilor sumelor, valoarea corespunzătoare:

$\lg \frac{A}{B}$	$\lg \left(1 + \frac{B}{A}\right)$
. . .	. . . . .
0,176	0,22189
0,177	0,22149
. . .	. . . . .

și, prin urmare, argumentului 0,17609 îi corespunde mantisa 22189 — 3,6= = 22185, astfel încît vom avea

$$\lg (A + B) = 0{,}47712 + 0{,}22185 = 0{,}69897.$$

Tabela pentru aflarea logaritmului diferenței este alcătuită în felul următor. Avem:

$$\lg (A - B) = \lg A \left(1 - \frac{B}{A}\right) = \lg A - \lg \frac{1}{1 - \frac{B}{A}}.$$

Să presupunem că $\frac{A}{B} = \alpha$; atunci $\lg \alpha = \lg A - \lg B$, iar pentru argumentele α poate fi calculată mărimea

$$\lg \frac{1}{1 - \frac{B}{A}} = \lg \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \lg \beta.$$

Aceste mărimi sînt indicate în tabele, avînd prin urmare, următoarea formă

$\lg \alpha$	$\lg \beta$
. . .	. . .

Această aranjare a tabelelor este făcută pentru a micșora mărimea lor. În adevăr, atunci cînd α variază de la 1 la ∞, β variază de la ∞ la 1 și cînd $\alpha = 2$, atunci și $\beta = 2$.

Din egalitatea $\frac{\alpha}{\alpha - 1} = \beta$ rezultă $\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1}$, de aceea, dacă drept valoare a argumentului $\lg \frac{A}{B}$ se ia valoarea lui $\lg \beta$, atunci valoarea corespunzătoare a lui $\lg \frac{1}{1 - \frac{B}{A}}$ se află în coloana $\lg \alpha$, de unde rezultă că acest mod de așezare reduce volumul tabelei la jumătate.

Să presupunem, spre exemplu, că

$$\lg A = 0{,}69897,$$
$$\lg B = 0{,}30103.$$

Atunci,

$$\lg \alpha = \lg \frac{A}{B} = 0{,}39794.$$

Din tabele aflăm:

I	II
$\lg \alpha$	$\lg \beta$
...	...
0,3979	0,221887
0,3980	0,22181
....	....

Prin urmare,

$$22188 - 2{,}8 = 22185$$

și

$$\lg \beta = 0{,}22185.$$

Apoi,

$$\lg (A - B) = \lg A - \lg \beta = 0{,}69897 - 0{,}22185 = 0{,}47712.$$

De asemenea dacă s-ar fi dat

$$\lg A = 0{,}69897,$$
$$\lg B = 0{,}47712,$$

am fi avut

$$\lg \alpha = 0{,}22185.$$

Numărul cel mai apropiat de acesta îl aflăm în coloana a doua, iar din coloana întîi aflăm numărul care-i corespunde, și anume:

$$39790 + 10 \cdot \frac{3}{7} = 39794,$$

de unde

$$\lg \beta = 0{,}39794;$$

prin urmare,

$$\lg (A - B) = \lg A - \lg \beta = 0{,}69897 - 0{,}39794 = 0{,}30103.$$

Tabelele logaritmilor lui Gauss cu cinci zecimale se află, de exemplu, în culegerea lui C. П. Глазенап, „Пятизначные таблицы логарифмов", изд. Академии Наук; cele cu șapte zecimale, în tabelele lui Zech, „Tafeln der Additions und Subtractions Logarithmen für sieben Stellen".

§ 8. Să formulăm acum, pe scurt, regulile generale care rezultă din considerațiile de mai sus:

1º. Precizia rezultatului este caracterizată prin eroarea sa relativă.

2º. Precizia calculului trebuie să fie în concordanță cu precizia datelor, iar precizia datelor trebuie să concorde cu necesitățile practice pentru care se cere rezultatul calculului.

3º. La calcule, trebuie să evităm a scrie cifre de prisos, păstrînd totdeauna atîtea cifre, încît toate cifrele unui număr în afară de ultima să fie exacte și numai ultima să fie îndoielnică.

4º. La adunarea mai multor numere, care se deosebesc mult în ce privește valoarea lor, dar care sînt date cu aceeași precizie relativă, trebuie să scriem mai întîi cel mai mare din termeni și să menținem la ceilalți numai atîtea cifre după virgulă, cîte există la termenul cel mai mare.

5º. Ne vom folosi numai de logaritmii cu atîtea zecimale, cîte cifre au numerele supuse operațiilor respective.

6º. Diferențele mici le vom calcula pe cît se poate în mod direct, fără ca să calculăm numerele înseși.

7º. Dacă este nevoie să obținem o serie de valori ale unei anumite mărimi, valori ce diferă puțin între ele, atunci, calculînd direct una din ele, vom obține pe celelalte calculînd anumite „corecții", care trebuie adunate la valoarea menționată. La calculul corecțiilor, trebuie să ne mulțumim cu o precizie relativă cu atît mai mică, cu cît este mai mic raportul dintre corecție și mărimea însăși.

8º. Pentru fiecare calcul trebuie să alcătuim în prealabil o schemă, astfel încît fiecare număr să fie scris la locul său. La alcătuirea schemelor, trebuie să avem grijă ca diversele operații ce urmează a fi efectuate asupra unei serii de numere să nu alterneze, astfel încît o anumită operație să fie aplicată tuturor numerelor, iar abia apoi să fie urmată de o altă operație, de asemenea aplicată tuturor numerelor seriei.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

REZOLVAREA ECUAȚIILOR NUMERICE

§ 9. Pentru ecuațiile al căror grad este mai mare decît patru, nu există formule care să exprime rădăcinile prin coeficienții ecuației, iar căutarea rădăcinilor irațională poate fi efectuată numai prin aproximații.

Calculul rădăcinilor constă din două operații: 1) separarea rădăcinilor, 2) calculul lor, cu gradul de precizie necesar.

În algebra superioară se demonstrează cunoscuta teoremă a lui Sturm, care rezolvă complet, din punct de vedere teoretic, problema separării rădăcinilor reale. Calculul rădăcinilor complexe, de forma $x = \alpha + i\beta$ poate fi redus la aflarea mărimilor α și β, care sînt reale. Prin urmare, prin eliminarea uneia din aceste necunoscute, rămîne o ecuație pentru determinarea celeilalte și, deoarece trebuie să se cunoască pentru această ecuație numai valorile reale ale rădăcinilor, urmează că teorema lui Sturm rezolvă și aici problema pusă.

Aceată metodă, ireproșabilă din punct de vedere teoretic, este însă practic foarte dificilă din cauza duratei mari a calculelor legate de aplicarea ei, care sînt foarte obositoare, în special în cazul rădăcinilor imaginare.

Însă, printre problemele practice, în care trebuie să se rezolve o ecuație numerică de un grad înalt, intervine cazul cînd trebuie să se integreze un sistem de ecuații liniare cu coeficienți constanți, care se referă la micile oscilații ale unui sistem material, sau la problema repartiției curenților într-un circuit, care conține o inductanță și o capacitate. În aceste cazuri trebuie să se cunoască nu numai rădăcinile reale, ci și cele imaginare.

Din aceste motive ne vom opri în mod amănunțit asupra unei metode, care nu este atît de perfectă din punct de vedere teoretic ca metoda lui Sturm, dar care este foarte avantajoasă din punct de vedere practic.

§ 10. Această metodă a fost expusă pe scurt în „Algebra“ lui Lobacevski, editată în anul 1834, propusă apoi din nou în anul 1837 de prof. Gräffe din Zürich și, în sfîrșit, studiată amănunțit și ilustrată prin multe exemple de astronomul Encke, care a publicat-o în „Berliner Astronomisches Jahrbuch“ în anul 1841.

Esența metodei lui Lobacevski constă în următoarele:

Să presupunem mai întîi, pentru a simplifica raționamentele, că ecuația propusă

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

are numai rădăcini reale și pozitive distincte; să admitem că aceste rădăcini sînt

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

și să presupunem că ele sînt dispuse în ordinea mărimii lor, astfel încît

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_{n-1} > \alpha_n .$$

Vom avea, prin urmare,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n). \tag{2}$$

Dacă înlocuim în primul membru al ecuației (1) pe x prin $-x$ și înmulțim apoi cu $(-1)^n$, atunci oricare ar fi numărul n, par sau impar, se obține ecuația

$$f_1(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n.$$

Prin urmare, membrul întîi al acestei ecuații se descompune în produsul următorilor factori:

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2)\ldots(x + \alpha_n).$$

Să presupunem că pe baza ecuației date (1) se alcătuiește o altă ecuație, ale cărei rădăcini sînt

$$-\alpha_1^{2k}, -\alpha_2^{2k}, \ldots, -\alpha_n^{2k};$$

fie aceasta ecuația:

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0.$$

În virtutea egalității

$$F(z) = (z + \alpha_1^{2k})(z + \alpha_2^{2k})\ldots(z + \alpha_n^{2k}),$$

vom avea

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^{2k} + \alpha_2^{2k} + \alpha_3^{2k} + \ldots + \alpha_n^{2k}, \\ A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^{2k} + (\alpha_1\alpha_3)^{2k} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)^{2k}, \\ A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^{2k} + \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{2k}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dacă exponentul $2k$ este luat destul de mare, atunci în fiecare din sumele (3) primul termen va fi atît de mare în comparație cu ceilalți, încît aceștia se vor putea neglija comițîndu-se o eroare admisibilă pentru gradul de precizie cerut al calculului.

În acest caz, sistemul (3) va fi înlocuit prin sistemul:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^{2k}, \\ A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^{2k}, \\ A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2k}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1} &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})^{2k}, \\ A_n &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{2k}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

de unde rezultă imediat că

$$\alpha_1^{2k} = A_1, \quad \alpha_2^{2k} = \frac{A_2}{A_1}, \quad \alpha_3^{2k} = \frac{A_3}{A_2}, \ldots, \alpha_n^{2k} = \frac{A_n}{A_{n-1}} \tag{5}$$

iar rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se vor afla din egalitățile (5).

Aceasta este metoda lui Lobacevski.

§ 11. Astfel, pornind de la ecuația (1), totul se reduce la alcătuirea unei alte ecuații (2), ale cărei rădăcini să fie puteri atît de mari ale rădăcinilor ecuației propuse, încît egalitățile (4) să aibă loc cu aproximația cerută.

Pentru a ajunge la ecuația (2), Lobacevski efectuează o serie de transformări succesive, alcătuind înainte de toate o ecuație, ale cărei rădăcini sînt egale cu pătratele rădăcinilor propuse, luate cu semnul (—) ale cărei rădăcini sînt

$$-\alpha_1^2, \quad -\alpha_2^2, \ldots, -\alpha_n^2.$$

Aplicînd la această ecuație aceleași operații ca la prima ecuație transformată, obținem a doua ecuație transformată, ale cărei rădăcini vor fi rădăcinile ecuației propuse ridicate la puterea a patra, adică

$$-\alpha_1^4, \quad -\alpha_2^4, \ldots, -\alpha_n^4.$$

Efectuînd încă o dată aceeași transformare, obținem o ecuație ale cărei rădăcini vor fi rădăcinile ecuației propuse, ridicate la puterea a opta etc., pînă ce ajungem la puteri atît de mari, încît egalitățile (4) vor fi satisfăcute, fapt care se observă de la sine la aceste transformări, după cum vom arăta mai jos.

Pentru a alcătui prima ecuație transformată, pornind de la cea dată, observăm că am avut:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \\ = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n),$$

și

$$(-1)^n f(-x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = \\ = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2)(x + \alpha_3)\ldots(x + \alpha_n).$$

Prin urmare,

$$(-1)^n f(x) f(-x) = (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2)(x^2 - \alpha_3^2)\ldots(x^2 - \alpha_n^2) = F_1(x^2).$$

Această egalitate arată că, dacă se efectuează produsul polinoamelor

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \ldots + a_n$$

și (5')

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \ldots + (-1)^n a_n,$$

obținem un polinom care conține numai puteri pare ale lui x, începînd cu x^{2n}; să presupunem că acest polinom va fi

$$x^{2n} + N_1x^{2n-2} + N_2x^{2n-4} + N_3x^{2n-6} + \ldots + N_n;$$

Scanned with OKEN Scanner

înlocuind în el pe x^2 prin z și schimbînd semnul fiecărui al doilea termen, obținem polinomul

$$z^n - N_1 z^{n-1} + N_2 z^{n-2} - N_3 z^{n-3} + \ldots + (-1)^n N_n, \tag{6}$$

care este cel dorit, adică ale cărui rădăcini sînt

$$-\alpha_1^2, \ -\alpha_2^2, \ \ldots, \ -\alpha_n^2.$$

Acest polinom este

$$\begin{array}{l|l|l|l} z^n + a_1^2 & z^{n-1} + a_2^2 & z^{n-2} + a_3^2 & z^{n-3} + \ldots + a_n^2. \\ \quad - 2a_2 & \quad - 2a_1a_3 & \quad - 2a_2a_4 & \\ \ldots\ldots\ldots & + 2a_4 \ldots & + 2a_1a_5 \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ & & - 2a_6 & \end{array} \tag{6'}$$

Formula (6′) arată în ce fel se alcătuiesc coeficienții ecuației transformate cu ajutorul coeficienților celei date, și anume: *în ecuația transformată coeficientul fiecărui termen este egal cu pătratul coeficientului termenului de același grad din ecuația dată, minus dublul produs al coeficienților celor doi termeni, între care este cuprins termenul dat, plus dublul produs al coeficienților între care sînt cuprinși acești din urmă doi, minus etc.*, pînă ce ajungem la ultimul termen al ecuației propuse.

Astfel, alcătuirea ecuației transformate se reduce la un proces destul de simplu și de uniform.

§ 12. Se pune întrebarea: cînd să ne oprim la aceste transformări, adică în ce mod să aflăm că egalitățile (4) sînt valabile?

După cum s-a menționat, aceasta se află din însuși procesul de transformare; în adevăr, să presupunem că, după ce am efectuat h transformări, adică atunci cînd $2k = 2^h$, egalitățile (4) sînt valabile; să ne închipuim că transformarea se mai efectuează încă o dată, astfel încît, pentru această ecuație transformată, egalitățile (4) sînt a fortiori valabile; însemnînd coeficienții acestei ecuații prin $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, vom avea:

$$\left.\begin{array}{l} A'_1 = \alpha_1^{4k}, \\ A'_2 = (\alpha_1\alpha_2)^{4k}, \\ A'_3 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{4k}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ A'_n = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{4k}; \end{array}\right\} \tag{7}$$

în virtutea egalităților (4), rezultă de aici:

$$\left.\begin{array}{l} A'_1 = A_1^2, \\ A'_2 = A_2^2, \\ A'_3 = A_3^2, \\ \ldots\ldots \\ A'_n = A_n^2, \end{array}\right\} \tag{8}$$

adică în ecuația transformată coeficienții vor fi egali cu pătratele coeficienților corespunzători din ecuația precedentă (cu gradul de aproximație cerut); cu alte cuvinte, dacă calculele s-au efectuat prin logaritmi, atunci în ecuația transformată, logaritmii coeficienților sînt egali cu *dublul* logaritmilor coeficienților din ecuația precedentă.

În momentul în care au ajuns la această dublare a logaritmilor, nu mai este necesar să continuăm transformările, deoarece egalitățile (4) sînt valabile, putîndu-se afla valorile rădăcinilor.

§ 13. Se pune acum întrebarea: de cîte ori va trebui să se efectueze această transformare, înainte de a ajunge la acest stadiu?

Revenind la formulele (3), care pot fi scrise în felul următor:

$$A_1 = \alpha_1^{2k}\left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2k} + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{2k} + \cdots\right] = \alpha_1^{2k}(1 + \varepsilon_1),$$

$$A_2 = (\alpha_1\alpha_2)^{2k}\left[1 + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^{2k} + \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)^{2k} + \cdots\right] = (\alpha_1\alpha_2)^{2k}(1 + \varepsilon_2),$$

. . . . . .

observăm că transformarea se termină atunci cînd fracțiile ε_1 și ε_2 etc. vor fi atît de mici, încît nu vor influența ultima zecimală a logaritmului.

Astfel, de exemplu, dacă calculul se efectuează cu ajutorul logaritmilor cu cinci zecimale, atunci trebuie ca aceste fracții să nu fie mai mari de $\frac{1}{200\,000}$.

Termenul principal în expresia lui ε_1 este $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2k}$; în expresia lui ε_2 aceasta este $\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^{2k}$ etc. De aceea, cu cît raportul dintre două rădăcini învecinate va diferi mai mult de 1, cu atît vor fi necesare mai puține transformări.

În adevăr, să presupunem că cel mai mic din aceste rapoarte este $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; prin urmare, este necesar ca

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{2k} \geqslant 200\,000,$$

de unde

$$2k \geqslant \frac{\lg 200\,000}{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}$$

sau

$$2k \geqslant \frac{5{,}30103}{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}.$$

Pentru diverse valori ale lui $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ obținem:

Tabela 1

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$	$2k$	$2h \geqq 2k$	h
2	18	$2^5 = 32$	5
1,5	30	$2^5 = 32$	5
1,1	128	$2^7 = 128$	7
1,01	1 227	$2^{11} = 2\,048$	11
1,001	12 215	$2^{14} = 16\,384$	14

Observație. În această tabelă, ca și în următoarele, numerele fără semnul plus trebuie înțelese ca unmere pozitive.

În foarte multe cazuri sînt suficiente şapte transformări, iar 14 transformări vor da rădăcinile chiar şi în cazul cînd raportul lor este egal cu 1,001. Practic însă este mai avantajos să nu se efectueze un număr atît de mare de transformări, ci să se admită în primă aproximaţie că aceste rădăcini apropiate sînt egale între ele, tratîndu-le aşa cum vom arăta mai jos.

§ 14. Înainte de a continua cu dezvoltarea metodei, pentru a o putea folosi în cazul rădăcinilor egale şi imaginare, vom calcula un exemplu simplu, pentru a ilustra mersul transformărilor şi felul cum se efectuează aceste operaţii.

Să presupunem că este dată ecuaţia

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sînt: 3, —2 şi 1.

Să le calculăm după metoda lui Lobacevski, folosindu-ne de logaritmii cu cinci zecimale.

Acest calcul îl aranjăm aşa cum este arătat în tabela 2.

Schema acestui calcul se obţine din schema generală (6′) şi constă în următoarele:

Ecuaţia dată este

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Cea transformată este

$$\begin{array}{l|l|l} z^3 + a_1^2 & z^2 + a_2^2 & z + a_3^2 \\ \quad - 2a_2 & \quad - 2a_1a_3 & \end{array}$$

Astfel, fără a scrie necunoscuta, ci numai coeficienţii diferitelor puteri ale ei, obţinem tabela 2 arătată mai departe

În acest exemplu, calculele au fost efectuate cu toate amănuntele.

Primele trei transformări au fost făcute fără folosirea logaritmilor, iar începînd cu transformarea a patra calculele se fac cu utilizarea logaritmilor, astfel încît în locul coeficienţilor sînt pretutindeni scrişi logaritmii lor.

Din transformări se observă cum mărimea relativă a termenilor, care se adaugă la pătratele coeficienţilor, devine din ce în ce mai mică şi că aceasta încetează să influenţeze asupra celei de a cincea cifre a primului coeficient, la transformarea a şasea. La coeficientul puterii întîi a necunoscutei această situaţie intervine chiar la a cincea transformare.

Astfel, ecuaţia finală va fi aceea care dă puterea $2^6 = 64$ a necunoscutei x, şi anume:

$$z^3 + A_1z^2 + A_2z + A_3 = 0,$$

unde

$$\lg A_1 = 30{,}53580,$$

$$\lg A_2 = 49{,}80178,$$

$$\lg A_3 = 49{,}80176.$$

Tabela 2

m		a_1	a_2	a_3
1	1	-2	-5	6
2	1	$a_1^2 = 4$ $-2a_2 = 10$ 14	$a_2^2 = 25$ $-2a_1a_3 = 24$ 49	36
2	1	14	49	36
2^2	1	$a_1^2 = 196$ $-2a_2 = -98$ 98	$a_2^2 = 2401$ $-2a_1a_3 = -1008$ 1393	1296
$2^2=4$	1	98	1393	1296
2^3	1	$a_1^2 = 98^2 = 9604$ $-2a_2 = -2785$ 6818 $\lg 6818 = 3{,}83366$	$a_2^2 = 1\,940\,449$ $-2a_1a_3 = 254\,016$ $1\,686\,433$ $\lg 1\,686\,433 = 6{,}22698$	1 679 616
$2^3 = 8$	0,00000	$\lg a_1 = 3{,}83366$	$\lg a_2 = 6{,}22698$	$\lg a_3 = 6{,}22522$
$2^4=16$	0,00000	$2\lg a_1 = 7{,}66732$ $\quad a_1^2 = 4{,}6484\cdot10^7$ $\lg 2\,a_2 = 6{,}52801$ $\quad -2a_2 = 0{,}3373\cdot10^7$ $4{,}3111\cdot10^7$ 7,63461	$2\lg a_2 = 12{,}45396$ $\quad a_2^2 = 2{,}8442\cdot10^{12}$ $\lg 2\,a_1 = 4{,}13469$ $\quad -2a_1a_3 = -0{,}0229\cdot10^{12}$ $\lg a_3 = 6{,}22522$ $\quad 2{,}8213\cdot10^{12}$ $\lg 2a_1a_3 = 10{,}35991$ 12,45045	

Scanned with OKEN Scanner

m		a_1	a_2	a_3
$2^4=16$	0,00000	7,63461	12,45045	12,45044
$2^5=32$	0,00000	$2 \lg a_1 = 15,26922$ $a_1^2 = 1,8587 \cdot 10^{15}$ $\lg 2 a_2 = 12,75148$ $-2a_2 = -0,0056 \cdot 10^{15}$ $1,8531 \cdot 10^{15}$ 15,26790	$2 \lg a_2 = 24,90090$ $a_2^2 = 7,9599 \cdot 10^{24}$ $\lg 2a_2 = 7,93564$ $-2a_1a_2 = -0,0002 \cdot 10^{24}$ $\lg a_3 = 12,45044$ $7,9597 \cdot 10^{24}$ 20,38608 24,90089	
$2^5=32$	0,00000	15,26790	24,90089	24,90088
$2^6=64$	0,00000	$2 \lg a_1 = 30,53580$ $a_1^2 = 3,4340 \cdot 10^{30}$ $\lg 2 a_2 = 25,20192$ $-2a_2 = -0,0000 \cdot 10^{30}$ $3,4340 \cdot 10^{30}$ 30,53580	49,80178	49,80176
$2^6=64$	0,00000	30,53580	49,80178	49,80176
		$64 \lg \alpha_1 = 30,53580$ $\lg \alpha_1 = 0,47712$ $\alpha_1 = 3,0000$	$64 \lg \alpha_2 = 19,26598$ $\lg \alpha_2 = 0,30101$ $\alpha_2 = -2,0000$	$64 \lg \alpha_3 = \bar{1},99\,993$ $\lg \alpha_3 = 0,00\,000$ $\alpha_3 = 1,00\,000$

Cunoscînd valoarea rădăcinilor, determinăm, printr-o substituţie directă, semnul care trebuie atribuit fiecăreia din ele. Astfel se observă că $\alpha_2 = -2,0000$, iar celelalte două au semnul +.

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza formulei (4), avem:

$$64 \lg \alpha_1 = \lg A_1 = 30{,}53580,$$

$$64 \lg \alpha_2 = \lg \frac{A_2}{A_1} = 19{,}26598,$$

$$64 \lg \alpha_3 = \lg \frac{A_3}{A_2} = \overline{1}{,}99998.$$

De aici rezultă imediat rădăcinile și, după cum se vede, ele sînt exacte pînă la a cincea cifră.

§ 15. Primele trei transformări le-am efectuat fără a ne folosi de logaritmi, deoarece coeficienții ecuației propuse au fost foarte simpli.

Dacă acești coeficienți sînt însă numere cu multe cifre, atunci este mai avantajos să se introducă de la început calculul cu logaritmi. În acest caz, calculul poate fi întrucîtva simplificat, dacă se transformă ecuația prin introducerea unei necunoscute noi, astfel încît termenul liber în noua ecuație să fie egal cu 1.

Pentru a lămuri cele expuse, vom face acest lucru pentru ecuația precedentă, începînd cu a treia ecuație transformată.

Această ecuație este:

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0, \qquad (*)$$

unde

$$\lg a_1 = 3{,}83366,$$
$$\lg a_2 = 6{,}22698,$$
$$\lg a_3 = 6{,}22522.$$

Să presupunem că

$$z = y \cdot a_3^{\frac{1}{3}}.$$

Atunci, ecuația (*) devine

$$a_3 y^3 + a_1 a_3^{\frac{2}{3}} y^2 + a_2 a_3^{\frac{1}{3}} y + a_3 = 0$$

sau, după împărțirea cu a_3,

$$y_3 + a_1 a_3^{-\frac{1}{3}} y^2 + a_2 a_3^{-\frac{2}{3}} y + 1 = 0;$$

logaritmii noilor coeficienți vor fi

$$\lg a_1' = 1{,}75859; \quad \lg a_2' = 2{,}07683,$$

astfel încît ecuația pentru determinarea lui y este

$$y^3 + a_1' y^2 + a_2' y + 1 = 0,$$

iar celelalte transformări se vor efectua în felul următor:

Tabela 3

$n=1$	0,00000	1,75859	2,07683	0,00000
$n=2$	0,00000	3,51718 $3,2899\cdot10^3$ 2,37786 $-\ 0,2387\cdot10^3$ $3,0512\cdot10^3$ 3,48447	4,15366 $1,4245\cdot10^4$ 2,05962 $-\ 0,0115\cdot10^4$ $1,4130\cdot10^4$ 4,15014	0,00000
2	0,00000	3,48447	4,15014	0,00000
2^2	0,00000	6,96894 $9,3098\cdot10^6$ 4,45117 $-\ 0,0283\cdot10^6$ $9,2815\cdot10^6$ 6,96762	8,30028 $1,9965\cdot10^8$ 3,78548 $-\ 0,0000\cdot10^8$ $1,9965\cdot10^8$ 8,30028	0,00000
2^2	0,00000	6,96762	8,30028	0,00000
2^3	0,00000	13,93524 8,60131 13,93524	16,60056	0,00000
$2^3=8$	0,00000	13,93524	16,60056	0,00000

Astfel, dacă introducem notația

$$\zeta = y^8 = (x^8 \cdot a_3^{-\frac{1}{3}})^8 = x^{61} \cdot a_3^{-\frac{8}{3}},$$

ecuația pentru ζ va fi:

$$\zeta^3 + A_1'\zeta^2 + A_2'\zeta + 1 = 0,$$

unde

$$\lg A_1' = 13{,}93524 \text{ și } \lg A_2' = 16{,}60056.$$

Prin urmare, ecuația în necunoscuta $z = x^{64}$ va fi:

$$z^3 + A_1' a_3^{\frac{8}{3}} \cdot z^2 + A_2' a_3^{\frac{16}{3}} z + a_3^8 = 0,$$

unde

$$\lg a_3 = 6{,}22522;\ \frac{8}{3}\lg a_3 = 16{,}60059.$$

În acest fel, obținem:

$$64 \lg \alpha_1 = 13{,}93524 + 16{,}60059 = 30{,}53583.$$
$$64 \lg \alpha_2 = 2{,}69532 + 16{,}60059 = 19{,}26591,$$
$$64 \lg \alpha_3 = 16{,}60059 - 16{,}60059 = 0{,}00003,$$

de unde

$$\lg \alpha_1 = 0{,}47712; \quad \lg \alpha_2 = 0{,}30103; \quad \lg \alpha_3 = 0{,}00000$$

și

$$\alpha_1 = 3{,}0000; \qquad \alpha_2 = -2{,}0000; \qquad \alpha_3 = 1{,}0000,$$

ca și mai înainte.

§ 16. Să presupunem acum că ecuația propusă are rădăcini imaginare; fie spre exemplu:

$$\alpha_2 = g(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$
$$\alpha_3 = g(\cos\varphi - i \sin\varphi),$$

atunci

$$\alpha_2^m = g^m [\cos m\varphi + i \sin m\varphi],$$
$$\alpha_3^m = g^m [\cos m\varphi - i \sin m\varphi]$$

și

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^m + \alpha_3^m &= 2g^m \cos m\varphi, \\ (\alpha_2\alpha_3)^m &= g^{2m}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Să presupunem, de asemenea, că celelalte rădăcini sînt reale și că au loc inegalitățile:

$$\alpha_1 > g > \alpha_4 > \alpha_5 \ldots > \alpha_n. \tag{10}$$

Atunci, dacă ecuația

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + A_3 z^{n-3} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

are ca rădăcini, rădăcinile ecuației propuse, ridicate la puterea m și luate cu semnul —, vom avea, după cum am văzut:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^m + \alpha_2^m + \alpha_3^m + \alpha_4^m + \ldots, \\ A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^m + (\alpha_1\alpha_3)^m + (\alpha_1\alpha_4)^m + \ldots, \\ A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^m + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^m + (\alpha_1\alpha_3\alpha_4)^m + \ldots, \\ A_4 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5)^m + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

Dacă m este destul de mare, încît să aibă loc inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^m &> Kg^m, \\ g^m &> K\alpha_4^m, \\ \alpha_4^m &> K\alpha_5^m \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

etc., unde K este un număr atît de mare, încît pentru rădăcinile reale să fie valabile formulele (4) (adică pentru calculul cu tabele cu cinci zecimale $K \geqslant 200\,000$), atunci formulele precedente se scriu în felul următor:

$$A_1 = \alpha_1^m (1 + \varepsilon_1),$$
$$A_2 = \alpha_1^m (\alpha_2^m + \alpha_3^m) + \alpha_1^m \alpha_4^m + \ldots = 2\alpha_1^m g^m (\cos m\varphi + \varepsilon_2),$$
$$A_3 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^m (1 + \varepsilon_3) = \alpha_1^m g^{2m} (1 + \varepsilon_3),$$
$$A_4 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m (1 + \varepsilon_4) = \alpha_1^m g^{2m} \alpha_4^m (1 + \varepsilon_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ε_1, ε_2, ε_3, ε_4,... sînt fracții mici, nu mai mari decît $\frac{1}{K}$, și care nu influențează deci ultima zecimală a logaritmului. Dacă aceste fracții sînt neglijate în comparație cu 1, formulele precedente pot fi scrise astfel:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^m, \\ A_2 &= 2\alpha_1^m g^m \cos(m\varphi + \varepsilon_2) \\ A_3 &= \alpha_1^m g^{2m}, \\ A_4 &= \alpha_1^m g^{2m} \alpha_4^m, \\ A_5 &= \alpha_1^m g^{2m} \alpha_4^m \alpha_5^m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Se observă, din aceste formule, că pe măsura creșterii numărului m, toți coeficienții ecuațiilor transformate, în afară de coeficientul A_2, vor tinde către valori pentru care logaritmii încep să se dubleze.

Aceasta nu se va întîmpla însă cu coeficientul A_2; termenul cel mai mare al acestuia conține factorul $\cos m\varphi$, care la variația numărului m, va primi cele mai diferite valori și își va schimba deseori semnul. Așadar, în cursul transformărilor, variația acestui coeficient nu va fi de loc regulată, iar schimbarea semnului său dă un criteriu foarte concludent în privința existenței rădăcinilor imaginare. Din formulele (12) obținem imediat:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^m &= A_1, \\ g^{2m} &= \frac{A_3}{A_1}, \\ \alpha_4^m &= \frac{A_4}{A_3}, \\ \alpha_5^m &= \frac{A_5}{A_4}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

etc., ceea ce înseamnă că obținem valorile tuturor rădăcinilor reale și modulul celor imaginare. Am obținut formulele (12), în virtutea inegalităților (10).

Ne convingem ușor că, dacă mărimea g ar ocupa în șirul rădăcinilor locul dintre α_i și α_{i+3}, atunci în ultima ecuație transformată, coeficienții s-ar repartiza în felul următor:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^m, \\ A_2 &= \alpha_1^m \alpha_2^m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_i &= \alpha_1^m \alpha_2^m \alpha_3^m \ldots \alpha_i^m, \\ A_{i+1} &= 2\alpha_1^m \alpha_2^m \ldots \alpha_i^m g^m (\cos m\varphi + \varepsilon_i) \text{ [nedeterminat} \\ A_{i+2} &= \alpha_1^m \alpha_2^m \alpha_3^m \ldots \alpha_i^m g^{2m}, \qquad \text{și schimbă semnul]} \\ A_{i+3} &= \alpha_1^m \alpha_2^m \alpha_3^m \ldots \alpha_i^m g^{2m} \alpha_{i+3}^m \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

etc.

Din aceste relații aflăm toate rădăcinile reale: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+3}, \ldots$; raportul $\frac{A_{i+2}}{A_i} = g^{2m}$ ne dă mărimea modulului g al rădăcinilor complexe.

Lucrurile se prezintă în același fel dacă se presupune că există, de exemplu, două perechi de rădăcini complexe, și anume:

$$\alpha_2 = g_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$
$$\alpha_3 = g_1 (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1)$$

și

$$\alpha_5 = g_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$
$$\alpha_6 = g_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2).$$

Obținem următoarele relații:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^m, \\ A_2 &= 2\alpha_1^m g_1^m (\cos m\varphi_1 + \varepsilon_2), \\ A_3 &= \alpha_1^m g_1^{2m} \\ A_4 &= \alpha_1^m g_1^{2m} \alpha_4^m, \\ A_5 &= 2\alpha_1^m g_1^{2m} \alpha_4^m g_2^m (\cos m\varphi_2 + \varepsilon_5), \\ A_6 &= \alpha_1^m g_1^{2m} \alpha_4^m g_2^{2m} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

etc., din care se află din nou mărimile rădăcinilor reale și modulul celor complexe.

Ne convingem ușor că, oricare ar fi numărul perechilor de rădăcini complexe și oricare ar fi ordinea locurilor ocupate de modulele lor în șirul de inegalități (10), putem afla totdeauna, din raportul acelor coeficienți care variază regulat, valorile rădăcinilor reale și modulele celor complexe.

Excepții prezintă numai cazurile cînd valorile rădăcinilor reale și modulele celor imaginare sînt egale între ele.

Aceste cazuri excepționale le vom analiza aparte. Vom arăta acum în ce fel se află, pentru fiecare modul, argumentul corespunzător.

§ 17. În cazul cînd există numai una sau două perechi de rădăcini complexe, aflarea argumentelor, dacă se cunoaște modulul nu necesită aproape nici un fel de calcule.

În adevăr, revenind la ecuația dată,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

observăm că, în virtutea cunoscutei relații dintre rădăcini și coeficienți, are loc egalitatea

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2g \cos \varphi + \ldots + \alpha_n, \quad (16)$$

din care aflăm argumentul φ, corespunzător modulului g.

În cazul cînd există două perechi de rădăcini complexe

$$g_1 (\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1)$$

și

$$g_2 (\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2),$$

atunci trebuie să înlocuim în ecuația propusă

$$x = \frac{1}{y},$$

și deci

$$y = \frac{1}{x},$$

obținînd o nouă ecuație

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \ldots + a_2 y^2 + a_1 y + 1 = 0,$$

sau altfel

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} y^{n-2} + \ldots + \frac{a_2}{a_n} y^2 + \frac{a_1}{a_n} y + \frac{1}{a_n} = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{g_1}(\cos\varphi_1 \pm i \sin\varphi_1), \frac{1}{g_2}(\cos\varphi_2 \pm i \sin\varphi_2), \ldots, \frac{1}{\alpha_n},$$

și din care rezultă relația

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{2}{g_1}\cos\varphi_1 + \frac{2}{g_2}\cos\varphi_2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}, \tag{17}$$

care, împreună cu relația

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2g_1\cos\varphi_1 + 2g_2\cos\varphi_2 + \ldots + \alpha_n, \tag{18}$$

ce rezultă din ecuația dată, ne dă valorile argumentelor φ_1 și φ_2.

În cazul a trei perechi de rădăcini imaginare, este de asemenea ușor să aflăm cu ajutorul rădăcinilor reale și al modulelor celor imaginare deja aflate, argumentele corespunzătoare, fără ca să recurgem la teoria generală. Trebuie numai ca să adăugăm la ecuațiile (17) și (18) ecuațiile analoge lor, referitoare la prima ecuație transformată, adică la ecuația ale cărei rădăcini sînt:

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, g_1^2(\cos 2\varphi_1 \pm i \sin 2\varphi_1), \quad g_2^2(\cos 2\varphi_2 \pm i \sin 2\varphi_2),$$
$$g_3^2(\cos 2\varphi_3 \pm i \sin 2\varphi_3), \ldots, \alpha_n^2.$$

Obținem astfel următorul sistem de ecuații:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2g_1\cos\varphi_1 + 2g_2\cos\varphi_2 + 2g_3\cos\varphi_3 + \ldots + \alpha_n = -a_1,\\
&\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + 2\frac{1}{g_1}\cos\varphi_1 + 2\frac{1}{g_2}\cos\varphi_2 + 2\frac{1}{g_3}\cos\varphi_3 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
&\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + 2g_1^2\cos 2\varphi_1 + 2g_2^2\cos 2\varphi_2 + 2g_3^2\cos 2\varphi_3 + \ldots + \alpha_n^2 = -A,\\
&\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \ldots + 2\frac{1}{g_1^2}\cos 2\varphi_1 + 2\frac{1}{g_2^2}\cos 2\varphi_2 + 2\frac{1}{g_3^2}\cos 2\varphi_3 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n^2} = -\frac{A_{n-1}}{A_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Introducînd, pentru prescurtare, notațiile

$$\cos\varphi_1 = t_1; \quad \cos\varphi_2 = t_2; \quad \cos\varphi_3 = t_3$$

și observînd că

$$\cos 2\varphi_1 = 2\cos^2\varphi_1 - 1, \quad \cos 2\varphi_2 = 2\cos^2\varphi_2 - 1, \quad \cos 2\varphi_3 = 2\cos^2\varphi_3 - 1,$$

ecuațiile precedente se scriu astfel:

$$\left.\begin{aligned} g_1t_1 + g_2t_2 + g_3t_3 &= b_1,\\ \frac{1}{g_1}t_1 + \frac{1}{g_2}t_2 + \frac{1}{g_3}t_3 &= b_2,\\ g_1^2t_1^2 + g_2^2t_2^2 + g_3^2t_3^2 &= b_3,\\ \frac{1}{g_1^2}t_1^2 + \frac{1}{g_2^2}t_2^2 + \frac{1}{g_3^2}t_3^2 &= b_4. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Din primele două ecuații aflăm expresiile de forma

$$\left.\begin{aligned} t_2 &= c_1t_1 + d_1,\\ t_3 &= c_2t_1 + d_2, \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

și după substituirea lor în ultimele două, obținem două ecuații de tipul

$$m_1t_1^2 + n_1t_1 = p_1,$$
$$m_2t_1^2 + n_2t_1 = p_2,$$

sau altfel,

$$t_1^2 + \frac{n_1}{m_1}t_1 = \frac{p_1}{m_1},$$
$$t_1^2 + \frac{n_2}{m_2}t_1 = \frac{p_2}{m_2}.$$

Deoarece t_1 este o rădăcină comună a celor două ecuații, rezultă că

$$t_1 = \frac{p_1m_2 - p_2m_1}{n_1m_2 - n_2m_1}, \tag{21}$$

după care aflăm, cu ajutorul formulei (20'), valorile lui t_2 și t_3.

§ 18. In cazul general, cînd numărul perechilor de rădăcini complexe este mai mare de trei, metodele speciale expuse mai sus nu duc la nici un rezultat, astfel încît vom expune metoda generală pentru aflarea argumentului corespunzător unui modul dat. Unei perechi de rădăcini complexe îi corespunde trinomul $x^2 - 2gx\cos\varphi + g^2$, cu care trebuie să se dividă exact polinomul $f(x)$, ce reprezintă membrul întîi al ecuației date.

Notînd pentru prescurtare

$$2g\cos\varphi = p,$$

ajungem la următoarea problemă: este dat polinomul

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{22}$$

și valoarea g^2; se cere să se determine p, astfel încît $f(x)$ să se dividă exact cu trinomul

$$x^2 - px + g^2. \tag{23}$$

Soluția acestei probleme poate fi obținută prin metode foarte diferite. Cea mai simplă dintre acestea este următoarea: lăsînd p nedeterminat, vom efectua împărțirea polinomului $f(x)$ cu trinomul $x^2 - px + g^2$, pînă cînd obținem un rest de gradul întîi în raport cu x.

Să presupunem că acest rest este

$$Px + Q;$$

aici, P și Q sînt funcții cunoscute de p, și anume P, un polinom întreg în p, de gradul $n-1$, iar Q un polinom de același fel, de gradul $n-2$, adică vom avea

$$P = p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \ldots + b_{n-2}\, p + b_{n-1}. \tag{24}$$

$$Q = p^{n-2} + c_1 p^{n-3} + \ldots + c_{n-3}\, p + c_{n-2}. \tag{25}$$

Deoarece mărimea p trebuie să fie de așa natură încît împărțirea să fie exactă, este necesar ca

$$P = 0 \text{ și } Q = 0. \tag{26}$$

Prin urmare, p este o rădăcină comună a ecuațiilor (26), ceea ce înseamnă că mărimea ei poate fi aflată de asemenea printr-o împărțire simplă și anume polinoamele P și Q vor avea un divizor comun de forma $p-h$; în acest caz, valoarea

$$p = h$$

va fi cea căutată.

Să concretizăm acest raționament printr-un exemplu.

Vom presupune că pentru ecuația

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 = 0$$

s-a aflat că

$$g^2 = 1,$$

adică $f(x)$ are ca divizor un trinom de tipul

$$x^2 - px + 1;$$

se cere să se afle p.

Efectuăm împărțirea:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^3 + x + 2 & x^2 - px + 1 \\
\hline
-x^4 \pm px^3 \mp x^2 & x^2 + (p+2)\,x + (p^2 + 2p - 1) \\
\hline
(p+2)\,x^3 - x^2 + x & \\
-(p+2)\,x^3 \pm (p^2+2p)x^2 \mp (p+2)x & \\
\hline
(p^2 + 2p - 1)\,x^2 - (p+1)\,x + 2 & \\
-(p^2 + 2p - 1)\,x^2 \pm (p^3 + 2p^2 - p)\,x \mp (p^2 + 2p - 1) & \\
\hline
(p^3 + 2p^2 - 2p - 1)\,x - (p^2 + 2p - 3) &
\end{array}.$$

Valoarea căutată a lui p este rădăcina comună a ecuațiilor

$$P = p^3 + 2p^2 - 2p - 1 = 0$$

și

$$Q = p^2 + 2p - 3 = 0.$$

Pentru a determina această rădăcină comună, căutăm cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$p^3 + 2p^2 - 2p - 1 \text{ și } p^2 + 2p - 3.$$

Avem:

$$\begin{array}{r|l} p^3 + 2p^2 - 2p - 1 & p^2+2p-3 \\ \underline{-p^3 \mp 2p^2 \pm 3p} & \\ p - 1 & p \end{array}$$

apoi

$$\begin{array}{r|l} p^2 + 2p - 3 & p-1 \\ \underline{p^2 \pm p} & \\ 3p - 3 & p+3 \\ 3p - 3 & \end{array}$$

De aici rezultă că cel mai mare divizor comun este $p-1$, iar valoarea căutată a lui p este

$$p = 1;$$

prin urmare, trinomul căutat este

$$x^2 - x + 1,$$

și, în adevăr,

$$x^4 + 2x^3 + x + 2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 2).$$

Cu toate că această metodă este foarte simplă în ce privește principiul ei, ea este totuși complicată în privința calculelor, în special pentru ecuațiile de grad superior. Din acest motiv, dezvoltînd metoda lui Lobacevski-Gräffe în articolul său publicat în „Berliner Astronomisches Jahrbuch" din anul 1841, Encke propune o altă metodă, al cărei principiu constă în următoarele:

Oricare ar fi gradul ecuației propuse,

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

se poate totdeauna obține ca acest grad să fie un număr par; în adevăr, dacă n este impar, atunci este deajuns să se înmulțească membrul întîi al ecuației cu x și să se considere apoi noua ecuație

$$x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_nx = 0,$$

care are aceleași rădăcini ca și prima și, în afară de acestea, și rădăcina $x = 0$.

Astfel, vom scrie ecuația sub forma

$$x^{2k} + a_1x^{2k-1} + a_2x^{2k-2} + \cdots + a_{k-1}x^{k+1} + a_k x^k + a_{k+1}x^{k-1} + \cdots + a_{2k-1}x + a_{2k} = 0. \tag{27}$$

Să admitem că g este valoarea cunoscută a modulului uneia din perechile de rădăcini complexe, astfel încît aceste rădăcini sînt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= g(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ \alpha_{i+1} &= g(\cos\varphi - i\sin\varphi); \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

se cere să se determine mărimea argumentului φ.

Substituind valorile (28) în membrul întîi al ecuației (26) și egalînd cu zero separat partea reală și cea imaginară, obținem pentru determinarea lui φ ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} g^{2k}\cos 2k\varphi + a_1 g^{2k-1}\cos(2k-1)\varphi + \cdots + a_{k-1}g^{k+1}\cos(k+1)\varphi + \\ + a_k g^k \cos k\varphi + \cdots + a_{2k} = 0, \\ g^{2k}\sin 2k\varphi + a_1 g^{2k-1}\sin(2k-1)\varphi + \cdots + a_{k-1}g^{k+1}\sin(k+1)\varphi + \\ + a_k g^k \sin k\varphi + \cdots + a_{2k-1} g\sin\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Înmulțind prima ecuație cu $\cos k\varphi$, iar a doua cu $\sin k\varphi$, adunăm cele două produse, înmulțim apoi prima ecuație cu $\sin k\varphi$ și a doua cu $\cos k\varphi$ și scădem primul produs din al doilea; obținem astfel două ecuații noi, care după împărțirea cu g^{2k} devin:

$$\beta\cos k\varphi + \frac{\beta_1}{g}\cos(k-1)\varphi + \frac{\beta_2}{g^2}\cos(k-2)\varphi + \cdots + \frac{\beta_{k-1}}{g^{k-1}}\cos\varphi + \frac{\beta_k}{2g^k} = 0, \quad (30)$$

$$\gamma\sin k\varphi + \frac{\gamma_1}{g}\sin(k-1)\varphi + \frac{\gamma_2}{g^2}\sin(k-2)\varphi + \cdots + \frac{\gamma_{k-1}}{g^{k-1}}\sin\varphi = 0, \quad (31)$$

unde am pus

$$\left.\begin{aligned} 1 + a_{2k}g^{-2k} = \beta; \qquad 1 - a_{2k}g^{-2k} = \gamma, \\ a_1 + a_{2k-1}g^{-(2k-2)} = \beta_1, \quad a_1 - a_{2k-1}g^{-(2k-2)} = \gamma_1, \\ a_2 + a_{2k-2}g^{-(2k-4)} = \beta_2, \quad a_2 - a_{2k-2}g^{-(2k-4)} = \gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1} + a_{k+1}g^{-2} = \beta_{k-1}, \quad a_{k-1} - a_{k+1}g^{-2} = \gamma_{k-1}. \\ a_k + a_k = \beta_k. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Pentru a rezolva ecuațiile (30), Encke se folosește de faptul că pentru fiecare număr întreg n atît $\cos n\varphi$, cît și $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ se exprimă prin puteri întregi ale lui $\cos\varphi$.

Formulele corespunzătoare au fost date de J. Bernoulli și apoi de Euler încă în jurul anului 1720. Aceste formule sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned} 2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - \frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\varphi)^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\cos\varphi)^{n-8} - \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos\varphi)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}(2\cos\varphi)^{n-5} - \\ - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\varphi)^{n-7} + \\ + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\cos\varphi)^{n-9} - \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Punînd $-2g\cos\varphi = t$ sau $2\cos\varphi = -\frac{t}{g}$, făcînd apoi în formulele (30) $n = k, k-1, \ldots$ și substituind valorile obținute în ecuația (30), obținem pentru determinarea lui t următoarele două ecuații:

$$\begin{aligned}
&\beta t^k - \beta_1 t^{k-1} + \beta_2 t^{k-2} - \beta_3 t^{k-3} + \cdots + (-1)^k \beta_k - \\
&\quad - g^2 [k\beta t^{k-2} - (k-1)\beta_1 t^{k-3} + (k-2)\beta_2 t^{k-4} - \cdots] + \\
&\quad + g^4 \left[\frac{k(k-3)}{1\cdot 2} \beta t^{k-4} - \frac{(k-1)(k-4)}{1\cdot 2} \beta_1 t^{k-5} + \frac{(k-2)(k-5)}{1\cdot 2} \beta_2 t^{k-6} - \cdots \right] - \\
&\quad - g^6 \left[\frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3} \beta t^{k-6} - \frac{(k-1)(k-5)(k-6)}{1\cdot 2\cdot 3} \beta_1 t^{k-7} + \cdots \right] + \\
&\quad + g^8 \left[\frac{k(k-5)(k-6)(k-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \beta t^{k-8} - \cdots \right] - \cdots = 0 \qquad (34)
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
&\gamma t^{k-1} - \gamma_1 t^{k-2} + \gamma_2 t^{k-3} - \gamma_3 t^{k-4} + \cdots + (-1)^{k-1} \gamma_{k-1} - \\
&\quad - g^2 [(k-2)\gamma t^{k-3} - (k-3)\gamma_1 t^{k-4} + (k-4)\gamma_2 t^{k-5} - \cdots] + \\
&\quad + g^4 \left[\frac{(k-3)(k-4)}{1\cdot 2} \gamma t^{k-5} - \frac{(k-4)(k-5)}{1\cdot 2} \gamma_1 t^{k-6} + \cdots \right] - \\
&\quad - g^6 \left[\frac{(k-4)(k-5)(k-6)}{1\cdot 2\cdot 3} \gamma t^{k-7} - \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1\cdot 2\cdot 3} \gamma_1 t^{k-8} + \cdots \right] + \\
&\quad + g^8 \left[\frac{(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \gamma t^{k-9} - \cdots \right] - \cdots = 0. \qquad (35)
\end{aligned}$$

Valoarea cerută a lui t este rădăcina comună a acestor două ecuații și se află, prin urmare, prin determinarea celui mai mare divizor comun al polinoamelor din primii membri ai ecuațiilor (34) și (35).

În cazurile cele mai simple, ecuațiile (34) și (35) sînt următoarele:

1. *Pentru o ecuație inițială de gradul al patrulea*:

$$\begin{gathered}
f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \\
1 + a_4 g^{-4} = \beta, \qquad 1 - a_4 g^{-4} = \gamma, \\
a_1 + a_3 g^{-2} = \beta_1, \qquad a_1 - a_3 g^{-2} = \gamma_1, \\
2a_2 = \beta_2, \\
\beta t^2 - \beta_1 t + (\beta_2 - 2\beta g^2) = 0, \\
\gamma t - \gamma_1 = 0;
\end{gathered}$$

după cum se observă, obținem în acest caz valoarea cerută a lui t din ecuația a doua, iar prima poate servi pentru verificare.

2. *Pentru o ecuație inițială de gradul al șaselea*:

$$\begin{gathered}
f(x) = x^6 + a_1 x^5 + a_3 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0; \\
1 + a_6 g^{-6} = \beta; \qquad 1 - a_6 g^{-6} = \gamma, \\
a_1 + a_5 g^{-4} = \beta_1 \qquad a_1 - a_5 g^{-4} = \gamma_1, \\
a_2 + a_4 g^{-2} = \beta_2, \qquad a_2 - a_4 g^{-2} = \gamma_2, \\
2a_3 = \beta_3, \\
\beta t^3 - \beta_1 t^2 + (\beta_2 - 3\beta g^2) t - (\beta_3 - 2\beta_1 g^2) = 0, \\
\gamma t^2 - \gamma_1 t + (\gamma_2 - \gamma g^2) = 0.
\end{gathered}$$

Scanned with OKEN Scanner

3. *Pentru o ecuație inițială de gradul al optulea:*

$$f(x) = x^8 + a_1x^7 + a_2x^6 + a_3x^5 + \cdots + a_7x + a_8 = 0;$$

$$1 + a_8g^{-8} = \beta, \qquad 1 - a_8g^{-8} = \gamma,$$
$$a_1 + a_7g^{-6} = \beta_1, \qquad a_1 - a_7g^{-6} = \gamma_1,$$
$$a_2 + a_6g^{-4} = \beta_2, \qquad a_2 - a_6g^{-4} = \gamma_2,$$
$$a_3 + a_5g^{-2} = \beta_3, \qquad a_3 - a_5g^{-2} = \gamma_3,$$
$$2a_4 = \beta_4,$$

$$\beta t^4 - \beta_1 t^3 + (\beta_2 - 4\beta g^2)\, t^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 g^2)\, t + (\beta_4 - 2\beta_2 g^2 + 2\beta g^4) = 0,$$
$$\gamma t^3 - \gamma_1 t^2 + (\gamma_2 - 2\gamma g^2)\, t - (\gamma_3 - \gamma_1 g^2) = 0.$$

Astfel, după valoarea dată a modulului g, se află trinomul corespunzător

$$x^2 - 2g\cos\varphi \cdot x + g^2 = x^2 + tx + g^2,$$

cu ajutorul căruia se pot determina valorile ambelor rădăcini complexe.

Se observă că pentru determinarea valorii lui t nu trebuie să se rezolve ecuațiile (34) și (35), deoarece totul se reduce la o împărțire și diferite substituții.

Deoarece valoarea lui g^2, cum și cele ale coeficienților din ecuațiile (34) și (35) care depind de g^2, vor fi în majoritatea cazurilor incomensurabile și deoarece întregul calcul se efectuează cu ajutorul logaritmilor, urmează că va fi avantajos ca și căutarea celui mai mare divizor comun al polinoamelor (34) și (35) să se efectueze — după cum arată Encke — folosindu-se logaritmii sumelor și diferențelor ai lui Gauss.

În adevăr, să presupunem că polinoamele date sînt

$$ct^n + c_1t^{n-1} + c_2t^{n-2} + \cdots + c_{n-1}t + c_n,$$
$$bt^{n-1} + b_1t^{n-2} + b_2t^{n-3} + \cdots + b_{n-1};$$

găsind logaritmii coeficienților $c, c_1, \ldots, c_n, b, b_1, \cdots, b_{n-1}$ și scăzînd lg c și lg b din celelalte, vom scrie polinoamele noastre în felul următor:

$$t^n + \delta_1t^{n-1} + \delta_2t^{n-2} + \cdots + \delta_{n-1}t + \delta_n,$$
$$t^{n-1} + \varepsilon_1t^{n-2} + \varepsilon_2t^{n-3} + \cdots + \varepsilon^{n-1};$$

scădem coeficienții corespunzători, și pentru valorile absolute ale diferențelor lor,

$$|\delta_1 + \varepsilon_1|, |\delta_2 - \varepsilon_2|, \cdots, |\delta_{n-1} - \varepsilon_{n-1}|,$$

căutăm, după cum este semnul respectiv, logaritmii lui Gauss ai sumelor sau diferențelor, care fiind adăugați la logaritmii corespunzători ne vor da logaritmii coeficienților primului rest sub forma următoare:

$$\xi t^{n-1} + \xi_1t^{n-2} + \cdots + \xi_{n-1}.$$

Scăzîndu-l pe ξ din ceilalți coeficienți și punînd

$$\xi_1 - \xi = \lambda_1, \ \xi_2 - \xi = \lambda_2, \cdots, \ \xi_{n-1} - \xi = \lambda_{n-1},$$

obținem:

$$t^{n-1} + \lambda_1t^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1}$$

și

$$t^{n-1} + \varepsilon_1t^{n-2} + \cdots + \varepsilon_{n-1}.$$

Scăzînd și determinînd logaritmii lui Gauss, obținem restul primei împărțiri sub forma

$$\mu t^{n-2} + \mu_1 t^{n-3} + \cdots + \mu_{n-2},$$

la care împărțim apoi în același fel polinomul

$$t^{n-1} + \varepsilon_1 t^{n-2} + \cdots + \varepsilon_{n-1},$$

determinînd restul etc.

Să presupunem, de exemplu, că trebuie să se găsească rădăcina comună a ecuațiilor

$$t^4 - 0{,}56807\, t^3 - 8{,}7762\, t^2 + 0{,}73914\, t + 9{,}6278 = 0,$$
$$t^3 + 0{,}56807\, t^2 - 4{,}3881\, t - 4{,}2464 = 0.$$

Scriind ambele polinoame cu coeficienți logaritmici, înaintea cărora sînt puse semnele corespunătoare termenilor respectivi, obținem:

$$t^4 - \bar{1}{,}75440 t^3 - 0{,}94331 t^2 + \bar{1}{,}86872 t + 0{,}98353$$
$$t^3 + \bar{1}{,}75440 t^2 - 0{,}64228 t - 0{,}62802$$

Argumentele: 0,00000 *Ad* 0,30103 *Sub* 0,75903 *Ad*
Log. Gaus: 0,30103 0,30103 0,06969

$$-0{,}05543 t^3 - 0{,}64228 t^2 + 0{,}69771 t + 0{,}98353$$
$$t^3 + 0{,}58685 t^2 - 0{,}64228 t - 0{,}92810$$
$$t^3 + \bar{1}{,}75440 t^2 - 0{,}64228 t - 0{,}62802$$

Argumentele: 0,83245 *Sub* 0,00000 *Sub* 0,30008 *Sub*
Log. Gauss: 0,06909 ∞ 0,30198

$$0{,}51776 t^2 \qquad -0{,}62612$$

restul I: $t^2 - 0{,}10836$

$$t^3 + \bar{1}{,}75440 t^2 - 0{,}64228 t - 0{,}62802$$
$$t^2 - 0{,}10836$$

Argumentele: . . .0,53392 *Sub*
Log. Gauss: . . .0,15025

$$+ \bar{1}{,}75440 t^2 - 0{,}49203 t - 0{,}62802$$
$$t^2 - 0{,}73763 t - 0{,}87362$$
$$t^2 - 0{,}10836$$

Argumentele: . . . . . 0,76526 *Sub*
Log. Gauss: 0,08181

$$0{,}73763 t - 0{,}79181$$
$$t + 0{,}05418$$

Astfel, cel mai mare divizor comun este

$$t + 0{,}05418,$$

și deoarece numărul corespunzător logaritmului 0,05418 este 1,1326, urmează că rădăcina comună este

$$t = -1{,}1326.$$

§ 19. Înainte de a trece la exemple, observăm că în cazul a două rădăcini foarte apropiate, de exemplu α_2, α_3, sistemul (*), § 16, adică

$$A_1 = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \alpha_3^m + \alpha_4^m + \cdots,$$
$$A_2 = (\alpha_1\alpha_2)^m + (\alpha_1\alpha_3)^m + \cdots,$$
$$A_3 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^m + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^m + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

nu ne dă valorile acestor rădăcini separat, căci logaritmii coeficientului A_2 nu se dublează, deoarece în acest coeficient termenii $(\alpha_1, \alpha_2)^m$ și $(\alpha_1\,\alpha_3)^m$ au valori foarte apropiate; același sistem ne dă însă produsul $\alpha_2\,\alpha_3$ al acestor rădăcini, din raportul coeficienților $\frac{A_3}{A_1}$.

Astfel, pentru perechea de factori

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^2 - (\alpha_2 + \alpha_3)\,x + \alpha_2\,\alpha_3$$

vom avea trinomul corespunzător

$$x^2 + tx + v$$

în care valoarea lui v este cunoscută, urmînd deci să se afle numai valoarea lui t.

Se înțelege de la sine că prima dintre metodele arătate în § 18 este aplicabilă fără nici un fel de modificări.

Se arată ușor că și a doua metodă este aplicabilă în acest caz, dar înainte de a deduce formulele corespunzătoare, facem următoarea observație: cînd trinomul considerat corespunde unei perechi de rădăcini complexe, atunci termenul său liber este totdeauna pozitiv; însă, în cazul cînd rădăcinile sînt reale, nu se poate spune a priori nimic despre semnul lui v; deoarece această mărime este determinată pe baza unei puteri pare ale ei, urmează că nu se știe ce semn să-i atribuim; de aceea, trebuie să se ia prima din ecuațiile transformate, ale cărei rădăcini sînt

$$-\alpha_2^2 \text{ și } -\alpha_3^2,$$

trinomul corespunzător fiind

$$(x + \alpha_2^2)(x + \alpha_3^2) = x^2 + t_1 x + (\alpha_2\,\alpha_3)^2,$$

unde mărimea $(\alpha_2\,\alpha_3)^2$ este neapărat pozitivă, astfel încît o putem nota ca și mai înainte prin g^2.

Să presupunem că prima ecuație transformată este

$$f(z) = z^{2h} + c_1 z^{2h-1} + c_2 z^{2h-2} + \cdots + c_{2h-1} z + c_{2h} = 0;$$

punem

$$z = gy,$$

și ecuația ia forma

$$F(y) = y^{2h} + \frac{c_1}{g}\,y^{2h-1} + \frac{c_2}{g^2}\,y^{2h-2} + \cdots + \frac{c_k}{g^k}\,y^k + \cdots$$
$$\cdots + \frac{c_{2h-1}}{g^{2h-1}}\,y + \frac{c_{2h}}{g^{2h}} = 0; \qquad (36)$$

perechea de rădăcini ale acestei ecuații, pe care o căutăm, este

$$-\lambda = -\frac{\alpha_2^2}{g} \text{ și } -\mu = -\frac{\alpha_3^2}{g}, \qquad (37)$$

unde

$$\lambda\mu = \frac{\alpha_2^2 \alpha_3^2}{g^2} = 1.$$

Trinomul corespunzător este

$$y^2 + ty + 1 = (y + \lambda)(y + \mu),$$

astfel încît

și

$$\left.\begin{aligned} \lambda + \mu &= t \\ \lambda\mu &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Deoarece $-\lambda$ și $-\mu$ sînt rădăcini ale ecuației (36), urmează că

$$\lambda^{2k} - \frac{c_1}{g}\lambda^{2k-1} + \frac{c_2}{g^2}\lambda^{2k-2} - \cdots - (-1)^k \frac{c_k}{g^k}\lambda^k + \cdots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}}\lambda + \frac{c_{2k}}{g^{2k}} = 0,$$

sau altfel

$$\lambda^k - \frac{c_1}{g}\lambda^{k-1} + \frac{c_2}{g^2}\lambda^{k-2} - \cdots + (-1)^k \frac{c_k}{g^k} + \cdots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}}\lambda^{-k+1} + \frac{c_{2k}}{g^{2k}}\lambda^{-k} = 0;$$

deoarece

$$\lambda^{-1} = \mu,$$

rezultă că ecuația poate fi scrisă în felul următor:

$$\lambda^k - \frac{c_1}{g}\lambda^{k-1} + \frac{c_2}{g}\lambda^{k-2} - \cdots + (-1)^k \frac{c_k}{g^k} + \cdots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}}\mu^{k-1} + \frac{c_{2k}}{g^{2k}}\mu^k = 0. \tag{39}$$

Procedînd în același fel cu rădăcina μ, obținem ecuația:

$$\mu^k - \frac{c_1}{g}\mu^{k-1} + \frac{c_2}{g^2}\mu^{k-2} - \cdots + (-1)^k \frac{c_k}{g^k} + \cdots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}}\lambda^{k-1} + \frac{c_{2k}}{g^{2k}}\lambda^k = 0. \tag{40}$$

Adunînd ecuațiile (39) și (40), scăzînd apoi (40) din (39) și introducînd notațiile de mai jos, vom obține:

$$\left.\begin{aligned} &\beta(\lambda^k + \mu^k) - \frac{\beta_1}{g}(\lambda^{k-1} + \mu^{k-1}) + \frac{\beta_2}{g^2}(\lambda^{k-2} + \mu^{k-2}) - \cdots + \\ &\qquad + (-1)^k \frac{\beta_k}{g^k} = 0, \\ &\gamma(\lambda^k - \mu^k) - \frac{\gamma_1}{g}(\lambda^{k-1} - \mu^{k-1}) + \frac{\gamma_2}{g^2}(\lambda^{k-2} - \mu^{k-2}) - \cdots + \\ &\qquad + (-1)^{k-1} \frac{\gamma_{k-1}}{g^{k-1}}(\lambda - \mu) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

unde

$$\left.\begin{array}{rr} 1 + c_{2k}g^{-2k} = \beta, & 1 - c_{2k}g^{-2k} = \gamma. \\ c_1 + c_{2k-1}g^{-(2k-2)} = \beta_1, & c_1 - c_{2k-1}g^{-(2k-2)} = \gamma_1, \\ c_2 + c_{2k-2}g^{-(2k-4)} = \beta_2, & c_2 - c_{2k-2}g^{-(2k-4)} = \gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2c_k = \beta_k, & c_{k-1} - c_{k+1}g^{-2} = \gamma_{k-1}. \end{array}\right\} \quad (42)$$

Aceste formule sînt, după cum se vede, absolut analoge formulelor (30), (31) și (32), numai că în locul lui cos $n\varphi$ se află $\lambda^n+\mu^n$, iar în locul lui sin $n\varphi$ se află $\lambda^n-\mu^n$; dacă ne îndreptăm însă atenția asupra deducerii formulei (33), vom vedea că 2 cos $n\varphi$ și $\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$ se exprimă în același fel prin 2 cos φ ca și mărimile $\lambda^n + \mu^n$ și $\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$ prin $\lambda+\mu$, unde μ și λ sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 - tx + 1 = 0,$$

și rezultă, prin urmare, că $-\lambda$ și $-\mu$ sînt rădăcinile ecuației

$$y^2 + ty + 1 = 0.$$

Deducerea cea mai generală a acestor formule a fost dată de Lagrange în cartea sa „Calcul des fonctions“ (leçon XI). Lagrange examinează ecuația

$$z^2 - 2pz + 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$z_1 = p + \sqrt{p^2 - 1},$$

$$z_2 = p - \sqrt{p^2 - 1},$$

și observă că, efectuînd substituția

$$p = \cos \varphi$$

și, prin urmare,

$$\sqrt{1 - p^2} = \sin \varphi$$

se obține:

$$z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

$$z_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

de unde rezultă

$$2 \cos n\varphi = z_1^n + z_2^n = (p + \sqrt{p^2 - 1})^n + (p - \sqrt{p^2 - 1})^n$$

și

$$2i \sin n\varphi = z_1^n - z_2^n = (p + \sqrt{p^2 - 1})^n - (p - \sqrt{p^2 - 1})^n.$$

Dezvoltînd apoi membrii ai doilea ai acestei egalități după puterile lui p, obținem expresiile lui $z_1^n + z_2^n$ și $\frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}$ în funcție de p. Punînd $p = \cos\varphi$, obținem de aici formulele (33) [1]).
Astfel, rezultă

$$\lambda^n + \mu^n = t^n - \frac{n}{1} t^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} t^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} t^{n-6} + \ldots, \qquad (43)$$

$$\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} = t^{n-1} - (n-2) t^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2} t^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3} t^{n-7} + \ldots$$

și, prin urmare, toate celelalte transformări vor fi absolut analoge acelora din § 18, de unde urmează că formulele (34) și (35) vor fi valabile și în cazul nostru, fără nici un fel de modificări. Prin urmare ele vor servi pentru determinarea trinomulni ce corespunde perechi de rădăcini foarte apropiate între ele.

§ 20. Înainte de a da o serie de exemple, atragem atenția asupra cazurilor cînd metodele expuse mai sus nu sînt aplicabile, adică nu duc la determinarea rădăcinilor reale foarte apropiate între ele.

---

[1]) Formulele (43) mai pot fi deduse în felul următor: luăm produsul

$$(z-\lambda)\left(z - \frac{1}{\lambda}\right) = z^2 - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) z + 1 = (1-\lambda z)\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

și notînd $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ prin t, obținem identitatea

$$(1-\lambda z)\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) = 1 - z(t-z);$$

luînd logaritmii, obținem

$$\lg\left[(1-\lambda z)\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)\right] = \lg(1-\lambda z) + \lg\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) = \lg[1 - z(t-z)].$$

Dezvoltînd logaritmii în serie, obținem:

$$\lambda z + \frac{1}{2}\lambda^2 z^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 z^3 + \ldots + \frac{1}{n}\lambda^n z^n + \ldots +$$

$$+ \frac{z}{\lambda} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{\lambda^3} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{z^n}{\lambda^n} + \ldots = z(t-z) + \frac{1}{2} z^2 (t-z)^2 + \ldots + \frac{1}{n} z^n (t-z)^n + \ldots$$

Deoarece această egalitate este o identitate, urmează că și coeficienții puterilor egale ale lui z din ambii membri trebuie să fie egali între ei. Să considerăm termenii în z^n. În membrul întîi, coeficientul este $\frac{1}{n}\left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n}\right)$, iar în membrul al doilea, coeficienții trebuie luați din termenul $\frac{1}{n} z^n (t-z)^n$ și din termenii care-l precedează, și anume: din termenul $\frac{1}{n} z^n (t-z)^n$ vom avea $\frac{1}{n} t^n$,

Cazul cel mai dezavantajos este cel în care există mai multe perechi de rădăcini complexe cu module egale; astfel, de exemplu, dacă se ia ecuația

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

atunci prima ecuație transformată va fi

$$\begin{array}{l|l|l|l} z^4 + 1 & z^3 + 1 & z^2 + 1 & z + 1 = 0, \\ -2 & -2 & -2 & \\ & +2 & & \end{array}$$

---

din termenul $\frac{1}{n-1} z^{n-1} (t-z)^{n-1}$ vom avea $-\frac{1}{n-1}(n-1)\, t^{n-2}$,

din termenul $\frac{1}{n-2} z^{n-2} (t-z)^{n-2}$ vom avea $+\frac{1}{n-2}\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} t^{n-4}$,

din termenul $\frac{1}{n-3} z^{n-3} (t-z)^{n-3}$ vom avea $-\frac{1}{n-3}\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} t^{n-6}$,

.....

În general, din termenul $\frac{1}{n-h} z^{n-h} (t-z)^{n-h}$ vom avea

$$\frac{(-1)^h}{n-h} \cdot \frac{(n-h)(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots h} t^{n-2h}.$$

Simplificînd, obținem de aici

$$\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} = t^n - nt^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} t^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} t^{n-6} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^h \frac{n(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots h} t^{n-2h} + \ldots; \qquad (43')$$

în membrul al doilea rămîn numai termenii pînă cînd gradul lui t devine negativ Astfel, obținem prima din formulele (43), căci $\frac{1}{\lambda} = \mu$.

Pentru deducerea celei de-a doua din formulele (43), derivăm în raport cu λ ambii membri ai egalității (43′): observînd că $t = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ și că, prin urmare, $t' = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$, obținem:

$$n\left(\lambda^{n-1} - \frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) = \left[nt^{n-1} - n(n-2) t^{n-3} + \right.$$

$$+ \frac{n(n-3)(n-4)}{1\cdot 2} t^{n-5} - \frac{n(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3} t^{n-7} + \ldots +$$

$$\left. + (-1)^h \frac{n(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)(n-2h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots h} t^{n-2h-1} + \ldots \right] t'.$$

De aici, găsim prin simplificare:

$$\frac{\lambda^n - \frac{1}{\lambda^n}}{\lambda - \frac{1}{\lambda}} = t^{n-1} - (n-2) t^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2} t^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3} t^{n-7} + \ldots +$$

$$+ (-1)^h \frac{(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)(n-2h)}{1\cdot 2\ldots h} t^{n-2h-1} + \ldots \qquad (43'')$$

adică

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0;$$

a doua ecuație transformată va fi

$$\begin{array}{cccccccc} z^4 & +1 & z^3 & +1 & z^2 & +1 & z & +1 = 0, \\ & -2 & & -2 & & -2 & & \\ & & & +2 & & & & \end{array}$$

adică

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

etc., ceea ce arată că transformările nu duc la nici un rezultat.

Dacă se observă, în timpul calculelor, că șase sau șapte transformări nu sînt suficiente pentru separarea rădăcinilor, iar prezența coeficienților negativi în ecuațiile transformate indică prezența unor rădăcini complexe, atunci aceasta este o indicație a faptului că modulele acestor rădăcini sînt foarte apropiate între ele; în acest caz, va trebui să se reînceapă toate calculele, transformînd în prealabil ecuația și luînd ca nouă necunoscută

$$y = x - b,$$

unde b se va alege astfel încît să fie aproximativ egal cu valoarea medie a modulelor rădăcinilor, adică cu $a_n^{\frac{1}{n}}$.

În acest caz, este evident că dacă înainte au fost, de exemplu, două perechi de rădăcini, cărora (fig. 1) le corespund punctele M_1, M_1' și N_1, N_1', unde $\overline{OM_1} = \overline{ON_1}$, $\overline{OB} = b$, atunci în ecuația în care necunoscuta este y, modulele acestor rădăcini vor fi $\overline{M_1B}$ și $\overline{N_1B}$, care nu mai sînt egale între ele. Prin transformări succesive, aceste module se separă și se calculează, de unde rezultă că în ecuație pot rămîne numai rădăcini reale apropiate, sau egale între ele. Prezența și numărul acestor rădăcini se observă ușor după variația coeficienților în timpul transformărilor succesive; să presupunem, de exemplu, că cele două rădăcini α_2 și α_3 sînt egale între ele, adică $\alpha_2 = \alpha_3$; pentru valori destul de mari ale lui m, formulele (*), § 16 vor fi atunci:

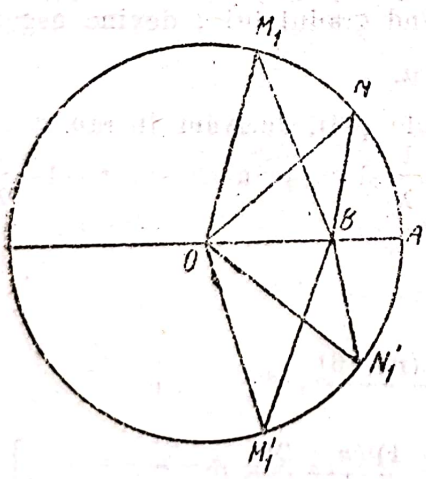

Fig. 1

$$A_1 = \alpha_1^m (1 + \varepsilon_1),$$
$$A_2 = 2(\alpha_1 \alpha_2)^m (1 + \varepsilon_2),$$
$$A_3 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^m (1 + \varepsilon_3)$$

etc.

La a doua transformare vom obține

$$A_1' = \alpha_1^{2m} (1 + \varepsilon_1) = A_1^2,$$
$$A_2' = 2(\alpha_1 \alpha_2)^{2m} (1 + \varepsilon_2') = \frac{1}{2} A_2^2$$
$$A_3' = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{2m} (1 + \varepsilon_s') = A_3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

adică logaritmul coeficientului A_2 nu se dublează, însă diferența

$$2 \lg A_2 - \lg A_2' = \lg 2 = 0{,}30103.$$

De asemenea, dacă ar fi fost trei rădăcini egale, de exemplu

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4,$$

la valori destul de mari ale lui m, coeficienții ar deveni

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^m, \\ A_2 &= 3\,(\alpha_1\,\alpha_2)^m, \\ A_3 &= 3\,(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)^m, \\ A_4 &= (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)^m. \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

La transformarea următoare, puterile rădăcinilor vor fi

$$A_1' = \alpha_1^{2m} = A_1^2,$$

$$A_2' = 3\,(\alpha_1\,\alpha_2)^{2m} = \frac{1}{3} A_2^2,$$

$$A_3' = 3\,(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)^{2m} = \frac{1}{3} A_3^2,$$

$$A_4' = (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)^{2m} = A_4^2.$$

Relațiile

$$2 \lg A_2 - \lg A_2' = \lg 3 = 0{,}47712$$

$$2 \lg A_3 - \lg A_3' = \lg 3 = 0{,}47712$$

indică prezența a trei rădăcini egale, care se pot determina imediat după formula (44).

Exact în același fel, vom avea în cazul a patru rădăcini egale

$$2 \lg A_2 - \lg A_2' = \lg 4 = 0{,}60206,$$

$$2 \lg A_3 - \lg A_3' = \lg 6 = 0{,}77815,$$

$$2 \lg A_4 - \lg A_4' = \lg 4 = 0{,}60206$$

etc., unde ordinea coeficienților binomiali este evidentă:

$$(x + \alpha)^4 = x^4 + 4x^3\,\alpha + 6x^2\,\alpha^2 + 4x\,\alpha^3 + \alpha^4.$$

Se înțelege de la sine că dacă rădăcinile egale ar fi situate după rădăcina α_i și nu după rădăcina α_1, atunci, în loc de

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,$$

ar trebui să se scrie

$$A_{i+1},\ A_{i+2},\ A_{i+3}$$

etc., însă caracterul de mai sus al relațiilor s-ar păstra.

Dacă rădăcinile nu ar fi egale între ele, ci numai foarte apropiate, atunci relațiile de mai sus nu ar fi satisfăcute exact, ci numai aproximativ, ceea ce înseamnă că pentru trei rădăcini am avea egalitățile aproximative

$$2 \lg A_2 - \lg A_2' \text{ aprox.} = \lg 3 = 0{,}47\ldots,$$

$$2 \lg A_3 - \lg A_3' \text{ aprox.} = \lg 3 = 0{,}47\ldots$$

Prin urmare, dacă se observă prezența unor rădăcini egale sau foarte apropiate, atunci, pentru a ne convinge precis dacă rădăcinile sînt egale între ele, va trebui să folosim metodele cunoscute de căutare a rădăcinilor egale, căutînd cel mai mare divizor comun între polinomul $f(x)$ și derivata sa.

Formulele (44) ne dau, în orice caz, valorile aproximative ale acestor rădăcini, după care aflarea valorilor exacte poate fi efectuată după cum se va arăta mai jos.

§ 21. Să presupunem, deci, că am găsit pentru ecuația $f(x) = 0$ valorile aproximative ale rădăcinilor. Calculîndu-se cu o tabelă de logaritmi cu cinci zecimale, valorile rădăcinilor simple se obțin de obicei cu o precizie pînă la a patra cifră inclusiv. Cu aceeași precizie se mai obțin: modulele rădăcinilor imaginare, produsele rădăcinilor egale sau apropiate între ele și valorile t ale coeficienților lui x în trinoamele de tipul $x^2 + tx + g^2$. Dacă, prin caracterul problemei, această precizie nu este suficientă, atunci vom putea afla, cu ajutorul valorilor aproximative cunoscute, valori mai precise ale rădăcinilor, fără ca să efectuăm din nou calculele cu un număr mai mare de zecimale, ci determinînd numai acele mici corecții care trebuie adăugate la valorile aproximative ale rădăcinilor pentru a atinge precizia dorită.

Să începem cu un caz foarte simplu, în care se cere rectificarea valorii unei rădăcini simple, în vecinătatea căreia nu mai există o altă rădăcină. (Prin cuvintele „în vecinătate" vom înțelege aici că diferența între valoarea aproximativă pe care o cunoaștem și valoarea reală a rădăcinii este foarte mică, în comparație cu diferența dintre valoarea acestei rădăcini și valoarea rădăcinii celei mai apropiate).

Să presupunem, deci, că

$$x = \alpha_1$$

este valoarea aproximativă pe care o cunoaștem a rădăcinii și că

$$x = \alpha_1 + h = \beta_1$$

este valoarea ei reală; prin urmare, va trebui să aibă loc egalitatea

$$f(\alpha_1 + h) = 0.$$

Însă,

$$f(\alpha_1+h) = f(\alpha_1) + \frac{h}{1} f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha_1) + \ldots = 0, \tag{45}$$

și deoarece h se presupune a fi o cîtime mică iar în apropierea rădăcinii α_1 nu există o altă rădăcină, urmează că $f'(\alpha_1)$ nu este mică, de unde rezultă că, în ecuația precedentă, termenul principal este $\frac{h}{1} f'(\alpha_1)$, iar valoarea aproximativă a lui h este

$$h = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \tag{46}$$

Pentru calculele numerice este mai avantajos să se folosească, în locul acestei formule, următoarea:

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{f(\alpha_1)}{\alpha_1 f'(\alpha_1)}, \tag{47}$$

în special atunci cînd calculul se efectuează cu ajutorul logaritmilor, deoarece din cele spuse în § 6 rezultă că

$$\lg(\alpha_1 + h) - \lg \alpha_1 = M \frac{h}{\alpha_1} = 0{,}43429 \frac{h}{\alpha_1} \qquad (47')$$

și, deci, mărimea $\frac{h}{\alpha_1}$ ne va da în mod direct corecția care trebuie adăugată la logaritmul valorii α_1 pentru a obține logaritmul lui (α_1+h). Pe lîngă aceasta, însuși calculul mărimii $\alpha_1 f'(\alpha_1)$ este cu mult mai simplu decît calculul mărimii $f'(\alpha_1)$; într-adevăr, dacă

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^n + a_1\alpha_1^{n-1} + a_2\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha_1 + a_n,$$

atunci

$$\alpha_1 f'(\alpha_1) = n\alpha_1^n + (n-1)\, a_1\alpha_1^{n-1} + (n-2)a_2\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha_1,$$

ceea ce înseamnă că, atunci cînd cunoaștem termenii $\alpha_1^n, a_1\alpha_1^{n-1}, \ldots$, aceștia trebuie înmulțiți numai cu numere întregi și mici $n, n-1$ etc., pentru a obține termenii corespunzători ai expresiei $\alpha_1 f'(\alpha_1)$.

În locul calculelor după formula (47) se mai poate folosi și următoarea metodă, analogă celei folosite de Gauss la rezolvarea problemei lui Kepler.

Esența acestei metode constă în următoarele: să presupunem că, la valoarea lui $\lg \alpha_1$ adăugăm, de exemplu, zece unități la ultima zecimală; în acest caz, la $\lg \alpha_1^n$ se adaugă $10 \cdot n$ unități, la $\lg a_1 \alpha_1^{n-1}$, $10(n-1)$ unități etc. La căutarea numerelor α_1^n, $a_1\alpha_1^{n-1}$ etc., după logaritmii lor, căutăm cu ajutorul părților proporționale și creșterile, corespunzătoare creșterilor sus-amintite ale logaritmilor respectivi. Să presupunem că suma algebrică a acestor creșteri este S; atunci corecția ε în unitățile ultimei zecimale se va obține evident după formula

$$\varepsilon = -\frac{f(\alpha_1)}{S} \cdot 10.$$

Calculul se efectuează după următoarea schemă:

Tabela 4

Rădăcina α_1; $\lg \alpha_1 = \ldots\ldots$:

I	II	III	IV	V
lg coef.	$\lg \alpha_1^h$	Numerele coresp. la (II)	Modificările în logaritmi	Părțile proporționale coresp. la (IV)
		a_n	—	
$\lg a_{n-1}$	$\lg \alpha_1$	$a_{n-1}\alpha_1$	10	δ_{n-1}
$\lg a_{n-2}$	$2 \lg \alpha_1$	$a_{n-2}\alpha_1^2$	20	δ_{n-2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\lg a_2$	$(n-2) \lg \alpha_1$	$a_2\alpha_1^{n-2}$	$(n-2) \cdot 10$	δ_2
$\lg a_1$	$(n-1) \lg \alpha_1$	$a_1\alpha_1^{n-1}$	$(n-1) \cdot 10$	δ_1
0,000000	$n \lg \alpha_1$	α_1^n	$n \cdot 10$	δ
		$f(\alpha_1)$		S

Corecția este $\varepsilon = -\frac{f(\alpha_1)}{S} \cdot 10$ (în unități ale ultimei zecimale a logaritmului);

$$\lg(\alpha_1 + h) = \lg \alpha_1 + \varepsilon.$$

Se înțelege de la sine că mărimilor $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ trebuie să li se atribuie aceleași semne ca și termenilor corespunzători $a_1 \alpha_1^{n-1}$, $a_2 \alpha_1^{n-2}$, $\ldots, a_{n-1} \alpha_1$.

Această metodă duce de obicei direct la scop, adică, dacă se consideră valoarea găsită a lui $\lg(\alpha_1+h)$ ca logaritmul rădăcinii căutate, atunci $f(\alpha_1+h)$ se va deosebi de zero numai cu o valoare care nu depășește eroarea tabelelor de logaritmi și, prin urmare, nu se va putea atinge în practică o precizie mai mare cu aceste tabele.

În calculul de mai sus s-a presupus că în apropierea lui $x=\alpha_1$ nu există o altă rădăcină, astfel încît în dezvoltarea

$$f(\alpha_1 + h) = f(\alpha_1) + \frac{h}{1} f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha_1) + \ldots,$$

pentru valori mici ale lui h, termenul $\frac{h}{1} f'(\alpha_1)$ este termenul principal. În comparație cu el, toți termenii cu puteri mai mari ale lui h sînt foarte mici. Dar, în cazul cînd α_1 este valoarea aproximativă a unei perechi de rădăcini egale, atunci mărimea $f'(\alpha_1)$ va fi de asemenea mică, iar termenul $\frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha_1)$ poate să nu fie mic în comparație cu cel precedent; în acest caz, mărimea h trebuie să fie determinată din ecuația

$$f(\alpha_1) + \frac{h}{1} f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha_1) = 0 \qquad (48)$$

sau mărimea $\frac{h}{\alpha_1}$ din ecuația

$$f(\alpha_1) + \frac{h}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1 f'(\alpha_1)}{1} + \frac{h^2}{\alpha_1^2} \cdot \frac{\alpha_1^2 f''(\alpha_1)}{1 \cdot 2} = 0, \qquad (48')$$

care ne dă pentru $\frac{h}{\alpha_1}$ două valori, dintre care va trebui să se aleagă, printr-o verificare directă, cea care dă valoarea necesară, adică cea pentru care $f(\alpha_1)$ și $f'(\alpha_1)$ se anulează.

Dacă α_1 este valoarea aproximativă a uneia din două rădăcini foarte apropiate între ele, atunci mărimile h_1 și h_2 care rezultă din ecuația (48) ne dau două valori α_1+h_1 și α_2+h_2, dintre care una va fi valoarea aproximativă a uneia din rădăcini, iar cealaltă a celeilalte rădăcini. Pentru determinarea ulterioară mai precisă a acestor rădăcini, trebuie să se afle mai întîi valoarea lui β, cuprinsă între ele, pentru care $f'(\beta)=0$, iar apoi trebuie să se restrîngă limitele între care se află fiecare din rădăcini, după cum se va arăta mai jos.

§ 22. În cazurile cînd se cer limitele erorii de cunoaștere a valorii unei rădăcini, trebuie să se determine două valori între care este cuprinsă rădăcina. Să presupunem că aceste valori sînt

$$C_1 > \beta_1 > c_1;$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru ca rădăcina β_1 să se afle între C_1 și c_1, trebuie ca valorile $f(C_1)$ și $f(c_1)$ să aibă semne *diferite*. De aceea, determinînd o valoare aproximativă α_1 a rădăcinii, trebuie să mai determinăm și o altă valoare γ_1 apropiată de α_1, astfel încît valorile $f(\alpha_1)$ și $f(\gamma_1)$ să aibă semne diferite, iar între α_1 și γ_1 să nu mai fie cuprinse alte rădăcini decît β_1.

După aceea calculăm valorile

$$f(\alpha_1),\ f'(\alpha_1),\ f''(\alpha_1),$$
$$f(\gamma_1),\ f'(\gamma_1),\ f''(\gamma_1)$$

și, îndreptîndu-ne atenția asupra semnelor lor, construim un grafic care să reprezinte schematic variația funcției $y=f(x)$ între $x=\alpha_1$ și $x=\gamma_1$.

Să presupunem (fig. 2) că:

$$\overline{OA_1} = \alpha_1,$$
$$\overline{OC_1} = \gamma_1,$$
$$\overline{A_1B} = f(\alpha_1),$$
$$\overline{C_1D} = f(\gamma_1).$$

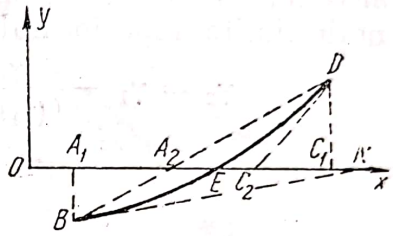

Fig. 2

Semnul mărimilor $f'(\alpha_1)$ și $f'(\gamma_1)$ arată direcția tangentei în punctele B și D, iar semnul mărimilor $f''(\alpha_1)$ și $f''(\gamma_1)$ arată sensul concavității curbei $y=f(x)$.

Astfel, vom avea în cazul din fig. 2:

$$f(\alpha_1)<0, \qquad f(\gamma_1)>0,$$
$$f'(\alpha_1)>0, \qquad f'(\gamma_1)>0,$$
$$f''(\alpha_1)>0, \qquad f''(\gamma_1)>0.$$

În adevăr, dacă $f''(\alpha_1)>0$, atunci concavitatea curbei este îndreptată înspre axa pozitivă Oy.

Cele două limite noi, între care este cuprinsă mărimea căutată $x=\overline{OE}$, se obțin dacă ducem coarda BD, a cărei intersecție cu axa Ox ne dă punctul A_2, și tangenta C_2D în punctul D, care ne dă punctul C_2.

În acest fel, vom avea:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\gamma_1-\alpha_1}{f(\gamma_1)-f(\alpha_1)}f(\alpha_1) = \gamma_1 - \frac{\gamma_1-\alpha_1}{f(\gamma_1)-f(\alpha_1)}f(\gamma_1), \qquad (49)$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)}$$

și

$$\alpha_1 < \alpha_2 < x < \gamma_2 < \gamma_1,$$

ceea ce înseamnă că limitele α_2 și γ_2, pentru rădăcina căutată, vor fi mai restrînse decît α_1 și γ_1.

Dacă am fi dus tangenta în punctul B, am fi găsit un anumit punct de intersecție N cu axa Ox, și cu toate că am fi avut

$$\overline{OA_2} < \overline{OE} < \overline{ON},$$

nu am fi obținut totuși siguranța că va fi îndeplinită și relația

$$\overline{ON} < \overline{OC_1}.$$

Astfel, de exemplu, pe fig. 2 avem

$$\overline{ON} > \overline{OC_1}$$

ceea ce înseamnă că nu am obținut limite mai restrînse.

Trebuie să se ia, deci, acea tangentă care este cuprinsă între curbă și ordonată, după cum se întîmplă în cazul nostru cu tangenta în punctul D.

De asemenea, dacă am avea

$$f(\alpha_1) < 0, \quad f(\gamma_1) > 0,$$
$$f'(\alpha_1) > 0, \quad f'(\gamma_1) > 0,$$
$$f''(\alpha_1) < 0, \quad f''(\gamma_1) < 0$$

ar trebui să ducem tangenta în punctul B (fig. 3), adică ar trebui să calculăm noile limite după formulele

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 = \gamma_1 - \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{f(\gamma_1) - f(\alpha_1)} f(\gamma_1) = \alpha_1 - \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{f(\gamma_1) - f(\alpha_1)} f(\alpha_1), \\ \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

În acest caz trebuie ca tangenta să fie dusă în punctul B, deoarece numai aceasta trece între ordonată și curbă. Ea ne dă abscisa

$$\overline{OA_2} = \alpha_2,$$

care satisface inegalitățile

$$\alpha_1 < \alpha_2 < x < \gamma_2 < \gamma_1.$$

Tot așa, dacă am avea (fig. 4)

$$f(\alpha_1) > 0; \quad f(\gamma_1) < 0,$$
$$f'(\alpha_1) < 0; \quad f'(\gamma_1) < 0,$$
$$f''(\alpha_1) > 0; \quad f''(\gamma_1) > 0,$$

va trebui să luăm tangenta în punctul B, calculuînd limita α_2 după formula

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}.$$

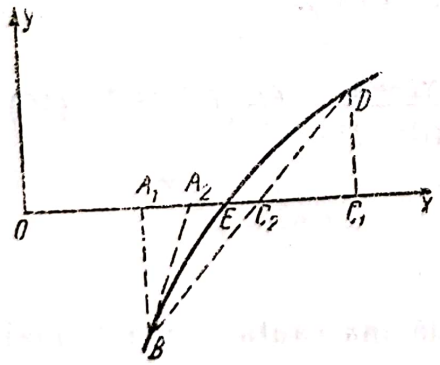

Fig. 3

În sfîrșit, dacă am avea (fig. 5)

$$f(\alpha_1) > 0, \quad f(\gamma_1) < 0,$$
$$f'(\alpha_1) < 0, \quad f'(\gamma_1) < 0,$$
$$f''(\alpha_1) < 0, \quad f''(\gamma_1) < 0,$$

ar trebui să deducem tangenta în punctul D, adică să calculăm pe γ_2 după formula

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)}, \quad (51)$$

Se observă de aici că în toate cazurile trebuie ca tangenta să fie dusă astfel, încît să treacă între coardă și ordonata extremă.

Se înțelege de la sine, că toate formulele de mai sus sînt scrise algebric, și că la efectuarea calculelor trebuie să avem în vedere semnele cantităților care intră în aceste formule.

Scanned with OKEN Scanner

La calculul mărimilor $f(\gamma_1)$, $f'(\gamma_1)$ trebuie să atingem acea precizie, care se cere de la mărimile α_2 și γ_2.

§ 23. Vom arăta acum în ce fel se poate calcula mai exact o pereche de rădăcini complexe, dacă se cunosc valorile aproximative ale modulului și argumentele lor.

Să presupunem că

$$\alpha_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

este valoarea aproximativă a uneia din rădăcinile considerate, în vecinătatea căreia nu există nici o altă rădăcină.

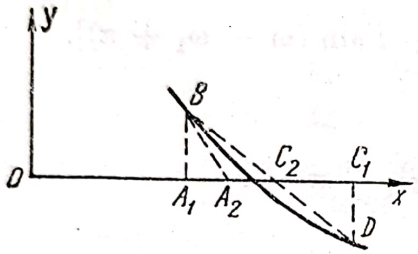

Fig. 4

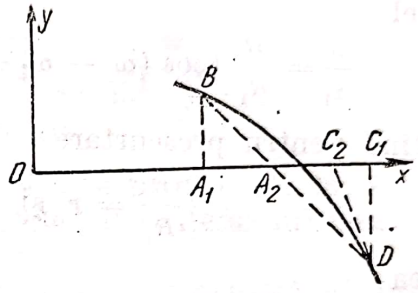

Fig. 5

După cele expuse mai sus, formulele (46) și (47) rămîn aici valabile, astfel încît corecția h la valoarea cunoscută a rădăcinii va fi

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{f(\alpha_1)}{\alpha_1 f'(\alpha_1)}. \qquad (47')$$

Efectuînd însă calculele după această formulă, trebuie să avem în vedere că mărimile

$$f(\alpha_1),\ \alpha_1 f'(\alpha_1)$$

vor fi complexe. Să presupunem, de exemplu, că

$$f(\alpha_1) = P + iQ = R[\cos \omega + i \sin \omega],$$

unde

$$P = \rho_1^n \cos n\varphi_1 + a_1\rho_1^{n-1} \cos (n-1)\varphi_1 + \cdots + a_{n-1}\rho_1 \cos \varphi_1 + a_n,$$
$$Q = \rho_1^n \sin n\varphi_1 + a_1\rho_1^{n-1} \sin (n-1)\varphi_1 + \cdots + a_{n-1}\rho_1 \sin \varphi_1$$

și

$$\left.\begin{aligned} R &= +\sqrt{P^2 + Q^2}, \\ R\cos\omega &= P, \\ R\sin\omega &= Q, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

astfel încît

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{Q}{P}. \qquad (**)$$

În același timp avem

$$\alpha_1 f'(\alpha_1) = P_1 + iQ_1 = R_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1),$$

unde

$$P_1 = n\rho_1^n \cos n\varphi_1 + (n-1)\,a_1\rho_1^{n-1} \cos (n-1)\varphi_1 + \cdots + a_{n-1}\rho_1 \cos \varphi_1,$$
$$Q_1 = n\rho_1^n \sin n\varphi_1 + (n-1)\,a_1\rho_1^{n-1} \sin (n-1)\varphi_1 + \cdots + a_{n-1}\rho_1 \sin \varphi_1,$$

și

$$R_1 = + \sqrt{P_1^2 + Q_1^2},$$

$$R_1 \cos \omega_1 = P_1, \quad R_1 \sin \omega_1 = Q,$$

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{Q_1}{P_1},$$

de unde

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{R}{R_1}[\cos(\omega - \omega_1) + i \sin(\omega - \omega_1)],$$

sau altfel

$$\frac{h}{\alpha_1} = \frac{R}{R_1}[\cos(\omega - \omega_1 + \pi) + i \sin(\omega - \omega_1 + \pi)]. \tag{52}$$

Notînd pentru prescurtare

$$\frac{R}{R_1} = r \text{ și } \omega - \omega_1 + \pi = c,$$

vom avea

$$h = \alpha_1 \cdot \frac{h}{\alpha_1} = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r(\cos c + i \sin c) =$$

$$= r\,\varphi_1[\cos(\varphi_1 + c) + i \sin(\varphi_1 + c)],$$

iar noua valoare a rădăcinii va fi

$$\alpha_1 + h = \rho_1[\cos \varphi_1 + r \cos(\varphi_1 + c)] + \rho_1[\sin \varphi_1 + r \sin(\varphi_1 + c)]i. \tag{53}$$

Pentru rădăcina conjugată

$$\alpha_2 = \rho_1(\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1)$$

vom obține, în același fel,

$$\alpha_2 + h = \rho_1[\cos \varphi_1 + r \cos(\varphi_1 + c)] - \rho_1[\sin \varphi_1 + r \sin(\varphi_1 + c)]\, i. \tag{54}$$

Se înțelege de la sine că în cazul cînd există două perechi de rădăcini complexe foarte apropiate, corecția h sau $\frac{h}{\alpha_1}$ trebuie determinată din ecuația

$$f(\alpha_1) + \frac{h}{\alpha_1}\alpha_1 f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{\alpha_1^2} \cdot \frac{\alpha_1^2 f''(\alpha_1)}{1 \cdot 2} = 0,$$

care, cu toate că va avea coeficienți complecși, nu prezintă însă dificultăți la rezolvare.

§ 24. Să dăm acum cîteva exemple care ilustrează metodele de mai sus, luate din articolul susmenționat al lui Encke.

Exemplul 1.

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3\,432} = 0.$$

Dacă scriem această ecuație cu coeficienții logaritmici, vom avea:

$$x^7 - 0{,}5440680x^6 + 0{,}6853971x^5 - 0{,}5270347x^4 +$$

$$+ 0{,}0877020x^3 - \bar{1}{,}3429745x^2 + \bar{2}{,}2126407x - \bar{4}{,}4644527 = 0.$$

Pentru a ușura calculele, este mai avantajos ca termenul liber să fie 1, în care scop trebuie să se ia ca o nouă necunoscută pe $xa_7^{\frac{1}{7}}$, după cum s-a arătat în § 15. Adăugînd la logaritmii coeficienților multipli corespunzători ai lui $-\frac{1}{7}\lg\frac{1}{3\,432} = 0{,}5050782$, obținem o nouă ecuație

$$x^7 - 1{,}0491462x^6 + 1{,}6955535x^5 - 2{,}0422693x^4 + \\ + 2{,}1080148x^3 - 1{,}8683655x^2 + 1{,}2431099x - 0{,}0000000 = 0.$$

Primele două transformări trebuie să se facă cu ajutorul logaritmilor cu șapte zecimale, căci dacă calculăm numai cu cinci zecimale am obține, de exemplu:

$$\lg a_2^2 = 3{,}39111,$$
$$\lg -2a_1a_3 = 3{,}39245(-),$$
$$\lg 2\,a_4 = 2{,}40904,$$

iar corespunzător diferenței de 0,00134 dintre primii doi logaritmi, erorii de o unitate a zecimalei a cincea în tabelele diferențelor lui Gauss îi corespunde o eroare de 330 unități.

Se înțelege că prin transformările următoare această eroare ar trece și asupra celorlalți coeficienți.

În acest fel vom avea succesiv:

Puterea rădăcinilor 2^1

$$x^7 + 1{,}4180045\,x^6 + 2{,}3959870\,x^5 + 3{,}0189949\,x^4 + 3{,}2738401\,x^3 + \\ + 3{,}0739343\,x^2 + 2{,}2004297\,x + 0{,}0000000 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^2

$$x^7 + 2{,}2735725\,x^6 + 4{,}0410890\,x^5 + 5{,}3386202\,x^4 + \\ + 6{,}0534451\,x^3 + 5{,}9093643\,x^2 + 4{,}3578860\,x + 0{,}0000000 = 0.$$

Celelalte calcule se efectuează cu cinci zecimale, obținîndu-se:

Puterea rădăcinilor 2^3

$$x^7 + 4{,}12268x^6 + 7{,}61495x^5 + 10{,}36176x^4 + 11{,}96640x^3 + 11{,}78333x^2 + \\ + 8{,}71441x + 0{,}00000 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^4

$$x^7 + 7{,}97094x^6 + 15{,}03723x^5 + 20{,}65591x^4 + 23{,}91840x^3 + \\ + 23{,}56553x^2 + 17{,}42882x + 0{,}00000 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^5

$$x^7 + 15{,}81746x^6 + 30{,}04231x^5 + 41{,}30800x^4 + 47{,}83679x^3 + \\ + 47{,}13106x^2 + 34{,}85764\,x + 0{,}00000 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^6

$$x^7 + 31{,}61214x^6 + 60{,}08366x^5 + 82{,}61598x^4 + 95{,}67358x^3 + \\ + 94{,}26212x^2 + 69{,}71528x + 0{,}00000 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^7

$$x^7 + 63{,}22365x^6 + 120{,}16732x^5 + 165{,}23196x^4 + 191{,}34716x^3 + \\ + 188{,}52424x^2 + 139{,}43056x + 0{,}00000 = 0.$$

Cu aceasta se termină trânsformarea, deoarece logaritmii coeficienților s-au dublat, de unde rezultă că sînt valabile egalitățile aproximative (4) cu o precizie pînă la a cincea zecimală a logaritmilor.

De aici rezultă:

$$\begin{aligned}
128 \lg \alpha_1' &= 63{,}22365, & \lg \alpha_1' &= 0{,}493935,\\
128 \lg \alpha_2' &= 56{,}94367, & \lg \alpha_2' &= 0{,}444872,\\
128 \lg \alpha_3' &= 45{,}06464, & \lg \alpha_3' &= 0{,}352067,\\
128 \lg \alpha_4' &= 26{,}11520, & \lg \alpha_4' &= 0{,}204025,\\
128 \lg \alpha_5' &= 125{,}17708 - 128, & \lg \alpha_5' &= \bar{1}{,}977946,\\
128 \lg \alpha_6' &= 77{,}90632 - 128, & \lg \alpha_6' &= \bar{1}{,}616456,\\
128 \lg \alpha_7' &= 116{,}56944 - 256, & \lg \alpha_7' &= \bar{2}{,}910699.
\end{aligned}$$

Adăugînd la toți logaritmii mărimea $\frac{1}{7} \lg a_7 = \bar{1}{,}494922$, obținem:

$$\begin{aligned}
\lg \alpha_1 &= \bar{1}{,}98886, & \lg \alpha_5 &= \bar{1}{,}47287,\\
\lg \alpha_2 &= \bar{1}{,}93979, & \lg \alpha_6 &= \bar{1}{,}11138,\\
\lg \alpha_3 &= \bar{1}{,}84699, & \lg \alpha_7 &= \bar{2}{,}40562.\\
\lg \alpha_4 &= \bar{1}{,}69895,
\end{aligned}$$

Dacă am dori să obținem valori mai precise ale rădăcinilor, am observa că în acest scop nu este suficient să folosim logaritmii cu șapte zecimale; astfel, luînd de exemplu $\lg \alpha_2 = \bar{1}{,}9397900$, vom avea:

$$\begin{aligned}
\alpha_2^7 &= 0{,}3789047, & 7\alpha_2^7 &= 2{,}6523329,\\
a_1\alpha_2^6 &= -1{,}5233790, & 6a_1\alpha_2^6 &= -9{,}1402740,\\
a_2\alpha_2^5 &= 2{,}4229648, & 5a_2\alpha_2^5 &= 12{,}1148240,\\
a_3\alpha_2^4 &= -1{,}9328347, & 4a_3\alpha_2^4 &= -7{,}7313388,\\
a_4\alpha_2^3 &= 0{,}8073689, & 3a_4\alpha_2^3 &= 2{,}4221067,\\
a_5\alpha_2^2 &= -0{,}1669377, & 2a_5\alpha_2^2 &= -0{,}3338754,\\
a_6\alpha_2 &= 0{,}0142047, & a_7\alpha_2 &= 0{,}0142047,\\
a_7 &= -0{,}0002914, & \alpha_2 f'(\alpha_2) &= -0{,}0020199\\
f(\alpha_2) &= 0{,}0000003
\end{aligned}$$

și, prin urmare,

$$\frac{h}{\alpha_2} = \frac{-0{,}0000003}{-0{,}0020199}.$$

Nu ne putem însă bizui pe această valoare, deoarece nu ne putem bizui pe numărător în urma faptului că la calculul cu logaritmi cu șapte zecimale este îndoielnică nu numai zecimala a opta a numerelor din care am obținut valoarea 0,0000003, ci și zecimala a șaptea.

Prin urmare, pentru a calula aici corecția h trebuie sau să folosim logaritmi cu zece zecimale, sau să efectuăm calculul lui $f(\alpha_2)$ fără ajutorul

logaritmilor şi aceasta cu douăsprezece zecimale. Bineînţeles, şi în ecuaţie trebuie să fie considerate valorile exacte ale coeficienţilor.

Ecuaţia dată face parte din cele care servesc la determinarea valorilor absciselor la calculul aproximativ al integralelor după metoda lui Gauss; la Gauss, rădăcinile acestei ecuaţii se află calculate cu şasesprezece zecimale.

Logaritmii (cu cinci zecimale) ai acestor rădăcini adevărate sînt

	Diferenţa
$\lg \alpha_1 = \bar{1},98881$	0,00005,
$\lg \alpha_2 = \bar{1},93990$	0,00011,
$\lg \alpha_3 = \bar{1},84691$	0,00008,
$\lg \alpha_4 = \bar{1},69897$	0,00002,
$\lg \alpha_5 = \bar{1},47287$	0,00000,
$\lg \alpha_6 = \bar{1},11138$	0,00000,
$\lg \alpha_7 = \bar{2},40562$	0,00000.

Exemplul 2. Ca un al doilea exemplu, Encke tratează următoarea ecuaţie:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Se obţine succesiv:

Puterea rădăcinilor 2^1

$$x^7 + 4x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 29x^3 - 14x^2 - 23x + 36 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^2

$$x^7 + 20x^6 + 78x^5 + 54x^4 + 589x^3 + 1386x^2 + 1537x + 1296 = 0$$

sau, cu coeficienţii logaritmici,

$$x^7 + 1{,}30103x^6 + 1{,}89209x^5 + 1{,}73239x^4 + 2{,}77012x^3 + \\ + 3{,}14176x^2 + 3{,}18667x + 3{,}11261 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^3

$$x^7 + 2{,}38739x^6 + 3{,}70774x^5 - 4{,}56350x^4 + 5{,}58565x^3 + \\ + 5{,}39859x^2 - 6{,}08996x + 6{,}22522 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^4

$$x^7 + 4{,}69313x^6 + 7{,}64995x^5 - 9{,}39198x^4 + 11{,}18557x^3 + \\ + 11{,}94810x^2 + 11{,}82750x + 12{,}45044 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^5

$$x^7 + 9{,}37002x^6 + 15{,}34998x^5 - 18{,}87658x^4 + \\ + 22{,}44623x^3 + 23{,}75387x^2 - 24{,}65849x + 24{,}90088 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^6

$$x^7 + 18{,}73969x^6 + 30{,}70300x^5 - 37{,}83535x^4 + \\ + 44{,}89718x^3 + 47{,}76037x^2 + 49{,}06887x + 49{,}80176 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^7

$$x^7 + 37{,}47942x^6 + 61{,}40601x^5 - 75{,}51594x^1 + \\ + 89{,}79441x^3 + 95{,}49582x^2 + 97{,}80854x + 99{,}60352 = 0.$$

Puterea rădăcinilor 2^8

$$x^7 + 74{,}95884x^6 + 122{,}81202x^5 - 151{,}32153x^1 + \\ + 179{,}58882x^3 + 190{,}99129x^2 + 195{,}21132x + 199{,}20704 = 0.$$

Coeficienții negativi ai termenilor în x^4 și x, care figurează în ecuațiile transformate, indică prezența unor rădăcini complexe.

Folosind formula (15), avem:

$$\begin{aligned} 256 \lg \alpha_1 &= 74{,}95884, & \lg \alpha_1 &= 0{,}292898, \\ 256 \lg \alpha_2 &= 47{,}85318, & \lg \alpha_2 &= 0{,}186927, \\ 256 \lg g_1^2 &= 56{,}77680, & \lg g_1^2 &= 0{,}221785, \\ 256 \lg \alpha_5 &= 11{,}40247, & \lg \alpha_5 &= 0{,}044541, \\ 256 \lg g_2^2 &= 8{,}21575, & \lg g_2^2 &= 0{,}032093. \end{aligned}$$

Căutînd numerele corespunzătoare ale acestor logaritmi, aflăm valorile rădăcinilor:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1{,}96249, & g_1^2 &= 1{,}66642, \\ \alpha_2 &= +1{,}53790, & g_2^2 &= 1{,}07669, \\ \alpha_5 &= +1{,}10800, \end{aligned}$$

căci nu este greu să ne convingem că α_1 este negativă și că celelalte două rădăcini sînt pozitive, adică

$$f(x) = (x + 1{,}96249)\,(x - 1{,}53790)\,(x - 1{,}10800) \times \\ \times (x^2 - t_1 x + 1{,}66642)\,(x^2 - t_2 x + 1{,}07669).$$

Pentru a afla mărimile t_1 și t_2, alcătuim ecuațiile (18′) și (17′), și anume:

$$-1{,}96249 + 1{,}53790 + 1{,}10800 + t_1 + t_2 = 0$$

sau

$$t_1 + t_2 = -0{,}68341, \qquad (18')$$

$$-\frac{1}{1{,}96249} + \frac{1}{1{,}53790} + \frac{1}{1{,}10800} + \frac{1}{1{,}66642} t_1 + \frac{1}{1{,}07669} t_2 = -\frac{-5}{6}$$

sau

$$0{,}60009 t_1 + 0{,}922877 t_2 = -0{,}20988, \qquad (17')$$

de unde

$$t_1 = -1{,}29258,$$
$$t_2 = +0{,}60917.$$

De aici rezultă că factorii trinomiali sînt

$$x^2 + 1{,}29258x + 1{,}66642$$

și

$$x^2 - 0{,}60917x + 1{,}07669.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține argumentele φ_1 și φ_2, trebuie să se observe numai că

$$2g_1 \cos \varphi_1 = t_1 \quad \text{și} \quad 2g_2 \cos \varphi_2 = t_2,$$

de unde rezultă

$$\varphi_1 = 180° - 59°57'25'',3 = 120°02'34'',7,$$
$$\varphi_2 = 84°56'28'',6.$$

Pentru a afla valori mai apropiate, considerăm ca primă aproximație:

$$\lg g_1 = 0{,}11089;$$
$$\varphi_1 = 120°02'40'',$$

unde am rotunjit numărul secundelor la φ_1, pentru a simplifica calculele. In acest caz avem:

$$\begin{aligned} g_1^7 \cos 7\varphi_1 &= -3{,}0148035 \\ a_2 g_1^5 \cos 5\varphi_1 &= +3{,}5605688 \\ a_4 g_1^3 \cos 3\varphi_1 &= -6{,}4534218 \\ a_5 g_1^2 \cos 2\varphi_1 &= -3{,}3238460 \\ a_6 g_1 \cos \varphi_1 &= +3{,}2315655 \\ a_7 &= +6{,}0000000 \\ \hline P &= +0{,}0000630 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7g_1^7 \cos 7\varphi_1 &= -21{,}1036245 \\ 5a_2 g_1^5 \cos 5\varphi_1 &= +17{,}8028440 \\ 3a_4 g_1^3 \cos 3\varphi_1 &= -19{,}3602654 \\ 2a_5 g_1^2 \cos 2\varphi_1 &= -6{,}6476920 \\ a_6 g_1 \cos \varphi_1 &= +3{,}2315655 \\ \hline S &= -26{,}071724 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1^7 \sin 7\varphi_1 &= -5{,}1569226 \\ a_2 g_1^5 \sin 5\varphi_1 &= -6{,}2226992 \\ a_4 g_1^3 \sin 3\varphi_1 &= +0{,}0150177 \\ a_5 g_1^2 \sin 2\varphi_1 &= +5{,}7777520 \\ a_6 g_1 \sin \varphi_1 &= +5{,}5872230 \\ \hline Q &= +0{,}0003709 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7g_1^7 \sin 7\varphi_1 &= -36{,}0984582 \\ 5a_2 g_1^5 \sin 5\varphi_1 &= -31{,}1134960 \\ 3a_4 g_1^3 \sin 3\varphi_1 &= +0{,}0450531 \\ 2a_5 g_1^2 \sin 2\varphi_1 &= +11{,}5555040 \\ a_6 g_1 \sin \varphi_1 &= +5{,}5872230 \\ \hline R &= -50{,}0241741 \end{aligned}$$

Rezultă că, punînd

$$\alpha = g_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

obținem, pe baza celor de mai sus,

$$f(\alpha) = P + iQ = 0{,}0000630 + 0{,}0003709\, i,$$
$$\alpha f'(\alpha) = S + iR = -26{,}071724 - 50{,}0241741\, i$$

sau altfel, punînd

$$f(\alpha) = r (\cos \omega + i \sin \omega),$$
$$\alpha f'(\alpha) = \rho (\cos \psi + i \sin \psi),$$

găsim

$$\lg r = \bar{4}{,}575433, \quad \omega = 80°21'36'',$$
$$\lg \rho = 1{,}751380, \quad \psi = 242°28'\ 2''$$

și, prin urmare,

$$\frac{h}{\alpha} = -\frac{r}{\rho} [\cos (\omega - \psi) + i \sin (\omega - \psi)].$$

Este însă mai ușor să se afle corecțiile la $\lg g_1$ și la argumentul φ_1. În adevăr, scriind

$$\alpha = g_1 e^{i\varphi_1},$$

avem

$$\ln \alpha = \ln g_1 + i\varphi_1,$$

$$\ln (\alpha + h) = \ln \alpha \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right) = \ln \alpha + \ln \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right) = \ln \alpha + \frac{h}{\alpha}.$$

Prin urmare,

$$\ln (\alpha + h) = \left(\ln g_1 - \frac{r}{\rho} \cos (\omega - \psi)\right) + i \left(\varphi_1 - \frac{r}{\rho} \sin (\omega - \psi)\right)$$

și, deci, pentru valoarea îmbunătățită a rădăcinii

$$\alpha + h = g'_1 (\cos \varphi'_1 + i \sin \varphi'_1)$$

rezultă că

$$\ln g'_1 = \ln g_1 - \frac{r}{\rho} \cos (\omega - \psi), \qquad (*)$$

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - \frac{r}{\rho} \sin (\omega - \psi).$$

Dacă în locul logaritmilor neperieni luăm, însă, pe cei ordinari, trebuie să înmulțim ambii membri ai formulei (*) cu $\frac{1}{M} = 0{,}434\ldots$ și observînd că $\frac{1}{M} \ln g'_1 = \lg g'_1$ și $\frac{1}{M} \ln g_1 = \lg g_1$, obținem:

$$\lg g'_1 = \lg g_1 - \frac{1}{M} \cdot \frac{r}{\rho} \cos (\omega - \psi)$$

și

$$\varphi'_1 - \varphi_1 = -\frac{r}{\rho} \sin (\omega - \psi).$$

Astfel, în cazul nostru vom avea

$$\frac{1}{M} = 0{,}43429\ldots, \quad \lg \frac{1}{M} = \bar{1}{,}637780$$

$$\lg \frac{r}{\rho} = \bar{6}{,}824053,$$

$$360° + \omega - \psi = 197°33'34''\ldots, \quad \lg \cos (\omega - \psi) = \bar{1}{,}979277(-)$$

$$\bar{6}{,}441110(-)$$

$$-\frac{1}{M} \frac{r}{\rho} \cos (\omega - \psi) = 0{,}00000276\ldots$$

Prin urmare,

$$\lg g'_1 = 0{,}1108900 + 0{,}0000028 = 0{,}1108928.$$

Pentru a obţine mărimea lui $\varphi_1' - \varphi_1$ în secunde de arc, trebuie ca să se înmulţească valoarea în radiani a unghiului cu numărul de secunde cuprinse în unghiul de 1 radian, adică cu 206265:

$$\lg 206265 = 5{,}31442,$$
$$\lg \frac{r}{\rho} = \bar{6}{,}82405,$$
$$\lg \sin(\omega - \psi) = \underline{\bar{1}{,}47954,}$$
$$\bar{1}{,}61801$$
$$\varphi_1' - \varphi_1 = + 0'',42.$$

Prin urmare,

$$\varphi_1' = 120°02'40'' + 0'',42 = 120°02'40'',42.$$

Pentru a da un exemplu de găsire a corecţiei la lg unei rădăcini reale, vom considera rădăcina α_1, pentru care

$$\lg \alpha_1 = 0{,}2928080\ (-)$$

şi

$$\alpha_1 = -1{,}96249.$$

Efectuînd calculele cu ajutorul logaritmilor cu şapte zecimale, obţinem:

α_1^7	$= -112{,}112997$	$7\alpha_1^7$	$= -784{,}790979$
$a_2\alpha_1^5$	$= +\ 58{,}219704$	$5a_2\alpha_1^5$	$= +291{,}098520$
$a_4\alpha_1^3$	$= +\ 22{,}674894$	$3a_4\alpha_1^3$	$= +\ 68{,}024682$
$a_5\alpha_1^2$	$= +\ 15{,}405508$	$2a_5\alpha_1^2$	$= +\ 30{,}811016$
$a_6\alpha_1$	$= +\ 9{,}812460$	$a_6\alpha_1$	$= +\ 9{,}812460$
α_7	$= +\ 6{,}000000$	$\alpha_1 f'(\alpha_1)$	$= -385{,}044301$
$f(\alpha_1)$	$= -\ 0{,}000431$		

de unde rezultă

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{f(\alpha_1)}{\alpha_1 f'(\alpha_1)} = -\frac{0{,}000431}{385{,}04} = -0{,}00000112,$$
$$\Delta \lg \alpha_1 = \frac{1}{M} \cdot \frac{h}{\alpha_1} = -0{,}0000005.$$

Prin urmare,

$$\lg \alpha_1 = 0{,}2928075\ (-),$$
$$\alpha_1 = -1{,}9624901.$$

Tot aşa, calculînd corecţiile pentru celelalte rădăcini, obţinem următoarea descompunere a polinomului $f(x)$ în factori:

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 =$$
$$= (x + 1{,}9624901)(x - 1{,}5378905)(x - 1{,}1080166) \times$$
$$\times (x^2 - 0{,}6092132x + 1{,}0766801)(x^2 + 1{,}2926302x + 1{,}6664238).$$

În majoritatea problemelor tehnice nu este necesară o precizie atît de mare, iar prima aproximaţie, obţinută cu ajutorul logaritmilor cu cinci zecimale, este mai mult decît suficientă.

CAPITOLUL III

CALCULUL APROXIMATIV AL INTEGRALELOR DEFINITE

§ 25. Calculul ariilor, al volumelor, aflarea centrului lor de greutate, precum și alte probleme se reduc la calculul anumitor integrale definite. Vom indica mai întîi aceste integrale, iar apoi vom arăta metodele generale folosite la calculul valorii numerice a oricărei integrale definite de acest fel, independent ce anume reprezintă ea.

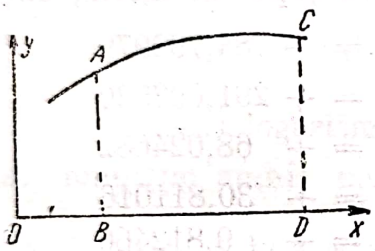

Fig. 6

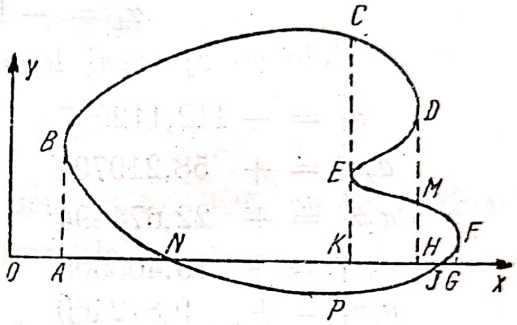

Fig. 7

Calculul ariei unui domeniu mărginit de o curbă închisă oarecare se reduce la calculul ariilor așa-numitelor domenii simple. Se numește domeniu simplu un domeniu (fig. 6) mărginit de două ordonate AB și CD, de porțiunea BD de pe axa absciselor și de curba AC.

Lungimea BD se numește baza acestui domeniu. In cazul particular, cînd una din ordonatele extreme, AB sau CD sau chiar amîndouă, sînt egale cu zero, domeniul nu încetează de a fi simplu.

Dacă este dată o curbă oarecare, pentru a reduce calculul ariei domeniului mărginit de ea la calculul ariilor unor domenii simple, trebuie procedat în felul următor: se duce o dreaptă Ox (fig. 7), care se consideră ca axa absciselor, apoi se duc la această curbă tangente perpendiculare la Ox. Să presupunem că aceste tangente sînt AB, EK, DH, FG. Se vede atunci ușor, că aria propusă, mărginită de curba $BCDEFJN$ poate fi reprezentată sub forma următoarei sume algebrice de arii de domenii simple:

$$\text{aria } BCDEFJN = \text{aria } ABCK - \text{aria } ABN + \text{aria } KCDH - \text{aria } KEDH + \\ + \text{aria } KEMH + \text{aria } HMFG - \text{aria } JFG + \text{aria } JPN.$$

Rămîne de arătat în ce fel se calculează aria unui domeniu simplu. Să presupunem că domeniul dat este $ABCD$ (fig. 8) și că ecuația curbei BC

este $y = f(x)$; se știe atunci că aria $ABCD$ se exprimă prin următoarea integrală definită:

$$\text{aria } ABCD = S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

unde a este abscisa punctului B, iar b este abscisa punctului C. În multe cazuri practice, funcția $f(x)$ nu este dată analitic, adică nu se cunoaște ecuația curbei BC, ci această curbă este reprezentată grafic și i se poate măsura ordonata corespunzătoare oricărei abscise, ceea ce se exprimă prin notația

$$y = f(x).$$

Calculul poziției centrului de greutate al unui domeniu simplu se reduce, de asemenea, la calculul unor integrale definite simple.

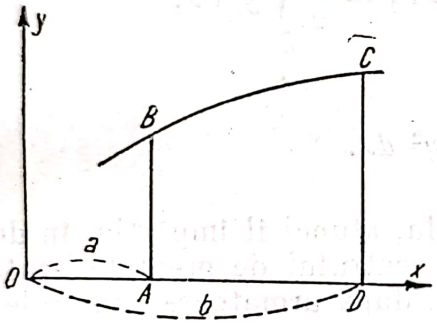

Fig. 8

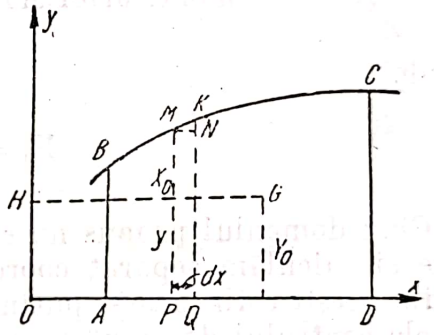

Fig. 9

Se știe că abscisa X_0 a centrului de greutate G al domeniului $ABCD$ se obține împărțind momentul acestui domeniu în raport cu axa Oy la mărimea ariei sale. Impărțind baza AD a domeniului în porțiuni infinit mici, cum ar fi PQ, și ducînd prin punctele de diviziune ordonatele respective, împărțim însuși domeniul în fîșii infinit mici, cum este, de exemplu, $PMKQ$, a căror arie diferă de ariile dreptunghiurilor corespunzătoare (de tipul lui $PMNQ$) numai prin infiniți mici de ordin superior. Aria $ABCD = S$ este limita sumei ariilor dreptunghiurilor infinit mici astfel obținute, iar momentul acestei arii este limita sumei momentelor ariilor tuturor acestor dreptunghiuri. Momentul ariei dreptunghiului $PMNQ$ se exprimă prin următoarea formulă (notațiile fiind cele din fig. 9):

$$\text{mom. ariei } PMNQ = \text{aria } PMNQ \cdot \left(x + \frac{1}{2}dx\right) =$$

$$= y\,dx \cdot \left(x + \frac{1}{2}dx\right) = yx\,dx + \frac{1}{2}y\,dx\,dx.$$

Ultimul termen reprezintă o mărime infinit mică de ordinul al doilea în raport cu dx, care poate fi, prin urmare, neglijată la calculul limitei sumei, fără a modifica această limită. In acest fel, obținem

$$\text{mom. ariei } ABCD = SX_0 = \int_a^b yx\,dx,$$

de unde rezultă

$$X_0 = \frac{1}{S}\int_a^b yx\,dx. \tag{2}$$

Pentru a afla ordonata centrului de greutate Y_0 trebuie să se ia momentul domeniului dat în raport cu axa Ox, împărţindu-l apoi la mărimea ariei acestui domeniu.

Ca şi mai sus, acest domeniu va fi limita sumei momentelor unor arii infinit mici reprezentate de dreptunghiuri de forma $PMNQ$, care se exprimă evident în felul următor:

$$y\,dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y^2dx;$$

prin urmare,

$$\text{mom. ariei } ABCD = SY_0 = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,$$

de unde

$$Y_0 = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx. \tag{3}$$

Cînd domeniul propus nu este simplu, atunci îl împărţim în domenii simple şi calculăm separat coordonatele centrului de greutate pentru fiecare din acestea din urmă, putînd obţine, după următoarele formule, coordonatele centrului de greutate a ariei date.

Să presupunem că $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ sînt ariile domeniilor simple, a căror sumă algebrică este aria S a domeniului dat; fie $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_k, y_k$ coordonatele centrelor de greutate corespunzătoare, iar X_0, Y_0 coordonatele centrului de greutate al ariei S.

Dacă

$$S = s_1 + s_2 - s_3 + \ldots + s_k,$$

atunci

$$X_0 = \frac{s_1x_1 + s_2x_2 - s_3x_3 + \ldots + s_kx_k}{S} \tag{4}$$

şi

$$Y_0 = \frac{s_1y_1 + s_2y_2 - s_3y_3 + \ldots + s_ky_k}{S}, \tag{5}$$

ceea ce rezultă direct din cunoscuta teoremă a momentelor.

Calculul unui volum, mărginit de o suprafaţă curbă, poate fi redus la calculul unor integrale definite simple.

Să presupunem că este dat volumul B, mărginit de o suprafaţă oarecare închisă.

Ducînd la această suprafaţă plane tangente, paralele la planul zOy, obţinem abscisele a şi b ale punctelor extreme ale acestei suprafeţe, împărţind apoi segmentul $\overline{CD}$ în porţiuni infinit mici şi ducînd prin punctele de diviziune plane paralele la zOy, tăiem volumul dat în porţiuni infinit de subţiri, aşa cum se poate vedea pe figură (fig. 10).

Fiecare din aceste porţiuni este mărginită de două plane şi de partea din suprafaţă cuprinsă între ele. Suprafaţa se intersectează cu planele indicate după curbele K şi K'.

Să presupunem, că din toate punctele curbei K sînt duse drepte paralele la axa Ox, pînă la intersecţia lor cu planul Q. În acest fel, se obţine un cilindru drept cu baza K şi cu înălţimea PQ, iar la intersecţia acestui cilindru cu planul Q se obţine o curbă identică cu K. În acelaşi fel, luînd curba K' şi construind cilindrul corespunzător pînă la intersecţia lui cu planul P, obţinem pe acest plan aceeaşi figură ca şi pe planul Q. În acest fel obţinem pe fiecare din aceste plane două curbe K şi K'.

Evident că stratul considerat va fi conţinut în interiorul cilindrului, a cărui bază este curba $NK'MK_1'$; în schimb, cilindrul cu baza KHK_1G va fi în întregime cuprins în interiorul stratului.

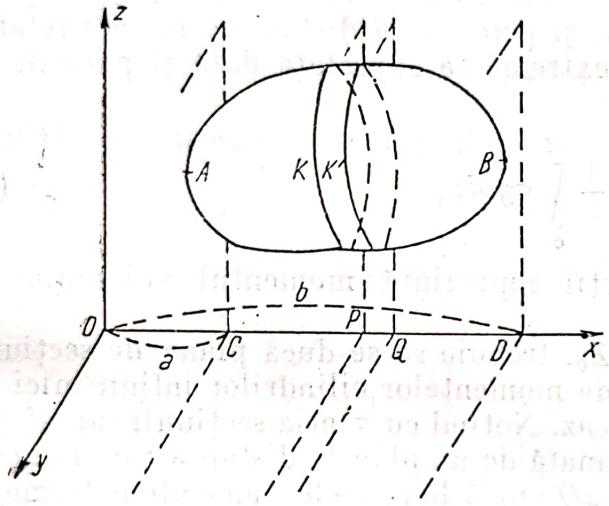

Fig. 11

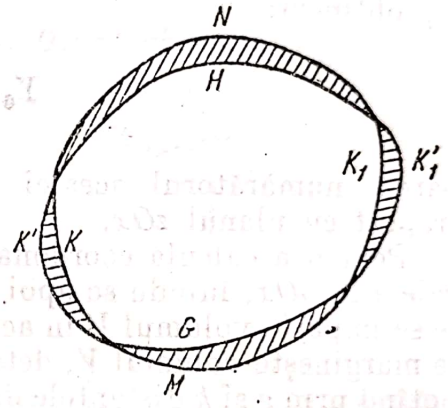

Fig. 10

La limită, cînd distanţa PQ tinde către zero, ambele curbe K şi K' se suprapun; aceasta înseamnă că aria haşurată pe figură (fig. 11) se anulează la limită, de unde rezultă că ea este infinit mică. Deoarece înălţimea PQ a cilindrilor consideraţi şi a stratului este, de asemenea, o mărime infinit mică, urmează că volumul stratului se deosebeşte de volumul fiecăruia din aceşti cilindri şi deci şi de volumul cilindrului cu baza K numai cu o mărime infinit mică de ordin superior. La aflarea limitei sumei se pot neglija aceşti infiniţi mici de ordin superior, astfel încît volumul dat urmează a fi considerat ca limita sumei volumelor cilindrilor cu baza K.

Să notăm cu ω aria mărginită de curba K din planul P, a cărui abscisă este x; evident că ω va fi o anumită funcţie de x. Să presupunem că

$$\omega = F(x).$$

Volumul cilindrului menţionat cu baza ω va fi atunci $\omega \cdot dx$ iar limita sumei acestor volume va fi exprimată prin integrala $\int_a^b \omega\, dx$, de unde obţinem formula

$$V = \int_a^b \omega\, dx = \int_a^b F(x)\, dx, \qquad (6)$$

unde $\omega = F(x)$ este aria secţiunii, corespunzătoare abscisei x. Calculul volumului se reduce astfel la calculul ariilor secţiunilor şi apoi la calculul integralei definite (6).

Pentru a afla abscisa X_0 a centrului de greutate al volumului V, trebuie să se raţioneze în acelaşi fel ca şi în cazul ariilor, luînd momentele în raport cu planul zOy, de unde se obţine următoarea formulă:

$$X_0 = \frac{1}{V}\int_a^b \omega\, x\, dx. \tag{7}$$

Pentru a calcula coordonata Y_0 a centrului de greutate a volumului considerat, trebuie ca acesta din urmă să fie împărţit prin plane paralele la planul zOx, la fel ca în cazul de mai sus. Notînd cu σ aria secţiunii corespunzătoare distanţei y de la planul zOx, şi prin c şi d distanţele la care se află de la acest plan planele tangente extreme la suprafaţa dată şi paralele la zOx, obţinem:

$$Y_0 = \frac{1}{V}\int_c^d \sigma y\, dy, \tag{8}$$

deoarece numărătorul acestei fracţii reprezintă momentul volumului V în raport cu planul zOx.

Pentru a calcula coordonata Z_0, trebuie să se ducă plane de secţiune paralele la yOx, luîndu-se apoi suma momentelor cilindrilor infinit mici în care se împarte volumul V în acest caz. Notînd cu τ aria secţiunii suprafeţei care mărgineşte volumul V, determinată de un plan la distanţa z de la xOy, şi notînd prin g şi h distanţele de la xOy pînă la planele tangente extreme la această suprafaţă şi paralele la planul xOy, se observă că

$$Z_0 = \frac{1}{V}\int_g^h \tau z\, dz. \tag{9}$$

Reducînd astfel cele mai importante calcule întîlnite de obicei la calculul unor integrale definite, trebuie să arătăm acum în ce fel se poate afla valoarea acestora din urmă, în special atunci cînd nu este dată expresia analitică a funcţiilor care figurează sub semnul integral, ci cînd acestea sînt date numai grafic.

§ 26. Calculul integralei definite

$$S = \int_a^b f(x)\, dx,$$

cînd funcţia $f(x)$ este dată analitic şi poate fi calculată integrala nedefinită

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

se efectuează după formula

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

În cazurile cînd integrala nedefinită nu poate fi aflată, trebuie să se folosească pentru calculul integralei definite formule de aproximaţie.

Scanned with OKEN Scanner

Precizia acestor formule poate fi făcută oricît de mare; în practică, însă, nu se ivește de obicei necesitatea unei precizii prea mari, astfel încît și aici trebuie să ne conducem după regulile expuse în cap. I.

Astfel, să admitem că trebuie să se găsească valoarea integralei definite

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Oricare ar fi cantitatea pe care această integrală ar reprezenta-o, se poate totdeauna admite că există o curbă, a cărei ecuație este

$$y = f(x);$$

rezultă că integrala va reprezenta o arie $ABCD$, mărginită de o porțiune a

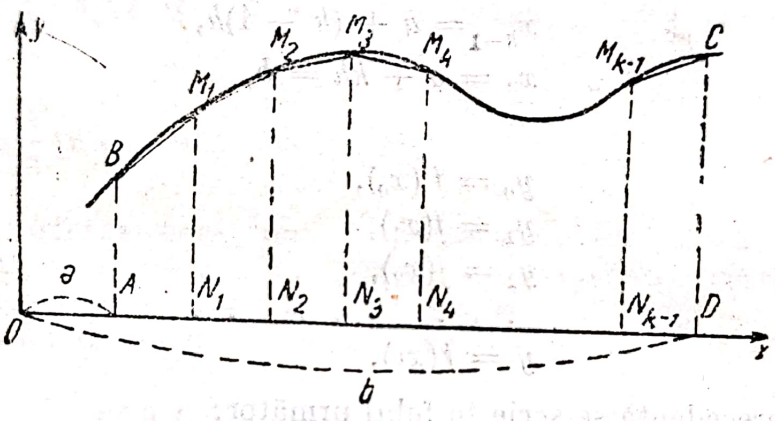

Fig. 12

axei x, de două ordonate și de curbă. De aici rezultă că această arie va fi numeric egală cu integrala S.

Una din cele mai simple metode prin care se poate afla aria $ABCD$ (fig. 12) constă în a împărți baza AD în cîteva părți egale, prin ale căror puncte de diviziune se duc ordonatele respective, ale căror extremități se unesc prin linii drepte. În acest fel se obține o linie poligonală, înscrisă în curba dată, așa cum se poate vedea în figură, și în locul ariei $ABCD$ se ia aria mărginită de această linie poligonală: $BM_1M_2\cdots M_{k-1}C$. Această arie, care reprezintă suma ariilor unor trapeze de tipul lui $N_1M_1M_2N_2$, se calculează ușor, dacă se măsoară sau se calculează ordonatele $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_k$; în adevăr, vom avea:

$$\text{aria } BM_1\cdots M_{k-1}C = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)h +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}(y_{k-2} + y_{k-1})h + \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)h =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right)h,$$

unde h este distanța între două ordonate vecine, egală cu $\frac{b-a}{k}$.

Considerînd această arie ca aria curbei, obținem pentru calculul integralei definite $\int_a^b y\,dx$ următoarea formulă aproximativă:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + \frac{1}{2}\,y_k\right). \qquad (1)$$

Dacă $y = f(x)$, atunci, punînd

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a + h, \\ x_2 &= a + 2h, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k-1} &= a + (k-1)h, \\ x_k &= a + kh = b, \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0), \\ y_1 &= f(x_1), \\ y_2 &= f(x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k &= f(x_k), \end{aligned}$$

iar formula precedentă se scrie în felul următor:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{k}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{k-1}) + \frac{1}{2}f(x_k)\right].$$

Această formulă se numește formula trapezelor și poate servi pentru calculul oricărei integrale definite cu ajutorul unor valori particulare ale funcției de integrat.

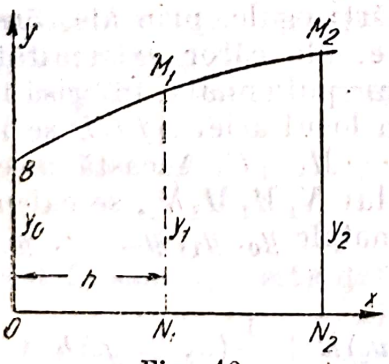

Fig. 13

Se vede ușor că, cu cît numărul k va fi mai mare, cu atît mai precis va fi rezultatul dat de această formulă. Nu vom deduce expresia generală a erorii acestei formule, ci vom indica această expresie mai jos, fără demonstrație, împreună cu expresiile analoge referitoare la alte formule.

§ 27. O altă metodă pentru calculul ariei S este bazată pe înlocuirea porțiunilor curbei date prin arcuri de parabole, ale căror axe sînt paralele la axa Oy, și nu prin drepte, așa cum a fost la regula trapezelor. Formula aproximativă, obținută în acest fel, se numește formula lui Simpson.

Să deplasăm originea coordonatelor în punctul A, păstrînd direcția axelor și să considerăm porțiunea BM_2 a curbei (fig. 13). Ecuația unei parabole a cărei axă este paralelă la axa Oy, este

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2. \qquad (*)$$

Să ducem această parabolă în așa fel, încît să treacă prin punctele B, M_1 și M_2 și să înlocuim prin ea porțiunea BM_2 a curbei date.

Pentru ca parabola (*) să treacă prin punctele B, M_1 și M_2, trebuie să se determine coeficienții A_0, A_1, A_2, astfel încît coordonatele acestor puncte să satisfacă ecuația (*), ceea ce dă următoarele condiții:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= A_0, \\ y_1 &= A_0 + A_1 h + A_2 h^2, \\ y_2 &= A_0 + 2A_1 h + 4A_2 h^2. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Aria cuprinsă între parabola (*), axa x și ordonatele OB și N_2M_2, se exprimă prin integrala

$$\int_0^{2h} y\,dx = \int_0^{2h} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\,dx = 2A_0 h + 2A_1 h^2 + \frac{8A_2 h^3}{3} =$$

$$= \frac{h}{3}(6A_0 + 6A_1 h + 8A_2 h^2).$$

Însă în virtutea ecuațiilor (**), mărimea care se află în paranteză este egală cu $y_0 + 4y_1 + y_2$, fapt despre care ne putem convinge înmulțind a doua din aceste ecuații cu 4 și adunînd-o la celelalte două.

În acest fel se obține formula aproximativă

$$\text{aria } OBM_2N_2 = (y_0 + 4y_1 + y_2)\frac{h}{3}. \qquad (***)$$

Să presupunem că numărul diviziunilor k este par, adică $k = 2n$; atunci, înlocuind în același fel arcul $M_2M_3M_4$ al curbei date prin parabola care trece prin punctele M_2, M_3 și M_4, obținem:

$$\text{aria } N_2M_2M_4N_4 = (y_2 + 4y_3 + y_4)\frac{h}{3}.$$

În același fel, găsim

$$\text{aria } N_4M_4M_6N_6 = (y_4 + 4y_5 + y_6)\frac{h}{3}$$

etc. Adunînd aceste formule, obținem:

$$\text{aria } ABCD = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}],$$

și deci următoarea formulă pentru calculul integralei definite:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{2n-1}) + \qquad (2)$$

$$+ f(x_{2n})],$$

care se numește *formula lui Simpson*.

§ 28. Metoda care servește pentru deducerea formulei trapezelor și formulei lui Simpson poate fi generalizată, dîndu-ne un număr oricît de mare de formule analoge acestor două.

Esența metodelor expuse constă în aceea că o curbă dată sau porțiuni ale acesteia se înlocuiesc fie prin drepte (cu ecuația $y = A_0 + A_1x$), fie prin parabole (cu ecuația $y = A_0 + A_1x + A_2x^2$); de aceea, este firesc ca generalizarea acestor metode să ducă la înlocuirea curbei date printr-o altă curbă, care să aibă punctele comune cerute cu cea dată și a cărei ecuație să aibă forma

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n. \qquad (*)$$

Să luăm pe baza AD a ariei date cîteva puncte intermediare între A și D, notînd abscisele lor prin

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\cdots,x_n.$$

Printre aceste puncte pot fi și punctele A și D. Să ducem ordonatele corespunzătoare acestor abscise și să le notăm cu

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\cdots,y_n.$$

Determinăm coeficienții $A_0, A_1,\cdots, A_n$ din ecuația (*) astfel, încît curba (*) să treacă prin punctele

$$x_0,\ y_0;\ x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2;\cdots;\ x_n,\ y_n.$$

Aceste condiții se exprimă prin următoarele n ecuații, dintre care prima, de exemplu, reprezintă condiția pentru ca curba (*) să treacă prin punctul (x_0, y_0), adică pentru ca acest punct să verifice ecuația curbei:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= A_0 + A_1x_0 + A_2x_0^2 + \cdots + A_nx_0^n,\\ y_1 &= A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \cdots + A_nx_1^n,\\ y_2 &= A_0 + A_1x_2 + A_2x_2^2 + \cdots + A_nx_2^n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n &= A_0 + A_1x_n + A_2x_n^2 + \cdots + A_nx_n^n. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Acest sistem de $n + 1$ ecuații cu cele $n + 1$ necunoscute,

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots,\ A_n,$$

ne dă pentru fiecare din ele o singură valoare bine determinată. Substituind aceste valori în ecuația (*), obținem ecuația curbei cerute.

Însă rezolvarea sistemului (**) în raport cu necunoscutele $A_0, A_1,\cdots,A_n$ și înlocuirea valorilor aflate în ecuația (*) înseamnă a elimina aceste $n+1$ necunoscute din $n+2$ ecuații (*) și (**), astfel încît nu avem nevoie să cunoaștem valorile acestor necunoscute, ci să avem numai rezultatul eliminării lor. Această eliminare o putem efectua și fără a rezolva ecuațiile (**), bazîndu-ne pe următoarele considerente: se vede ușor că dacă rezolvăm ecuațiile (**) în raport cu $A_0, A_1,\cdots,A_n$, aceste soluții vor cuprinde pe $y_0, y_1,\cdots,y_n$ numai la puterea întîi și nu vor avea termeni care să conțină produse dintre aceste variabile.

Aceasta înseamnă că și după substituirea valorilor găsite $A_0,A_1,\cdots,A_n$, ecuația (*) va cuprinde literele $y_0, y_1,\cdots,y_n$ numai la puterea întîi, iar litera x va fi cuprinsă în această ecuație la o putere cel mult egală cu n.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, rezultatul eliminării va avea forma

$$y = y_0F_0(x) + y_1F_1(x) + \cdots + y_nF_n(x), \qquad (*)$$

unde $F_0(x), F_1(x), \cdots, F_n(x)$ reprezintă anumite funcţii întregi (polinoame) de variabila x, cu un grad care nu depăşeşte pe n.

Astfel, nu ne rămîne decît să determinăm forma acestor funcţii. În acest scop, vom alcătui condiţiile pe care ele trebuie să le satisfacă.

S-a mai spus că, pentru $x = x_0$, y trebuie să fie egal cu y_0; prin urmare, cînd $x = x_0$, funcţia $F_0(x)$ devine egală cu 1, iar celelalte funcţii se anulează, astfel încît vom avea:

pentru $x = x_0$;	pentru $x = x_1, \ldots,$	pentru $x = x_n$;
$y = y_0$:	$y = y_1, \ldots$:	$y = y_n$:
$F_0(x_0) = 1$;	$F_0(x_1) = 0; \ldots$;	$F_0(x_n) = 0$;
$F_1(x_0) = 0$;	$F_1(x_1) = 1; \ldots$;	$F_1(x_n) = 0$;
$F_2(x_0) = 0$;	$F_2(x_1) = 0; \ldots$;	$F_2(x_n) = 0$;
. . . . .	. . . . .	. . . . .
$F_n(x_0) = 0$;	$F_n(x_1) = 0; \ldots$;	$F_n(x_n) = 1$.

În general, condiţia pentru ca curba (*) să treacă prin punctul x_i, y_i se exprimă prin aceea că, pentru $x = x_i$, y trebuie să fie egal cu y_i, ceea ce înseamnă că funcţia $F_i(x_i)$ trebuie să fie egală cu 1, iar celelalte cu zero, de unde se obţine tabela de mai sus.

Deoarece fiecare dintre aceste funcţii $F_0, F_1, \cdots, F_n$ este un polinom, urmează că din această tabelă ajungem la concluzia că funcţia $F_0(x)$ se împarte fără rest la produsul

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

şi, în general, funcţia $F_i(x)$, la produsul

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n).$$

Deoarece acest produs are gradul n, care coincide cu gradul fiecărei funcţii, urmează că în cît nu poate fi conţinută necunoscuta x, acest cît reducîndu-se la un anumit număr constant, pe care îl vom nota pentru funcţia F_i prin P_i. Obţinem astfel:

$$F_i(x) = P_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n).$$

Pentru a determina numărul P_i, trebue să luăm în considerare condiţia rămasă care trebuie satisfăcută de funcţia F_i, şi anume ca pentru $x = x_i$ aceasta să devină egală cu 1. De aici rezultă că

$$1 = P_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n),$$

de unde

$$P_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

şi, prin urmare,

$$F_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că curba (*) va avea ecuația

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} +$$
$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} +$$
$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}. \qquad (1)$$

Observăm că această formulă ne dă soluția următoarei probleme: să se alcătuiască un polinom de gradul n în raport cu variabila independentă x, care să ia pentru cele $n+1$ valori particulare ale acestor variabile x_0, x_1, $x_2,\dots,x_n$, valorile date y_0, y_1, $y_2,\dots,y_n$.

Soluția acestei din urmă probleme reprezintă una din așa-numitele probleme de interpolare (v. cap. VI), din care cauză formula (1) poartă denumirea de formula de interpolare a lui Lagrange, care a dedus-o.

Exemplu. Să se alcătuiască un trinom de gradul al doilea în raport cu x, care să ia pentru $x = 1$ valoarea 5, pentru $x = 2$, valoarea 13 și pentru $x = 5$ valoarea 17.

Punînd în formula (1)

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 5;$$
$$y_0 = 5; \quad y_1 = 13; \quad y_2 = 17$$

și $n = 2$, obținem

$$y = 5 \cdot \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} + 13 \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} +$$
$$+ 17 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = -\frac{5}{3}x^2 + 13x - \frac{19}{3}.$$

§ 29. Să arătăm acum în ce fel putem obține mai multe formule pentru calculul aproximativ al integralelor definite, folosind formula lui Lagrange.

Dacă este dată integrala

$$S = \int_a^b f(x)\,dx,$$

se poate totdeauna face o schimbare de variabilă în așa fel, încît limitele integralei să fie 0 și 1.

În adevăr, să luăm

$$x = a + (b - a)z,$$

în care caz vom avea

$$dx = (b - a)\,dz,$$

și pentru $x = a$ vom avea $z = 0$,
pentru $x = b$ vom avea $z = 1$,
iar integrala propusă ia forma

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\int_0^1 f[a + (b - a)z]\,dz.$$

Se observă ușor că această transformare este echivalentă cu translația originii axelor de coordonate în punctul A și cu presupunerea că baza domeniului este egală cu 1.

Să admitem că baza este împărțită în n porțiuni egale. Dacă punem

$$\frac{b-a}{n} = h,$$

atunci abscisele punctelor de diviziune vor fi

$$x_0 = a;\ x_1 = a + h;\ x_2 = a + 2h;\ \ldots;\ x_{n-1} = a + (n-1)\,h;\ x_n = b,$$

iar valorile corespunzătoare ale lui z:

$$z_0 = 0;\ z_1 = \frac{1}{n};\ z_2 = \frac{2}{n};\ \ldots;\ z_{n-1} = \frac{n-1}{n};\ z_n = 1;$$

ordonatele punctelor corespunzătoare ale curbei date vor fi

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n,$$

adică

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ldots,\ f(x_n).$$

În locul curbei date să luăm curba de ecuație

$$Y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n,$$

care trece prin cele $n+1$ puncte arătate mai sus ale curbei date.

Aplicînd formula lui Lagrange și introducînd în ea în locul variabilei x variabila z, obținem evident

$$\begin{aligned} Y = {} & y_0 \frac{\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\ldots(z-1)}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\ldots(0-1)} + \\ & + y_1 \frac{(z-0)\left(z-\frac{2}{n}\right)\ldots(z-1)}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-1\right)} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + y_n \frac{(z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

În locul ariei mărginită de curba dată $y = f(x)$ luăm aria mărginită de curba Y, care are o valoare apropiată de prima; cu alte cuvinte, presupunem că este satisfăcută egalitatea aproximativă

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 Y\,dz.$$

Substituind în aceasta în locul lui Y expresia corespunzătoare, obținem:

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\left[y_0 \frac{\int_0^1 \left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\dots(z-1)\,dz}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\dots(0-1)} + \right.$$

$$+ y_1 \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z-\frac{2}{n}\right)\dots(z-1)\,dz}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\dots\left(\frac{1}{n}-1\right)} +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$\left. + y_n \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\dots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)dz}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)} \right].$$

Funcțiile care se află sub semnele integralelor sînt polinoame în raport cu z, și deoarece variază numai numărul n, urmează că aceste integrale pot fi calculate o dată pentru totdeauna pentru fiecare n dat.

Punînd

$$C_n^0 = \frac{\int_0^1 \left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\dots(z-1)\,dz}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\dots(0-1)},$$

$$C_n^1 = \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z-\frac{2}{n}\right)\dots(z-1)\,dz}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\dots\left(\frac{1}{n}-1\right)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_n^i = \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\dots\left(z-\frac{i-1}{n}\right)\left(z-\frac{i+1}{n}\right)\dots(z-1)\,dz}{\left(\frac{i}{n}-0\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{n}\right)\dots\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i+1}{n}\right)\dots\left(\frac{i}{n}-1\right)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_n^n = \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\dots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)dz}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)},$$

și dîndu-l pe n, se pot calcula numerele sau coeficienții C_n^0, $C_n^1,\ldots, C_n^n$, iar formula (**) ia forma

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\,[C_n^0 y_0 + C_n^1 y_1 + \ldots + C_n^i y_i + \ldots + C_n^n y_n], \qquad (1)$$

sau altfel

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)[C_n^0 f(x_0) + C_n^1 f(x_1) + \ldots + C_n^n f(x_n)],$$

unde

$$x_0 = a;\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ldots,\ x_n = b \text{ și } h = \frac{b-a}{n}.$$

Această formulă poartă denumirea de formula lui Côtes, care a propus-o la începutul secolului al XVIII-lea pentru calculul ariilor.

Să calculăm acum, pentru exemplificare, coeficienții C_n^i pentru diverse valori ale numărului n, începînd cu cea mai mică.

Să presupunem astfel că $n=1$. Aceasta înseamnă că înlocuim curba printr-o dreaptă. Atunci,

$$C_1^0 = \frac{\int_0^1 (z-1)\,dz}{0-1} = \frac{\left[\frac{z^2}{2}-z\right]_0^1}{-1} = \frac{1}{2}, \qquad C_1^1 = \frac{\int_0^1 z\,dz}{1-0} = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

iar formula (1) devine

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\cdot\frac{y_0+y_1}{2}.$$

Aceasta este formula trapezelor.

Se presupune că $n=2$. Aceasta înseamnă că curba dată este înlocuită printr-o parabolă de gradul al doilea, astfel încît obținem:

$$C_2^0 = \frac{\int_0^1 \left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)\,dz}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)} = \frac{\int_0^1 \left(z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)dz}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{z^3}{3}-\frac{3}{4}z^2+\frac{z}{2}\right]_0^1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

$$C_2^1 = \frac{\int_0^1 (z-0)\,(z-1)\,dz}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{\int_0^1 (z^2-z)\,dz}{-\frac{1}{4}} = \frac{\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right]_0^1}{-\frac{1}{4}} = \frac{4}{6},$$

$$C_2^2 = \frac{\int_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_0^1 \left(z^2-\frac{z}{2}\right)dz}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{4}\right]_0^1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

iar formula (1) devine

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

adică nu este altceva decît formula lui Simpson.

În acelaşi fel pot fi calculaţi coeficienţii $C_n^{(i)}$ pentru $n = 3, 4, 5, \ldots$, astfel încît obţinem următoarea tabelă:

Coeficienţii formulei lui Côtes

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\,[C_n^0 y_0 + C_n^1 y_1 + \ldots + C_n^n y_n]:$$

$n=1;\ C_1^0 = C_1^1 = \frac{1}{2};$

$n=2;\ C_2^0 = C_2^2 = \frac{1}{6};\quad C_2^1 = \frac{4}{6};$

$n=3;\ C_3^0 = C_3^3 = \frac{1}{8};\quad C_3^1 = C_3^2 = \frac{3}{8};$

$n=4;\ C_4^0 = C_4^4 = \frac{7}{90};\quad C_4^1 = C_4^3 = \frac{16}{45};\quad C_4^2 = \frac{2}{15};$

$n=5;\ C_5^0 = C_5^5 = \frac{19}{288};\quad C_5^1 = C_5^4 = \frac{25}{96};\quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{25}{144};$

$n=6;\ C_6^0 = C_6^6 = \frac{41}{840};\quad C_6^1 = C_6^5 = \frac{9}{35};\quad C_6^2 = C_6^4 = \frac{9}{280};\quad C_6^3 = \frac{34}{105};$

$n=7;\ C_7^0 = C_7^7 = \frac{751}{17280};\quad C_7^1 = C_7^6 = \frac{3577}{17280};\quad C_7^2 = C_7^5 = \frac{1323}{17280};\quad C_7^3 = C_7^4 = \frac{2989}{17280};$

$n=8;\ C_8^0 = C_8^8 = \frac{989}{28350};\quad C_8^1 = C_8^7 = \frac{5838}{28350};\quad C_8^2 = C_8^6 = \frac{-928}{28350};\quad C_8^3 = C_8^5 = \frac{10496}{28350};\quad C_8^4 = \frac{-4540}{28350};$

$n=9;\ C_9^0 = C_9^9 = \frac{2857}{89600};\quad C_9^1 = C_9^8 = \frac{15741}{89600};\quad C_9^2 = C_9^7 = \frac{1080}{89600};\quad C_9^3 = C_9^6 = \frac{19344}{89600};\quad C_9^4 = C_9^5 = \frac{5778}{89600};$

$n=10;\ C_{10}^0 = C_{10}^{10} = \frac{16067}{598752};\quad C_{10}^1 = C_{10}^9 = \frac{106300}{598752};\quad C_{10}^2 = C_{10}^8 = \frac{-48525}{598752};$

$$C_{10}^3 = C_{10}^7 = \frac{272400}{598752};\quad C_{10}^4 = C_{10}^6 = \frac{-260550}{598752};\quad C_{10}^5 = \frac{427368}{598752}$$

Formula lui Côtes dă la acelaşi număr de ordonate un rezultat cu atît mai precis, cu cît mărimea $b-a$ este mai mică; din această cauză, se procedează deseori în felul următor: în loc să se ia formula pentru un n mare, se împarte baza ariei $b-a$ în cîteva porţiuni egale, iar la fiecare din ele se aplică formula lui Côtes pentru valori mai mici ale lui n.

Astfel, de exemplu, împărţind baza $b-a$ în k părţi egale şi aplicînd fiecărei porţiuni formula lui Côtes pentru $n=1$, obţinem expresiile de mai jos, unde am notat prin

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_k$$

ordonatele duse prin punctele de diviziune şi prin extremităţile bazei:

Aria porţiunii 1

$$S_1 = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_1\right);$$

Aria porțiunii 2

$$S_2 = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2\right);$$

Aria porțiunii 3

$$S_3 = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3\right);$$

. . . . . .

Aria porțiunii k

$$S_k = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k\right).$$

Adunînd aceste egalități și punînd

$$\frac{b-a}{k} = h,$$

obținem aria mărginită de întreaga curbă:

$$S = h\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k\right),$$

adică regula sus-amintită a trapezelor.

Tot așa, pentru a aplica la fiecare porțiune formula cu $n=2$, trebuie să se împartă mai întîi baza fiecărei porțiuni în două, ducîndu-se în afară de ordonatele sus-amintite și cele medii. Numărul total de ordonate este atunci $2k+1$, adică un număr fără soț, iar intervalul dintre două ordonate vecine ar fi $h = \frac{b-a}{2k}$. Numerotînd ordonatele de la 0 la $2k$, am obține atunci:

Aria porțiunii 1

$$S_1 = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2);$$

Aria porțiunii 2

$$S_2 = \frac{h}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4);$$

. . . . . .

Aria porțiunii k

$$S_k = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

și adunînd aceste egalități vom avea:

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}),$$

adică formula lui Simpson, pe care am obținut-o și înainte.

§ 30. Formula lui Cebîșev. Formula de interpolare a lui Lagrange, dedusă în § 28, dă posibilitatea să se alcătuiască o infinitate de formule aproximative de tipul

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n)], \qquad (1)$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt valori intermediare între a și b.

In adevăr, definind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în mod arbitrar și raționînd în același fel ca și la deducerea formulei lui Côtes, obținem pentru calculul coeficientului C_i următoarea formulă:

$$C_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(x-x_1) \ldots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \ldots (x-x_n)}{(x_i-x_1) \ldots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \ldots (x_i-x_n)} dx. \qquad (I)$$

Acești coeficienți vor fi exprimați, de obicei, prin fracții complicate, iar formula obținută va fi greu de folosit în calcule.

Cebîșev a formulat problema inversă: nu se dau abscisele $x_1, \ldots, x_n$, ci coeficienții C, cerîndu-se să se determine abscisele corespunzătoare.

Coeficienții C se definesc în acest caz astfel, încît formula obținută să fie cît se poate de simplă, ceea ce se va întîmpla evident atunci cînd toți coeficienții sînt egali între ei, adică

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_n.$$

Formula (1) ia în acest caz forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,C_n \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)], \qquad (2)$$

și se cere să se determine atît mărimea C_n, cît și valorile absciselor

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n.$$

Ca și formula lui Côtes, formula (2) reprezintă o egalitate aproximativă, care se transformă într-una precisă numai cînd funcția $f(x)$ este un polinom de un grad ce nu depășește $n-1$. Această ultimă condiție servește pentru determinarea necunoscutelor $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pentru a avea aceste mărimi într-o formă adecvată tuturor cazurilor, vom transforma mai întîi limitele de integrare în -1, respectiv $+1$. Să punem

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z;$$

atunci vom avea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z\right) dz.$$

Prin urmare, substituția de mai sus reduce calculul fiecărei integrale la calculul unei integrale cu limitele $+1$ și -1, adică la o integrală de tipul

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx.$$

Așadar, formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \qquad (*)$$

trebuie să fie exactă pentru orice funcție $f(x)$ de forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}, \qquad (**)$$

însă

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})\,dx =$$

$$= 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right).$$

Suma din membrul al doilea al egalității (*) va fi

$$\begin{aligned} 2C_n \{ & a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + \\ & + a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + \\ & + a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + \ldots + a_{n-1}x_3^{n-1} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1}\} \end{aligned}$$

sau altfel

$$\begin{aligned} 2C_n \{ & na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \\ & + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + a_3(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3) + \\ & + \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})\}, \end{aligned}$$

și deoarece această mărime trebuie să fie egală cu valoarea integralei, adică cu

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right),$$

oricare ar fi funcția $f(x)$ de tipul (**), urmează că pentru toate valorile literelor a_0, a_1, a_2,... trebuie să fie valabilă egalitatea

$$\begin{aligned} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ldots\right) = 2C_n \{ & na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \\ & + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})\}. \end{aligned}$$

De aici rezultă că trebuie să avem

$$nC_n = 1,$$

de unde

$$C_n = \frac{1}{n},$$

și apoi

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,\\ &x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{n}{3},\\ &x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0,\\ &x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = \frac{n}{5},\\ &x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5 = 0,\\ &x_1^6 + x_2^6 + \ldots + x_n^6 = \frac{n}{7},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

și obținem atîtea ecuații de acest fel cîți coeficienți

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n-1},$$

există. Numărul acestor ecuații este egal cu n, adică obținem tocmai atîtea ecuații cîte necunoscute există.

Pentru a rezolva sistemul de ecuații (3) ne vom folosi de faptul că primii membri ai acestei ecuații reprezintă sume de puteri egale ale literelor $x_1, x_2,\ldots, x_n$, adică cele mai simple funcții simetrice ale acestor litere. Se demonstrează în algebră, că sumele de puteri egale ale rădăcinilor unei ecuații de gradul n se exprimă rațional prin coeficienții ei și, invers, din care cauză, folosind sistemul (3) este ușor să alcătuim o ecuație de gradul n. ale cărei rădăcini să fie tocmai

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n.$$

Să presupunem că

$$F(x) = x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

este primul membru al acestei ecuații, adică

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

A afla această funcție înseamnă a găsi coeficienții

$$A_1, A_2, \cdots, A_n.$$

Evident că avem în mod identic

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n},$$

de unde rezultă identitatea

$$F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{F(x)}{x - x_n}. \qquad (***)$$

Însă

$$F'(x) = nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + (n-2)A_2x^{n-3} + \cdots + A_{n-1},$$

iar cîtul

$$\frac{F(x)}{x - x_1} = x^{n-1} + (A_1 + x_1)x^{n-2} + (A_2 + A_1x_1 + x_1^2)x^{n-3} + \cdots +$$
$$+ (A_{n-1} + A_{n-2}x_1 + \cdots + A_1x_1^{n-2} + x_1^{n-1}).$$

În același mod obținem

$$\frac{F(x)}{x-x_2} = x^{n-1} + (A_1 + x_2)\,x^{n-2} + (A_2 + A_1x_2 + x_2^2)\,x^{n-3} + \cdots + \\ + (A_{n-1} + A_{n-2}x_2 + \cdots + A_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1})$$

etc. Notînd cu

$$s_1,\ s_2, s_3, \cdots, s_{n-1}$$

respectiv sumele puterilor 1, 2,..., $n-1$ ale literelor $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, obținem din identitatea (***) următoarea identitate:

$$F'(x) = nx^{n-1} + (n-1)\,A_1x^{n-2} + (n-2)\,A_2x^{n-3} + \cdots + A_{n-1} = \\ = nx^{n-1} + (nA_1 + s_1)x^{n-2} + (nA_2 + A_1s_1 + s_2)\,x^{n-3} + \\ + (nA_3 + A_2s_1 + A_1s_2 + s_3)x^{n-4} + \cdots + \\ + (nA_{n-1} + A_{n-2}s_1 + A_{n-3}s_2 + \cdots + A_1s_{n-2} + s_{n-1}),$$

din care, egalînd coeficienții puterilor egale ale lui x din ambii membri, obținem:

$$\begin{aligned}
(n-1)\,A_1 &= nA_1 + s_1,\\
(n-2)\,A_2 &= nA_2 + A_1s_1 + s_2,\\
(n-3)\,A_3 &= nA_3 + A_2s_1 + A_1s_2 + s_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{n-1} &= nA_{n-1} + A_{n-2}s_1 + A_{n-3}s_2 + \cdots + A_1s_{n-2} + s_{n-1},
\end{aligned}$$

sau altfel

$$\left.\begin{aligned}
A_1 + s_1 &= 0,\\
2A_2 + s_1A_1 + s_2 &= 0,\\
3A_3 + s_1A_2 + s_2A_1 + s_3 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n-1)\,A_{n-1} + s_1A_{n-2} + s_2A_{n-3} + \cdots + s_{n-1} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Deoarece, în virtutea sistemului (3), mărimile $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ sînt cunoscute, urmează că din aceste ecuații — care sînt în număr de $n-1$ — se pot afla mărimile $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$.

Pentru a afla mărimea A_n, observăm că, prin ipoteză,

$$\begin{aligned}
F(x_1) &= x_1^n + A_1x_1^{n-1} + A_2x_1^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x_1 + A_n = 0,\\
F(x_2) &= x_2^n + A_1x_2^{n-1} + A_2x_2^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x_2 + A_n = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F(x_n) &= x_n^n + A_1x_n^{n-1} + A_2x_n^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x_n + A_n = 0;
\end{aligned}$$

adunînd aceste egalități, obținem:

$$s_n + A_1s_{n-1} + A_2s_{n-2} + \cdots + A_{n-1}s_1 + nA_n = 0, \qquad (5)$$

adică o ecuație de același tip ca și celelalte ecuații ale sistemului (4), pe care o adăugăm la acestea din urmă.

Substituind în locul mărimilor $s_1, s_2, \cdots, s_n$ expresiile lor din sistemul (3), se observă că sistemul (4) ia forma

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ 2A_2 + \frac{n}{3} &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ 4A_4 + \frac{n}{3}A_2 + \frac{n}{5} &= 0, \\ A_5 &= 0, \\ 6A_6 + \frac{n}{3}A_4 + \frac{n}{5}A_2 + \frac{n}{7} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\

Pentru $n = 2$, sistemul (6) va fi:

$$A_1 = 0,$$
$$A_2 + \frac{1}{3} = 0,$$

de unde

$$A_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ecuația $F(x) = 0$ va avea forma

$$x^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

de unde

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}577350,$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{3} = +0{,}577350,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}.$$

Pentru $n = 3$, sistemul (6) va fi

$$A_1 = 0,$$
$$2A_2 + 1 = 0,$$
$$A_3 = 0,$$

iar ecuația $F(x) = 0$ va avea forma

$$x^3 - \frac{1}{2}x = 0.$$

Rădăcinile ei sînt:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707107,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = +\frac{\sqrt{2}}{2} = +0{,}707107,$$

$$C_3 = \frac{1}{3}.$$

Pentru $n = 4$, avem:

$$A_1 = 0, \quad A_3 = 0,$$
$$2A_2 + \frac{4}{3} = 0,$$
$$4A_4 + \frac{4}{3}A_2 + \frac{4}{5} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$A_2 = -\frac{2}{3}; \quad A_4 = \frac{1}{45}.$$

Ecuația $F(x) = 0$ va fi de forma

$$x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

iar rădăcinile ei

$$x_1 = -0{,}794654,$$
$$x_2 = -0{,}187592,$$
$$x_3 = +0{,}187592,$$
$$x_4 = +0{,}794654,$$
$$C_4 = \frac{1}{4}.$$

Continuînd în același fel, obținem pentru

$$n = 5 \ldots F(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x = 0;$$

$$n = 6 \ldots F(x) = x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105} = 0;$$

$$n = 7 \ldots F(x) = x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{1480}x = 0;$$

$$n = 9 \ldots F(x) = x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x = 0.$$

Ecuația pentru $n = 8$ are rădăcini complexe, din care cauză nu o indicăm.

Cu ajutorul acestor ecuații, s-a alcătuit următoarea tabelă a valorilor absciselor pentru diferite valori ale numărului de ordonate din formula lui Cebîșev:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x)].$$

Numărul ordonatelor n	Valoarea absciselor x
2	$x_1 = -x_2 = 0{,}577350$
3	$x_1 = -x_3 = 0{,}707107$
	$x_2 = 0$
4	$x_1 = -x_4 = 0{,}794654$
	$x_2 = -x_3 = 0{,}187592$
5	$x_1 = -x_5 = 0{,}832498$
	$x_2 = -x_4 = 0{,}374541$
	$x_3 = 0$
6	$x_1 = -x_6 = 0{,}866247$
	$x_2 = -x_5 = 0{,}422519$
	$x_3 = -x_4 = 0{,}266635$

7 . . . . . $x_1 = -x_7 = 0{,}883862$
$x_2 = -x_6 = 0{,}529657$
$x_3 = -x_5 = 0{,}323912$
$x_4 = 0$

9 . . . . . $x_1 = -x_9 = 0{,}911589$
$x_2 = -x_8 = 0{,}601019$
$x_3 = -x_7 = 0{,}528762$
$x_4 = -x_6 = 0{,}167906$
$x_5 = 0$

În cazul cînd integrala dată are limitele a și b, formula lui Cebîșev ia forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\,[f(X_1) + f(X_2) + \cdots + f(X_n)],$$

unde

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,x_i,$$

iar x_i are valoarea indicată în tabelă.

§ 31. Formula lui Gauss. Formula generală

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \cdots + C_n f(x_n)] \qquad (1)$$

pentru calculul aproximativ al unei integrale, conține $2n$ mărimi arbitrare: $C_1, C_2, \cdots, C_n$ și $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Gauss a propus ca aceste mărimi să fie alese astfel, încît pentru un număr n dat de ordonate, formula să fie cît mai precisă; aceasta se va obține atunci, cînd valorile coeficienților $C_1, C_2, \cdots, C_n$ și ale absciselor $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vor fi determinate astfel încît formula (1) să fie valabilă (și nu numai aproximativ) pentru orice polinom $f(x)$ în raport cu x, de grad cel mult $2n-1$, adică pentru orice funcție de forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n-1}\,x^{2n-1},$$

în timp ce formulele lui Côtes și Cebîșev sînt exacte, la același număr de ordonate, numai pentru polinoamele al căror grad nu depășește $n-1$.

Pentru a deduce formula lui Gauss, vom presupune că limitele de integrare sînt -1 și $+1$. Vom începe prin calculul absciselor $x_1, x_2, \cdots, x_n$, iar după ce acestea vor fi calculate, vom putea afla valorile corespunzătoare ale coeficienților după formula (I), § 30.

Să presupunem că funcția

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}\,x + A_n$$

are rădăcinile

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

astfel încît

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Dacă reușim să determinăm funcția $F(x)$, adică coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_n$, aflarea valorilor absciselor

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

se reduce la rezolvarea ecuației

$$F(x) = 0.$$

Oricare ar fi funcția

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1},$$

pentru care trebuie să fie valabilă exact formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \cdots + C_n f(x_n), \qquad (*)$$

se poate totdeauna scrie identitatea

$$f(x) = F(x)\, Q(x) + R(x),$$

împărțind polinomul $f(x)$, al cărui grad este $2n-1$, la $F(x)$, al cărui grad este n și notînd cu $Q(x)$ cîtul, iar prin $R(x)$ restul împărțirii. Aici gradele polinoamelor $Q(x)$ și $R(x)$ nu sînt mai mari de $n-1$.

Atunci evident,

$$f(x_1) = R(x_1),\ f(x_2) = R(x_2), \ldots, f(x_n) = R(x_n),$$

deoarece pentru

$$x = x_1,\ x = x_2, \ldots,\ x = x_n$$

funcția $F(x)$ se anulează, iar formula (*) ia forma

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} F(x)Q(x)\,dx + \int_{-1}^{+1} R(x)\,dx =$$
$$= C_1 R(x_1) + C_2 R(x_2) + \cdots + C_n R(x_n).$$

Pe de altă parte, deoarece funcția $R(x)$ este un polinom de gradul $n-1$, adică mai mic decît $2n-1$, urmează că aceeași formulă va fi valabilă exact și pentru funcția $R(x)$, ceea ce înseamnă că vom avea

$$\int_{-1}^{+1} R(x)\,dx = C_1 R(x_1) + C_2 R(x_2) + \cdots + C_n R(x_n).$$

Scăzînd această egalitate din cea precedentă, obținem:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\, Q(x)\, dx = 0. \qquad (I)$$

Funcția $F(x)$ este complet determinată prin această egalitate. În adevăr, deoarece $f(x)$ este un polinom oarecare de gradul $2n-1$, urmează că și $Q(x)$ este un polinom arbitrar de gradul $n-1$, adică de forma

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

Egalitatea (I) trebuie să aibă însă loc, oricare ar fi mărimile

$$b_0, b_1, \cdots, b_{n-2}, b_{n-1}.$$

Prin urmare, trebuie să avem de fiecare dată

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} x^{n-1}F(x)\,dx = 0,\\
&\int_{-1}^{+1} x^{n-2}F(x)\,dx = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\int_{-1}^{+1} xF(x)\,dx = 0,\\
&\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (I')$$

Substituind în locul lui $F(x)$ expresia ei şi efectuînd integrarea, obţinem din ecuaţiile de mai sus următorul sistem de n ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A_1}{2n-1}+\frac{A_3}{2n-3}+\frac{A_5}{2n-5}+\cdots = 0,\\
&\frac{1}{2n-1}+\frac{A_2}{2n-3}+\frac{A_4}{2n-5}+\cdots = 0,\\
&\frac{A_1}{2n-3}+\frac{A_3}{2n-5}+\frac{A_5}{2n-7}+\cdots = 0,\\
&\frac{1}{2n-3}+\frac{A_2}{2n-5}+\frac{A_4}{2n-7}+\cdots = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

pentru determinarea coeficienţilor

$$A_1, A_2, \cdots, A_n.$$

Se observă uşor din aceste ecuaţii, că

$$A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$$

şi, prin urmare, dacă n este un număr par, $n = 2k$, forma funcţiei $F(x)$ este următoarea:

$$x^{2k} + A_2x^{2k-2} + A_4x^{2k-4}\cdots + A_{2k},$$

de unde rezultă că rădăcinile ecuaţiei $F(x) = 0$ sînt egale două cîte două în valoare absolută şi opuse ca semn. Dacă $n = 2k + 1$, adică un număr impar, funcţia $F(x)$ are forma

$$x^{2k+1} + A_2x^{2k-1} + A_4x^{2k-3} + \cdots + A_{2k}x,$$

din care rezultă că una din rădăcinile ei este $x = 0$, iar celelalte rădăcini sînt egale două cîte două în valoare absolută şi opuse ca semn.

Determinînd din ecuaţiile (II) coeficienţii A, alcătuim polinomul $F(x)$, egalînd cu zero şi, calculînd rădăcinile ecuaţiei obţinute, găsim mărimile

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

cu ajutorul cărora calculăm apoi coeficienţii C, folosindu-ne de formula (I), § 30.

Să luăm de exemplu $n = 2$; polinomul $F(x)$ este atunci determinat de condiţiile

$$\int_{-1}^{+1} xF(x)\,dx = 0$$

şi

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 0,$$

unde $F(x) = x^2 + A_1x + A_2$.

Sistemul de ecuaţii (II) va fi

$$\frac{A_1}{3} = 0, \quad \frac{1}{3} + A_2 = 0,$$

adică

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

de unde

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}577\ldots; \quad x_2 = +\frac{\sqrt{3}}{3} = +0{,}577\ldots$$

Coeficientul C_1 se determină după formula

$$C_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right]_{-1}^{+1} = 1$$

şi în acelaşi fel găsim $C_2 = 1$.

Jacobi a arătat că din condiţiile (I) poate fi alcătuită forma generală a funcţiei $F(x)$, fără a trebui să se rezolve sistemul de ecuaţii (II), care determină coeficienţii A. În adevăr, funcţia $F(x)$ este

$$F(x) = K\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

unde constanta K poate avea orice valoare. Această valoare se alege de obicei astfel, încît pentru $x = 1$, funcţia $F(x)$ să fie egală cu 1.

Atunci

$$K = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot 2^n}.$$

Pentru a ne convinge de faptul că funcția $F(x)$ de această formă satisface condițiile noastre, este suficient să se arate că integrala

$$\int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx$$

se anulează pentru fiecare valoare întreagă a lui k, mai mică decît n.

Integrînd prin părți, obținem:

$$S_k = \int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx = \left[x^k \cdot \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^{+1} - k \int_{-1}^{+1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx.$$

Se observă însă ușor că derivata de ordinul $n-1$ a lui $(x^2-1)^n$ conține factorul x^2-1, ceea ce înseamnă că la ambele limite integrala se anulează, astfel încît

$$S_k = -k \int_{-1}^{+1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx.$$

În același fel găsim că

$$\int_{-1}^{+1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx =$$

$$= \left[x^{k-2} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}} \right]_{-1}^{+1} - (k-1) \int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-2}(x-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx =$$

$$= -(k-1) \int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx = -(k-2) \int_{-1}^{+1} x^{k-3} \frac{d^{n-3}(x^2-1)^n}{dx^{n-3}}\, dx,$$

. . . . . .

$$\int_{-1}^{+1} x^{k-(k-1)} \frac{d^{n-(k-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-(k-1)}}\, dx = -1 \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx,$$

presupunînd că $k < n$.

Înmulțind aceste egalități, obținem:

$$S_k = (-1)^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k}(x-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx,$$

însă integrala

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx = \left[\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}} \right]_{-1}^{+1} = 0,$$

de unde rezultă că $S_k = 0$ și, prin urmare, funcția

$$F(x) = \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

satisface condițiile (I), este cea căutată.

Se poate arăta că orice altă funcție care satisface aceste condiții se deosebește de cea de mai sus numai printr-un factor constant, pentru care am luat, după cum s-a arătat mai sus:

$$K = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot 2^n}.$$

Se poate lua însă oricare alt factor, de exemplu

$$K = \frac{1}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}.$$

În acest caz, coeficientul lui x^n va fi egal cu 1.

Astfel, de exemplu, pentru $n = 2$, vom avea

$$F(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}[x^4 - 2x^2 + 1]'' =$$

$$= \frac{1}{8}(12x^2 - 4) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

adică $F(x)$ se deosebește numai prin factorul $\frac{3}{2}$ de funcția $x^2 - \frac{1}{3}$, pe care am aflat-o mai înainte.

În locul formulei generale din § 30 se poate găsi, pentru calculul coeficienților C_k, o altă formulă mai simplă, aplicînd formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n)$$

la funcții de o formă specială, alese astfel încît în membrul al doilea al acestei formule să nu rămînă decît un singur termen; astfel, de exemplu, se poate lua

$$f(x) = 2F_k(x)\,F_k'(x),$$

unde

$$F_k(x) = \frac{F(x)}{x - x_k} = K(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n),$$

al cărei grad este $2n-3$, din care cauză formula este verificată exact.

Însă

$$\int_{-1}^{+1} 2F_k(x)\,F_k'(x)\,dx = [\{F_k(x)\}^2]_{-1}^{+1} = \frac{\{F(1)\}^2}{(1 - x_k)^2} - \frac{\{F(-1)\}^2}{(1 + x_k)^2} =$$

$$= \frac{4x_k}{(1 - x_k^2)^2} F^2(1) = \frac{4x_k}{(1 - x_k^2)^2},$$

deoarece avem în mod evident

$$\{F(-1)\}^2 = \{F(1)\}^2 = 1.$$

Pe de altă parte, avem după formula (*)

$$\int_{-1}^{+1} 2F_k(x)F_k'(x)\,dx = 2C_k\,F_k\,(x_k)\,F_k'\,(x_k), \qquad (**)$$

deoarece toți ceilalți termeni se anulează. Însă,

$$(x - x_k)\,F_k(x) = F\,(x);$$

derivînd de două ori această egalitate și punînd apoi $x = x_k$, obținem:

$$F_k\,(x_k) = F'\,(x_k)$$

și

$$2F_k'\,(x_k) = F''\,(x_k).$$

Substituind aceste valori în formula (**) și egalînd rezultatul obținut cu valoarea integralei, aflăm

$$C_k = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}\cdot\frac{1}{F'\,(x_k)\cdot F''\,(x_k)}.$$

Funcția $F(x)$ satisface următoarea ecuație diferențială

$$(x^2-1)\,F''\,(x) + 2xF'\,(x) - n\,(n+1)\,F\,(x) = 0^{1)}.$$

Făcînd aici $x = x_k$ și observînd că $F\,(x_k) = 0$, găsim:

$$(x_k^2-1)\,F''(x_k) + 2x_kF'(x_k) = 0,$$

de unde rezultă

$$F''\,(x_k) = \frac{2x_k\,F'\,(x_k)}{1-x_k^2};$$

substituind, vom obține

$$C_k = \frac{2}{(1-x_k^2)\,[F'(x_k)]^2}.$$

Același rezultat poate fi găsit și altfel, luînd în locul lui $F\,(x)$ funcția $[F_k(x)]^2$, unde

$$F_k\,(x) = \frac{F(x)}{x-x_k}$$

și, formînd integrala

$$S = \int_{-1}^{+1} [F_k\,(x)]^2\,dx = \int_{-1}^{+1} [F\,(x)]^2\,\frac{dx}{(x-x_k)^2},$$

o calculăm în două feluri, și anume:

1) polinomul de sub semnul integral fiind de gradul $2n-2$, urmează, după formula lui Gauss:

$$S = \int_{-1}^{+1} [F_k(x)]^2\,dx = C_k\,[F_k\,(x_k)]^2,$$

---

1) Propunem cititorului, ca o problemă, să verifice acest lucru.

deoarece toţi ceilalţi termeni se anulează; este însă evident că

$$F_k(x_k) = F'(x_k),$$

astfel încît

$$S = C_k \cdot [F'(x_k)]^2; \tag{1}$$

2) pe de altă parte, integrînd prin părţi obţinem:

$$S = \int_{-1}^{+1} [F(x)]^2 \frac{dx}{(x-x_k)^2} = \left[-\frac{1}{x-x_k} F^2(x) \right]_{-1}^{+1} + 2 \int_{-1}^{+1} F(x) F'(x) \frac{dx}{x-x_k} =$$

$$= \frac{-2}{1-x_k^2} + 2 \int_{-1}^{+1} F(x) F'(x) \frac{dx}{x-x_k}.$$

Observînd, însă, că

$$\frac{F(x)}{(x-x_k)} = F_k(x),$$

adică, în ultima integrală, funcţia care se integrează este un polinom de gradul $2n-2$, şi că formula lui Gauss este aplicabilă şi dă un rezultat exact, vom avea

$$\int_{-1}^{+1} F(x) F'(x) \frac{dx}{x-x_k} = \int_{-1}^{+1} F_k(x) F'(x)\, dx = C_k [F'(x_k)]^2;$$

substituind şi comparînd cu formula (1), obţinem pentru determinarea lui C_k ecuaţia

$$C_k [F'(x_k)]^2 = \frac{-2}{1-x_k^2} + 2C_k [F'(x_k)]^2,$$

de unde rezultă

$$C_k = \frac{2}{(1-x_k^2) \cdot [F'(x_k)]^2},$$

adică aceeaşi formulă pe care am obţinut-o mai sus.

La calculul de mai sus al absciselor şi al coeficienţilor formulelor lui Gauss, s-a presupus că limitele de integrare sînt -1 şi $+1$. De aici este uşor să se treacă la cazul general, cînd limitele sînt oarecare, de exemplu a şi b.

În acest caz, formula lui Gauss se scrie sub forma:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \{A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \ldots + A_n f(X_n)\},$$

unde

$$X_i = a + (b-a) \cdot x_i.$$

Abscisele şi coeficienţii sînt daţi în următoarea tabelă pentru limitele de integrare

$$a = 0,\ b = 1$$

pentru care formula lui Gauss este

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n).$$

Abscisele şi coeficienţii formulei lui Gauss

$n = 1$: $x_1 = 0{,}5$, $A_1 = 1$,

$n = 2$: $x_1 = 0{,}21132487$, $A_1 = \frac{1}{2}$, $\lg A_1 = \bar{1},6989700$,

$x_2 = 0{,}78867513$, $A_2 = \frac{1}{2}$,

$n = 3$: $x_1 = 0{,}11270167$, $A_1 = \frac{5}{18}$, $\lg A_1 = \bar{1},4436975$,

$x_2 = 0{,}5$ $A_2 = \frac{4}{9}$, $\lg A_2 = \bar{1},6478175$.

$x_3 = 0{,}88729833$, $A_3 = \frac{5}{18}$,

$n = 4$: $x_1 = 0{,}06943184$	$A_1 = A_4 = 0{,}17392742$	$\lg A_1 = \bar{1},2403681$
$x_2 = 0{,}33000948$	$A_2 = A_3 = 0{,}32607258$	$\lg A_2 = \bar{1},5133143$
$x_3 = 0{,}66999052$		
$x_4 = 0{,}93056816$		
$n = 5$: $x_1 = 0{,}04691008$	$A_1 = A_5 = 0{,}11846344$	$\lg A_1 = \bar{1},0735843$
$x_2 = 0{,}23076534$	$A_2 = A_4 = 0{,}23931433$	$\lg A_2 = \bar{1},3789687$
$x_3 = 0{,}5$	$A_3 = 0{,}28444444 = \frac{64}{225}$	$\lg A_3 = \bar{1},4539975$
$x_4 = 0{,}76923466$		
$x_5 = 0{,}95308992$		
$n = 6$: $x_1 = 0{,}03376524$	$A_1 = A_6 = 0{,}08566225$	$\lg A_1 = \bar{2},9327895$
$x_2 = 0{,}16939531$	$A_2 = A_5 = 0{,}18038079$	$\lg A_2 = \bar{1},2561903$
$x_3 = 0{,}38069041$	$A_3 = A_4 = 0{,}23395697$	$\lg A_3 = \bar{1},3691360$
$x_4 = 0{,}61930959$		
$x_5 = 0{,}83060469$		
$x_6 = 0{,}96623476$		

$n = 7$: $x_1 = 0{,}02544604$ $A_1 = A_7 = 0{,}06474248$ $\lg A_1 = \bar{2}{,}8111894$
$x_2 = 0{,}12923441$ $A_2 = A_6 = 0{,}13985269$ $\lg A_2 = \bar{1}{,}1456708$
$x_3 = 0{,}29707742$ $A_3 = A_5 = 0{,}190915025$ $\lg A_3 = \bar{1}{,}2808401$
$x_4 = 0{,}5$ $A_4 = 0{,}20897959$ $\lg A_4 = \bar{1}{,}3201039$
$x_5 = 0{,}70292258$
$x_6 = 0{,}87076559$
$x_7 = 0{,}97455396$

$n = 8$: $x_1 = 0{,}01985507$ $A_1 = A_8 = 0{,}05061427$ $\lg A_1 = \bar{2}{,}7042730$
$x_2 = 0{,}10166676$ $A_2 = A_7 = 0{,}11119052$ $\lg A_2 = \bar{1}{,}0460677$
$x_3 = 0{,}23723379$ $A_3 = A_6 = 0{,}15685332$ $\lg A_3 = \bar{1}{,}1954937$
$x_4 = 0{,}40828268$ $A_4 = A_5 = 0{,}18134189$ $\lg A_4 = \bar{1}{,}2584981$
$x_5 = 0{,}59171732$
$x_6 = 0{,}76276621$
$x_7 = 0{,}89833324$
$x_8 = 0{,}98014493$

La același număr de ordonate, formula lui Gauss dă o precizie mai mare decît celelalte formule, dar necesită în schimb calcule cu mult mai complicate. De aceea, este mai avantajos ca această formulă să fie folosită numai în cazul cînd calculul ordonatelor este dificil; dacă ordonatele se pot obține ușor din grafic, este mai simplu să se ia un număr mai mare de ordonate, decît să se înmulțească acestea cu factori complicați. Dacă se cunosc mai multe ordonate este mai avantajos să se utilizeze o altă formulă, de exemplu, cea a lui Cebîșev, a trapezelor sau a lui Simpson.

§ 32. Să dăm acum cîteva exemple, pentru a arăta cum se aplică formulele precedente. Să presupunem că trebuie să se determine integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1;$$

să calculăm această integrală prin diversele formule de aproximație.

1. *Formula trapezelor.* Să luăm $n = 10$; mărimea intervalului h va fi atunci

$$h = \frac{1}{10} \cdot \frac{\pi}{2} = 0{,}1570796\ldots = 9°.$$

Valorile argumentelor x vor fi

$$0°,\ 9°,\ 18°,\ 27°,\ldots,\ 81°,\ 90°$$

și, prin urmare,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0{,}157\ldots\left[\frac{1}{2}\sin 0° + \sin 9° + \ldots + \sin 81° + \frac{1}{2}\sin 90°\right].$$

Avem astfel:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{2}\sin 0° = 0{,}00000 & \sin 54° = 0{,}80902 \\ \sin 9° = 0{,}15643 & \sin 63° = 0{,}89101 \\ \sin 18° = 0{,}30902 & \sin 72° = 0{,}95106 \\ \sin 27° = 0{,}45399 & \sin 81° = 0{,}98769 \\ \sin 36° = 0{,}58779 & \frac{1}{2}\sin 90° = 0{,}50000 \\ \sin 45° = 0{,}70711 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 2{,}21434 & 4{,}13878 \\ \underline{4{,}13878} & \\ \Sigma = 6{,}35312 & \\ \lg \Sigma = 0{,}8029871 & \\ \underline{\lg h = \bar{1}{,}1961198} & \\ \lg S = \bar{1}{,}9991069 & S = 0{,}997946. \end{array}$$

2. *Regula lui Simpson*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2}{3}\cdot 0{,}157\ldots$$

$$\ldots\left[\frac{1}{2}\sin 0° + 2\sin 9° + \sin 18° + 2\sin 27° + \ldots + 2\sin 81° + \frac{1}{2}\sin 90°\right].$$

Vom avea, aşadar:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{2}\sin 0° = 0{,}00000 & \sin 9^0 = 0{,}15643 \\ \sin 18° = 0{,}30902 & \sin 27° = 0{,}45399 \\ \sin 36° = 0{,}58779 & \sin 45° = 0{,}70711 \\ \sin 54° = 0{,}80902 & \sin 63° = 0{,}89101 \\ \sin 72° = 0{,}95106 & \sin 81° = 0{,}98769 \\ \frac{1}{2}\sin 90° = 0{,}50000 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 3{,}15689 & 3{,}19623 \\ \underline{6{,}39246} & \\ \Sigma = 9{,}54935 & \\ \frac{2}{3}\Sigma = 6{,}36623 & \lg \frac{2}{3}\Sigma = 0{,}8038823 \\ & \underline{\lg h = \bar{1}{,}1961198} \\ & \lg \frac{2}{3}h\Sigma = 0{,}0000021 \end{array}$$

$$S = \frac{2}{3}h\Sigma = 1{,}00000.$$

Se înțelege de la sine că nu ne putem bizui pe ultima cifră, deoarece ordonatele sînt calculate cu cinci zecimale.

3. *Regula lui Cebîșev.* Să calculăm aceeași integrală, folosind regula lui Cebîșev și luînd, de exemplu, cinci ordonate.

Vom avea atunci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{4}\,[\sin X_1 + \sin X_2 + \sin X_3 + \sin X_4 + \sin X_5].$$

Argumentele $X_1,\ldots, X_5$ se determină după formulele

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,x_i,$$

știind că avem în tabelă:

$$x_1 = -x_5 = 0{,}832498,$$
$$x_2 = -x_4 = 0{,}374541,$$
$$x_3 = 0{,}000000,$$

și că

$$a = 0, \qquad b = \frac{\pi}{2} = 90°,$$

astfel încît

$$\frac{a+b}{2} = 45°, \qquad \frac{b-a}{2} = 45°.$$

Rezltă deci:

$$X_1 = 45° + 45°\cdot 0{,}832498 = 82°27',74, \qquad \sin X_1 = 0{,}99136$$
$$X_2 = 45° + 45°\cdot 0{,}374541 = 61°51',26, \qquad \sin X_2 = 0{,}88176$$
$$X_3 = 45° + 45°\cdot 0{,}000000 = 45°00, \qquad \sin X_3 = 0{,}70711$$
$$X_4 = 45° - 45°\cdot 0{,}374541 = 28°08',74, \qquad \sin X_4 = 0{,}47171$$
$$X_5 = 45° - 45°\cdot 0{,}832498 = 7°32',26. \qquad \sin X_5 = 0{,}13117$$
$$\Sigma = 3{,}18311$$

$$\lg \Sigma = 0{,}5028517$$
$$\lg \frac{\pi}{10} = \bar{1}{,}4971499$$
$$\lg S = \lg \frac{\pi}{10}\,\Sigma = 0{,}0000016$$
$$S = 1{,}000004.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1{,}000004.$$

4. *Formula lui Gauss.* Să aplicăm la calculul aceleiași integrale formula lui Gauss, luînd de asemenea cinci ordonate. Vom avea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\,[A_1 \sin X_1 + A_2 \sin X_2 + A_3 \sin X_3 + A_4 \sin X_4 + A_5 \sin X_5],$$

valorile absciselor X_i fiind date de formula

$$X_i = a + (b - a)\, x_i,$$

unde valorile lui x_i și A_i sînt date la p. 91 pentru $n=5$.

În cazul nostru avem

$$a = 0;$$

$$b = \frac{\pi}{2};$$

$$b - a = \frac{\pi}{2} = 90°,$$

astfel încît:

$$\begin{aligned} X_1 &= 90° \cdot 0{,}04691008 = \ 4°13'18'',87, \\ X_2 &= 90° \cdot 0{,}23076534 = 20°46'\ 7'',96, \\ X_3 &= 90° \cdot 0{,}5 \qquad\quad = 45°\ 0'\ 0'', \\ X_4 &= 90° \cdot 0{,}76923466 = 69°13'52'',03, \\ X_5 &= 90° \cdot 0{,}95308992 = 85°46'41'',13, \end{aligned}$$

Tabela 5

X_i	$\lg \sin X_i$	$\lg A_i$	$\lg A_i \sin X_i$	$A_i \sin X_i$
4°13′18″,87	$\bar{2}$,8669931	$\bar{1}$,0735813	$\bar{3}$,9405774	0,00872122
20°46′7″,97	$\bar{1}$,5497377	$\bar{1}$,3789687	$\bar{2}$,9287064	0,08486067
45°0′0″	$\bar{1}$,8494850	$\bar{1}$,4539975	$\bar{1}$,3034825	0,20113260
69°13′52″,03	$\bar{1}$,9708201	$\bar{1}$,3789587	$\bar{1}$,3497888	0,22376325
85°46′41″,13	$\bar{1}$,9988199	$\bar{1}$,0735843	$\bar{1}$,0724042	0,11814196
				0,63661970

$$\lg 0{,}63661970 = \bar{1}{,}8038801.$$

$$\lg \frac{\pi}{2} = 0{,}1961199$$

$$\lg \frac{\pi}{2}\Sigma = 0{,}0000000$$

$$\frac{\pi}{2}\Sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1{,}0000000.$$

Pentru calculul integralelor ce conțin funcții trigonometrice, cu ajutorul formulelor lui Cebîșev și Gauss, este avantajos să se folosească tabele în care unghiurile se dau cu noile grade centesimale. Aceste tabele sînt editate de către Depôd de la Guerre, cu cinci și opt zecimale.

Avantajul constă aci în faptul că calculul absciselor se face cu mult mai simplu decît la diviziunea în grade și nu necesită transformarea în minute și secunde a fracțiunilor zecimale de grade.

Scanned with OKEN Scanner

Drept exemplu, vom calcula integrala

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

știind că $\lg k^2 = \bar{1},78734$. Această integrală reprezintă lungimea unui sfert dintr-o elipsă, a cărei semiaxă mare este 1,00000, iar cea mică 0,62222.

Pentru calcul, ne vom folosi de formulele lui Gauss, cu cinci ordonate. Aranjăm calculul în felul următor:

Tabela 6

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Arg. φ în noua împărțire	$\lg \frac{1}{\sin\varphi}$	2 · (II)	(III)+$\lg \frac{1}{k^2}$ ($\lg \frac{1}{k^2} = 0,21266$)	$\lg(1-k^2\sin^2\varphi)$ din tabelele de diferențe	$\frac{1}{2}$ · (V)	$\lg A$	(VI) + (VII)	$A\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$
4,6910	1,13301	2,26602	2,47868	$\bar{1}$,99856	$\bar{1}$,99928	$\bar{1}$,07358	$\bar{1}$,07286	0,11827
23,0765	0,45026	0,90052	1,11318	$\bar{1}$,96517	$\bar{1}$,98259	$\bar{1}$,37897	$\bar{1}$,36155	0,22990
50,000	0,150515	0,30103	0,51369	$\bar{1}$,84109	$\bar{1}$,92054	$\bar{1}$,45400	$\bar{1}$,37454	0,23689
76,9235	0,02918	0,05836	0,27102	$\bar{1}$,66673	$\bar{1}$,83337	$\bar{1}$,37897	$\bar{1}$,21234	0,16306
95,3090	0,00118	0,00236	0,21502	$\bar{1}$,59161	$\bar{1}$,79580	$\bar{1}$,07358	$\bar{2}$,86938	0,07402
								$\Sigma = 0,82214$

$$\lg \Sigma = \bar{1},91494$$
$$\lg \frac{\pi}{2} = 0,19612$$
$$\lg S = 0,11106$$
$$S = 1,2913.$$

Pentru a verifica valoarea obținută, ne putem folosi de tabele care dau lungimile sferturilor de elipsă (de exemplu, Schlömilch, „Fünfstellige Logarithmentafeln“, p. 151), în funcție de raportul $\frac{\text{semiaxa mică}}{\text{semiaxa mare}} = \frac{b}{a}$, din care găsim:

$$\frac{b}{a} = 0,62, \quad S = 1,28991,$$
683
$$\frac{b}{a} = 0,63, \quad S = 1,29674,$$
$$\frac{b}{a} = 0,64, \quad S = 1,30362.$$ 688

De aici rezultă că pentru

$\frac{b}{a} = 0{,}62222$ vom avea $S = 1{,}28991 + \frac{2}{9} \cdot 0{,}00683 = 1{,}29143.$

Să mai dăm cîteva exemple de calcul al integralelor după formulele de aproximaţie de mai sus.

Să luăm integrala

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}69314718,$$

indicată în lucrarea lui Bertrand „Traité de calcul différentiel et intégral" (vol. II).

Luînd ordonate echidistante şi $n = 10$, şi notînd $\frac{1}{1+x}$ cu $\varphi(x)$, obţinem:

$$\varphi(0) = 1{,}00000, \quad \varphi\left(\frac{6}{10}\right) = 0{,}62500,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{10}\right) = 0{,}90909, \quad \varphi\left(\frac{7}{10}\right) = 0{,}58824,$$

$$\varphi\left(\frac{2}{10}\right) = 0{,}83333, \quad \varphi\left(\frac{8}{10}\right) = 0{,}55556,$$

$$\varphi\left(\frac{3}{10}\right) = 0{,}76923, \quad \varphi\left(\frac{9}{10}\right) = 0{,}52632,$$

$$\varphi\left(\frac{4}{10}\right) = 0{,}71429, \quad \varphi(1) = 0{,}50000.$$

$$\varphi\left(\frac{5}{10}\right) = 0{,}66667.$$

Aplicînd formula trapezelor, adică punînd

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{10}\left|\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{10}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{9}{10}\right) + \frac{1}{2}\varphi(1)\right|,$$

găsim:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0{,}69377.$$

Dacă luăm formula lui Côtes pentru $n = 10$, adică punînd

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = A_0\varphi(0) + A_1\varphi\left(\frac{1}{10}\right) + \cdots + A_{10}\varphi(1),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde avem, potrivit tabelei (p. 74),

$$A_0 = A_{10} = \frac{16\,067}{598\,752}, \quad A_1 = A_9 = \frac{106\,300}{598\,752},$$

$$A_2 = A_8 = -\frac{48\,525}{598\,752}, \quad A_3 = A_7 = \frac{272\,400}{598\,752},$$

$$A_4 = A_6 = -\frac{260\,550}{598\,752}, \quad A_5 = \frac{427\,368}{598\,752},$$

obținem

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{,}69314733.$$

Să folosim pentru calculul aceleiași integrale formula lui Cebîșev, luînd șapte ordonate.

Să punem mai întîi $x = \frac{1+z}{2}$; noile limite de integrare fiind -1 și $+1$, obținem:

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{3+z};$$

notînd $\frac{1}{3+z} = \psi(z)$, vom găsi, după formula lui Cebîșev pentru șapte ordonate:

$$\int_{-1}^{+1} \psi(z)\,dz = \frac{2}{7}[\psi(z_1) + \psi(z_2) + \cdots + \psi(z_7)],$$

Tabela (p. 82) dă următoarele valori:

$$z_1 = -z_7 = 0{,}883862,$$
$$z_2 = -z_6 = 0{,}529657,$$
$$z_3 = -z_5 = 0{,}323912,$$
$$z_4 = 0{,}000000;$$

obținem deci

$$\psi(z_1) = 0{,}4725587$$
$$\psi(z_2) = 0{,}4048019$$
$$\psi(z_3) = 0{,}3736798$$
$$\psi(z_4) = 0{,}3333333$$
$$\psi(z_5) = 0{,}3008503$$
$$\psi(z_6) = 0{,}2833137$$
$$\psi(z_7) = 0{,}2574757$$
$$\Sigma = 3{,}4260134$$
$$\frac{2}{7}\cdot\Sigma = 0{,}6931467.$$

Scanned with OKEN Scanner

După cum am văzut, valoarea exactă este

$$S = 0{,}69314718.$$

Formula lui Gauss, pentru cinci ordonate, ne dă în același caz valorile din tabela 7.

Tabela 7

$1+x$	$\lg\frac{1}{1+x}$	$\lg A$	$\lg A\cdot\frac{1}{1+x}$	$A\cdot\frac{1}{1+x}$
1,04691008	$\bar{1}$,98009062	$\bar{1}$,07358435	$\bar{1}$,05367497	0,11315532
1,23076534	$\bar{1}$,9098247	$\bar{1}$,3789687	$\bar{1}$,2887934	0,19444350
1,5	$\bar{1}$,8239087	$\bar{1}$,4539975	$\bar{1}$,2779062	0,18962965
1,76923466	$\bar{1}$,7522146	$\bar{1}$,3789687	$\bar{1}$,1311833	0,13526433
1,95308992	$\bar{1}$,7092778	$\bar{1}$,0735843	$\bar{2}$,7828621	0,06065437
				Σ=0,6931478

Așadar,

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{,}69314718.$$

Ca un alt exemplu, Bertrand consideră integrala

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\lg 2 = 0{,}2721982613\ldots$$

și calculînd-o după formula lui Simpson pentru 10 intervale, obține

$$S = 0{,}2722012\ldots$$

După formula lui Côtes pentru $n = 5$, se găsește

$$S = 0{,}2722091.$$

Formula lui Gauss pentru $n = 5$ dă

$$S = 0{,}27219801.$$

În memoriul său „Methodus Nova integralium valores per approximationem inveniendi“ (Werke, Bd. 3), Gauss aplică formula dată de el la aflarea valorii integralei

$$S = \int_{100\,000}^{200\,000} \frac{dx}{\lg x} = 8406{,}24312$$

și dă următoarele rezultate, în care sînt folosite notațiile:

$$\Delta = 200\,000 - 100\,000 = 100\,000,$$

$$R^{(i)} = R(x_i) = \frac{1}{\lg x_i};$$

A sînt coeficienţii formulei lui Gauss.

I. Pentru $n = 1$

$$\Delta RA = 8390{,}394608$$

II. Pentru $n = 2$

$$\Delta RA = 4271{,}810097$$
$$\Delta R'A' = 4134{,}144502$$
$$S = 8405{,}954599$$

III. Pentru $n = 3$

$$\Delta RA = 2390{,}572772$$
$$\Delta R'A' = 3729{,}064270$$
$$\Delta R''A'' = 2286{,}599733$$
$$S = 8406{,}236775$$

IV. Pentru $n = 4$

$$\Delta RA = 1501{,}957053$$
$$\Delta R'A' = 2763{,}769240$$
$$\Delta R''A'' = 2711{,}454637$$
$$\Delta R'''A''' = 1429{,}062040$$
$$S = 8406{,}242970$$

V. Pentru $n = 5$

$$\Delta RA = 1024{,}879445$$
$$\Delta R'A' = 2041{,}833335$$
$$\Delta R''A'' = 2336{,}601133$$
$$\Delta R'''A''' = 1980{,}509616$$
$$\Delta R''''A'''' = 972{,}419588$$
$$S = 8406{,}243117$$

VI. Pentru $n = 6$

$$\Delta RA = 741{,}912854$$
$$\Delta R'A' = 1545{,}757256$$
$$\Delta R''A'' = 1976{,}737668$$
$$\Delta R'''A''' = 1950{,}466223$$
$$\Delta R''''A'''' = 1488{,}588550$$
$$\Delta R^{V} A^{V} = 702{,}780570$$
$$S = 8406{,}243121$$

VII. Pentru $n = 7$

$$\Delta RA = 561{,}1213804$$
$$\Delta R'A' = 1202{,}0551998$$
$$\Delta R''A'' = 1621{,}6290819$$
$$\Delta R'''A''' = 1753{,}4212406$$
$$\Delta R''''A'''' = 1584{,}9790252$$
$$\Delta R^{V} A^{V} = 1152{,}0681116$$
$$\Delta R^{VI} A^{VI} = 530{,}9690816$$
$$S = 8406{,}2431211$$

§ 33. Exemplele precedente arată cît de mare este gradul de precizie ce poate fi obţinut cu ajutorul formulelor de mai sus, în special cu ajutorul formulei lui Gauss. Nu trebuie să se creadă că situaţia se prezintă totdeauna astfel; se pot forma uşor exemple, în care aplicarea unei formule aproximative date poate să dea o eroare oricît de mare.

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm de exemplu funcţia

$$F(x)=(63x^5-70x^3+15x)^2=3969x^{10}-8820x^8+6790x^6-2100x^4+225x^2:$$

atunci

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = [360{,}81818 - 980 + 970 - 420 + 75]\cdot 2 = 11{,}63636.$$

Dacă aplicăm la calculul acestei integrale formula lui Gauss, luînd $n = 5$, obţinem

$$S = 0,$$

deoarece funcţia

$$f(x) = 63x^5 - 70x^3 + 15x$$

se anulează pentru valorile lui x care corespund la cele cinci abscise ale lui Gauss, adică pentru următoarele valori:

$$x = \pm (1 - 2 \cdot 0{,}046910\ldots) = \pm\, 0{,}90617985,$$
$$x = \pm (1 - 2 \cdot 0{,}230765\ldots) = \pm\, 0{,}53846931,$$
$$x = \quad (1 - 2 \cdot 0{,}5) \quad\quad = \quad 0{,}00000000.$$

Pentru a ilustra mai bine variaţia funcţiilor $f(x)$ şi $F(x) = [f(x)]^2$, dăm în tabela 8 alte cîteva valori ale lor:

Tabela 8

x	$f(x)$	$F(x)=[f(x)]^2$
0,0	0,00000	0,0000
0,1	1,43063	2,0466
0,2	2,46016	6,0523
0,3	2,76309	7,6345
0,4	2,16512	4,6877
0,5	0,71875	0,5166
0,6	—1,22112	1,4912
0,7	—2,92159	8,5357
0,8	—3,19616	10,2155
0,9	—0,32913	0,1083
1,0	8,00000	64,0000

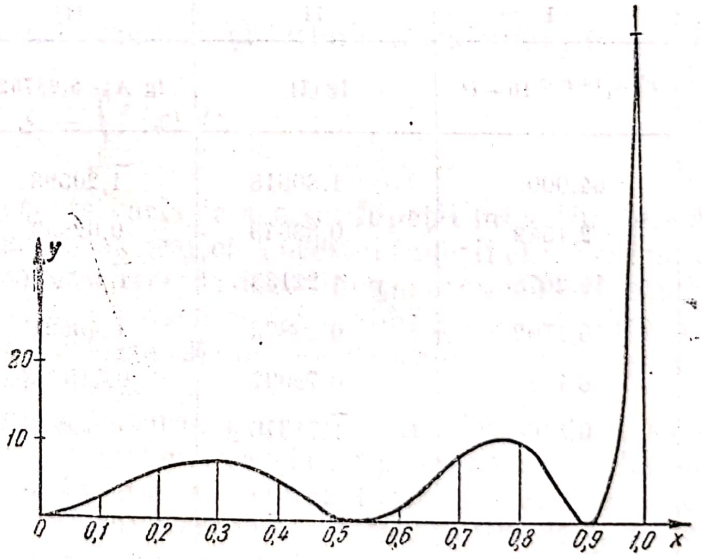

Fig. 14

şi facem reprezentarea grafică (fig. 14):

$$y = F(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)^2.$$

Aplicînd regula trapezelor, obţinem, pe baza datelor de mai sus,

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 14{,}656,$$

iar după regula lui Simpson, găsim

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 12{,}448.$$

După cum se observă, aproximația este și în acest caz foarte grosolană.

Se înțelege, dacă se ia formula lui Côtes pentru $n = 10$, trebuie să obținem rezultatul exact, deoarece funcția $F(x)$ este un polinom de gradul 10; în adevăr, găsim (tabela 9):

$$\begin{aligned} \lg \Sigma &= 1{,}54215 \\ \operatorname{colg}\ 5{,}98752 &= \bar{1}{,}22275 \\ \lg 2 &= 0{,}30103 \\ \hline \lg S &= 1{,}06593 \\ S &= 11{,}639 \end{aligned}$$

în timp ce valoarea adevărată este 11,6363.

Diferența este admisibilă, avîndu-se în vedere că s-a calculat cu cinci zecimale.

Astfel, exemplele precedente arată că la calculul integralelor cu ajutorul formulelor aproximative se pot obține grade de aproximație foarte diferite, chiar cu aceeași formulă și cu același număr de ordonate.

Tabela 9

I	II	III	IV	V
$F(x_i)+F(x_{10-i})$	lg (I)	lg $A_i \cdot$ 5,98752	(II) + (III)	Numerele coresp. la col. (IV)
64,000	1,80618	$\bar{1}$,20593	0,01211	10,2828
2,1549	0,33343	0,02653	0,35996	2,2907
16,2678	1,21133	$\bar{1}$,68597 (—)	0,89730 (—)	—7,8940
16,1702	0,20872	0,43521	1,64393	46,0480
6,1789	0,79091	0,41589 (—)	1,20680 (—)	—16,0990
0,5166	$\bar{1}$,71316	0,63080	0,34396	2,2078
				58,8393
				—23,9930
				$\Sigma = 34{,}8463$

Se pune de la sine întrebarea, cum să ne dăm seama de limitele erorilor pe care le facem, dacă aplicăm la calculul unei integrale date una din formulele de aproximație.

Această problemă poate fi considerată ca rezolvată din punct de vedere teoretic, deoarece s-au alcătuit expresiile termenilor rest pentru aceste formule. Expresiile lor , precum și deducerea lor, pot fi găsite în lucrarea acad. A. A. Marcov „Исчисление конечных разностей“ (Calculul cu diferențe finite). Vom indica principalele expresii, fără ca să le demonstrăm.

Să presupunem că integrala dată este

$$S = \int_a^b f(x)\,dx;$$

în cazul calculului după *regula trapezelor* cu $n + 1$ ordonate, adică la împărțirea bazei $b - a$ în n părți, eroarea ε se exprimă astfel:

$$\varepsilon = -\frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} \cdot f''(\xi),$$

unde ξ este valoarea intermediară între a și b.

Pentru *formula lui Simpson*, eroarea se exprimă în felul următor:

$$\varepsilon = -\frac{1}{45} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \frac{f^{IV}(\xi)}{n^4},$$

unde numărul diviziunilor este de $2n$.

Pentru *formula lui Gauss* în cazul a n ordonate, restul se exprimă prin

$$\varepsilon = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{[(n+1)(n+2)\ldots 2n]^3} f^{(2n)}(\xi).$$

Prezența în aceste expresii a derivatelor $f''(\xi), f^{IV}(\xi), f^{(2n)}(\xi)$ face ca folosirea lor în practică să fie destul de dificilă, iar cînd funcția $f(x)$ nu este definită analitic, ci printr-un grafic, utilizarea acestei formule devine imposibilă; de aceea, se întîmplă adeseori ca să fie nevoie să recurgem în practică la alte metode.

Cînd funcția $f(x)$ este definită analitic și trebuie să calculăm integrala

$$S = \int_a^b f(x)\,dx,$$

este util să studiem înainte de toate variația acestei funcții între limitele de integrare și să construim reprezentarea grafică a acestei funcții chiar și numai în mod aproximativ, pentru a vedea direct: 1) dacă funcția propusă își schimbă semnul în intervalul dintre a și b, iar dacă ea își schimbă semnul, care sînt valorile lui x pentru care ea se anulează, 2) dacă există valori extreme și care sînt valorile corespunzătoare ale lui x.

După ce s-a construit reprezentarea grafică a funcției, trebuie să se aleagă formula de aproximație, cu ajutorul căreia ne propunem să calculăm integrala, notînd apoi pe figură ordonatele corespunzătoare precum și punctele de pe curbă determinate de ele. Apoi trebuie să ne închipuim că sînt date numai aceste puncte și să ducem prin ele o curbă „conformă", adică o curbă a cărei curbură variază continuu. Dacă punctele alese sînt astfel situate, încît ele caracterizează variația funcției $f(x)$, iar curba conformă care trece prin ele este apropiată de cea reală, se poate aștepta ca formula aleasă și ordonatele luate să dea un rezultat satisfăcător. Dacă ordonatele alese se află însă în astfel de locuri ale curbei, încît punctele corespunzătoare nu caracterizează curba, adică sînt lăsate la o parte, de exemplu locurile valorilor extreme, sau punctele se află întîmplător foarte apropiate de rădăcini sau numai în apropierea maximelor etc., nu trebuie să pierdem timpul cu calculul precis al integralei după formula aleasă, deoarece rezultatul nu poate fi satisfăcător. În acest caz, trebuie să se ia sau o altă formulă, sau un alt număr de ordonate, în general

mai mare. Dacă calculul se efectuează cu ordonate echidistante, trebuie să se introducă ordonate suplimentare în locurile unde curbura curbei $y = f(x)$ este mare, subîmpărţind intervalele corespunzătoare în cîteva părţi egale. După aceea, este folositor să se aplice reguli diferite la ordonatele echidistante alese, adică regula trapezului, a lui Simpson şi a lui Côtes. Dacă calculul după toate aceste reguli ne dă rezultate apropiate între ele, atunci ne putem da seama, într-o oarecare măsură, de gradul lor de precizie; dacă aceste rezultate diferă însă mult între ele, numărul ordonatelor nu este suficient, iar rezultatul nu merită să fie luat în considerare.

Spre verificare, este apoi util să se recalculeze aceeaşi integrală şi după regula lui Cebîşev sau a lui Gauss, luînd pentru regula lui Cebîşev aproximativ jumătate din numărul ordonatelor folosit la regula trapezelor, iar pentru formula lui Gauss, jumătate din numărul folosit la regula lui Côtes; în acest caz, rezultatele sînt de obicei apropiate între ele.

La anumite probleme, de exemplu în teoria navei, se întîlnesc de obicei numai curbe a căror formă este aproximativ aceeaşi; în acest caz, putem efectua calculele precedente o dată pentru totdeauna, determinînd gradul de precizie pe care ni-l dă fiecare regulă la un număr dat de ordonate, astfel încît calculele pot fi efectuate apoi cu o anumită siguranţă.

Din observaţiile precedente rezultă că părerea emisă de *Laurent*[1]) despre formulele de aproximaţie pentru calculul integralelor, anume că „aceste formule ne dau valoarea numerică a integralei căutate, cu o aproximaţie care depinde, în general, de răbdarea calculatorului", se confirmă în practică, cu toate că expresiile erorilor pentru aceste formule sînt cunoscute.

§ 34. În multe probleme tehnice se iveşte necesitatea de a se calcula valoarea integralei definite

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx$$

cu limita superioară X variabilă, unde funcţia $f(x)$ este dată printr-un grafic.

Valoarea integralei $F(X)$ trebuie reprezentată apoi sau sub forma unei tabele al cărei argument este X, sau grafic.

Acest calcul se efectuează în felul următor:

Să presupunem că BC (fig. 15) este curba dată

$$y = f(x).$$

Notînd abscisa iniţială $OA = a$, construim ordonata $AB = y_0$, iar apoi notăm pe axa Ox, începînd de la punctul A, intervalele

$$Aa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \cdots = a_9a_{10} = \cdots = h,$$

unde h trebuie ales astfel, încît fiecare din ariile cuprinse între două ordonate vecine să poată fi considerată ca un trapez, ţinîndu-se seama de precizia cu care este alcătuită figura.

Punînd $X = Oa_k = a + kh = X_k$, obţinem după formula trapezelor

$$F(X_k) = \int_a^{a+kh} y\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k\right].$$

[1]) *Laurent*, Traité d'analyse, vol. III, p. 498.

În același fel, vom avea pentru $X = X_{k+1} = a + (k+1)\,h$:

$$F(X_{k+1}) = \int_a^{a+(k+1)h} y\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_k + \frac{1}{2}y_{k+1}\right] =$$

$$= F(X_k) + \frac{1}{2}h\,(y_k + y_{k+1}).$$

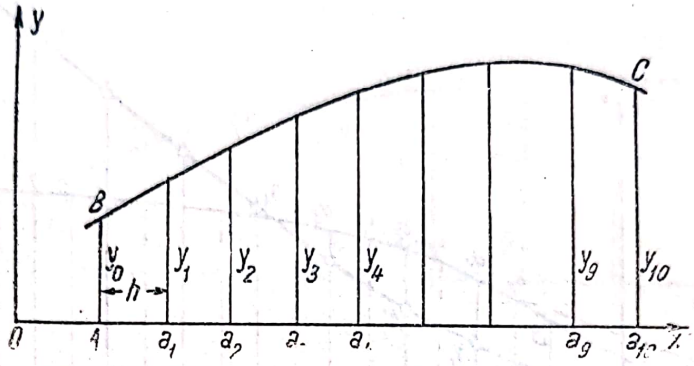

Fig. 15

Așadar,

$$F\,(X_{k+1}) = F\,(X_k) + \frac{1}{2}h\,(y_k + y_{k+1}).$$

Această formulă arată cum trebuie să se treacă de la o valoare a funcției $F(X)$ la valoarea următoare $F(X + h)$. Calculele se aranjează după schema din tabela 10.

CALCULUL LUI $F\,(X) = \int_a^x y\,dx$ *Tabela 10*

I	II	III	IV	V	VI
k	X	y_k	Suma perechilor de numere (III) $s_k = y_{k-1} + y_k$	Suma numerelor (IV) începînd de sus $\sum_{n=1}^{n=k} s_n$	(V) $\cdot\frac{1}{2}h$ $F(X) = \frac{1}{2}h\sum_{n=1}^{n=k} s_n$
0	a	y_0	$s_0 = y_0 + y_1$	0	0
1	$a + h$	y_1	$s_2 = y_1 + y_2$	s_1	$\frac{1}{2}h \cdot s_1$
2	$a + 2h$	y_2	$s_3 = y_2 + y_3$	$s_1 + s_2$	$\frac{1}{2}h\,(s_1 + s_2)$
3	$a + 3h$	y_3	$s_4 = y_3 + y_4$	$s_1 + s_2 + s_3$	
4	$a + 4h$	4_4	$s_5 = y_4 + y_5$	$s_1 + s_2 + s_3 + s_4$	.....
5	$a + 5h$	y_5	$s_6 = y_5 + y_6$	.....	
6	$a + 6a$	y_6	.....		

Calculul precedent poate fi efectuat și pe cale grafică în felul următor: să presupunem că BC (fig. 16) este curba dată; construind ordonatele corespunzătoare absciselor a, $a + h$, $a + 2h$, $\cdots$, împărțim intervalele în jumătate și construim o a doua serie de ordonate, pe care, spre deosebire de primele, le vom duce cu linii punctate. Construind apoi de la punctul b_1, piciorul pri-

mei ordonate punctate, lungimea $b_1E_1 = l$, care este luată ca unitate pentru arii, unim punctul E_1 cu punctul c_1, care este capătul primei ordonate punctate, iar prin punctul A ducem dreapta AN_1, paralelă la E_1c_1; punctul N_1 va aparține curbei căutate $F(X)$, adică lungimea a_1N_1 reprezintă la scara dată aria primului trapez ABd_1a_1.

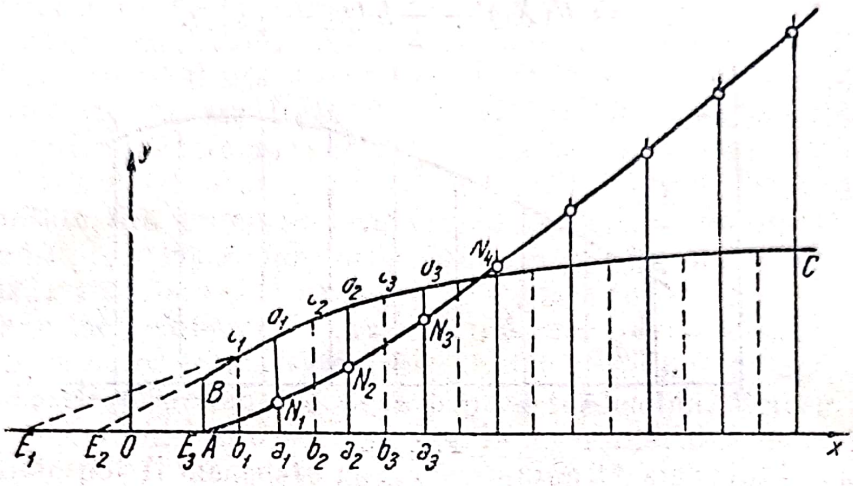

Fig. 16

În adevăr avem:

$$ABd_1a_1 = b_1c_1 \cdot Aa_1,$$

și deoarece am luat ca unitate lungimea $b_1E_1 = l$ (adică aria pătratului a cărui latură este egală cu b_1E_1 trebuie să fie reprezentată de lungimea l), urmează că la această scară, aria ABd_1a_1 trebuie să fie reprezentată prin lungimea

$$a_1N_1 = \frac{b_1c_1 \cdot Aa_1}{l}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $b_1E_1c_1$ și Aa_1N_1 rezultă

$$a_1N_1 : b_1c_1 = Aa_1 : b_1E_1,$$

de unde

$$a_1N_1 = \frac{b_1c_1 \cdot Aa_1}{b_1E_1},$$

adică am obținut tocmai mărimea căutată. Construind de la punctul b_2 lungimea $b_2E_2 = l$, unind punctul E_2 cu punctul c_2, care este capătul celei de a doua ordonate punctate, și ducînd apoi prin a_1 o dreaptă paralelă la E_2c_2 pînă la intersecția ei cu a_2d_2, obținem o lungime ce reprezintă la scara dată aria celui de al doilea trapez $a_1d_1d_2a_2$; pentru a obține suma ariilor celor două trapeze, trebuie să adăugăm la aceasta lungimea a_1N_1; în acest scop, trebuie să ducem dreapta N_1N_2, paralelă cu c_2E_2, prin punctul N_1 și nu prin punctul a_1, de unde se obține imediat punctul N_2, știind că ordonata a_2N_2 reprezintă la scara dată aria ABd_2a_2.

Continuînd această construcție în același fel, obținem punctele $N_3, N_4, \ldots$ și ducînd prin acestea curba, găsim reprezentarea grafică a funcției

$$F(X) = \int_a^X y\,dx$$

la scara dată.

Este evident că, la construcția punctelor N_1, N_2,..., nu este necesar să se ducă dreptele $E_1 c_1$, $E_2 c_2$, AN_1, $N_1 N_2$ etc., ci este suficient să se determine intersecțiile corespunzătoare pe ordonatele trase cu linii continue, aplicînd pe aceste linii un echer.

Ca lungime l, este avantajos să se ia un multiplu întreg al lungimii h, care reprezintă intervalul dintre ordonatele aceleiași serii; punctele E vor coincide atunci cu punctele b. Astfel, de exemplu, am luat pe figură $l = 3h$, și atunci E_4 coincide cu b_1, E_5 cu b_2 etc.

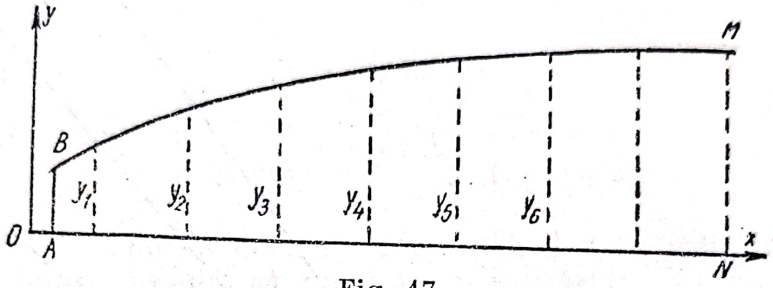

Fig. 17

Există, de asemenea, o metodă foarte avantajoasă din punct de vedere grafic, pentru obținerea directă a funcției

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx,$$

adică a rezultatului integrării repetate a unei funcții date $f(x)$.

Să presupunem că curba din fig. 17 reprezintă funcția dată $f(x)$.

Construind ordonatele ca și mai sus, luăm o lungime oarecare OK ca unitate pentru construirea curbei $F(x)$ și procedăm în felul următor (fig. 18): ducem dreapta OK și o perpendiculară la ea în punctul K, pe care construim lungimile $Ka_1 = y_1$; $a_1a_2 = y_2$; $a_2a_3 = y_3$;... Ducem apoi semidreptele Oa_1, Oa_2, Oa_3 etc. Admițînd că punctului O îi corespunde abscisa $x=a$, construim lungimile $Ob_1 = h$, $Ob_2 = 2h$,... și ducem ordonatele corespunzătoare acestora.

Punem apoi în evidență punctul de intersecție n_1 a razei Oa_1 cu prima ordonată, ducem prin punctul n_1 dreapta n_1n_2, paralelă cu Oa_2, pînă la intersecția ei cu ordonata a doua etc.; curba On_1n_2... va fi curba căutată care reprezintă funcția $F(x)$, curba fiind trasată la scara $1:h$.

§ 35. La calculul integralelor cu formulele de aproximație, prezintă anumite particularități cazurile la care sau limitele integralei sînt infinite, sau funcția care se integrează devine infinită pentru o anumită valoare a variabilei independente, cuprinsă între limitele de integrare.

Să presupunem, de exemplu, că trebuie să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

pentru $a = \frac{1}{2}$, adică integrala

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

Această integrală prezintă ambele particularităţi amintite mai sus.

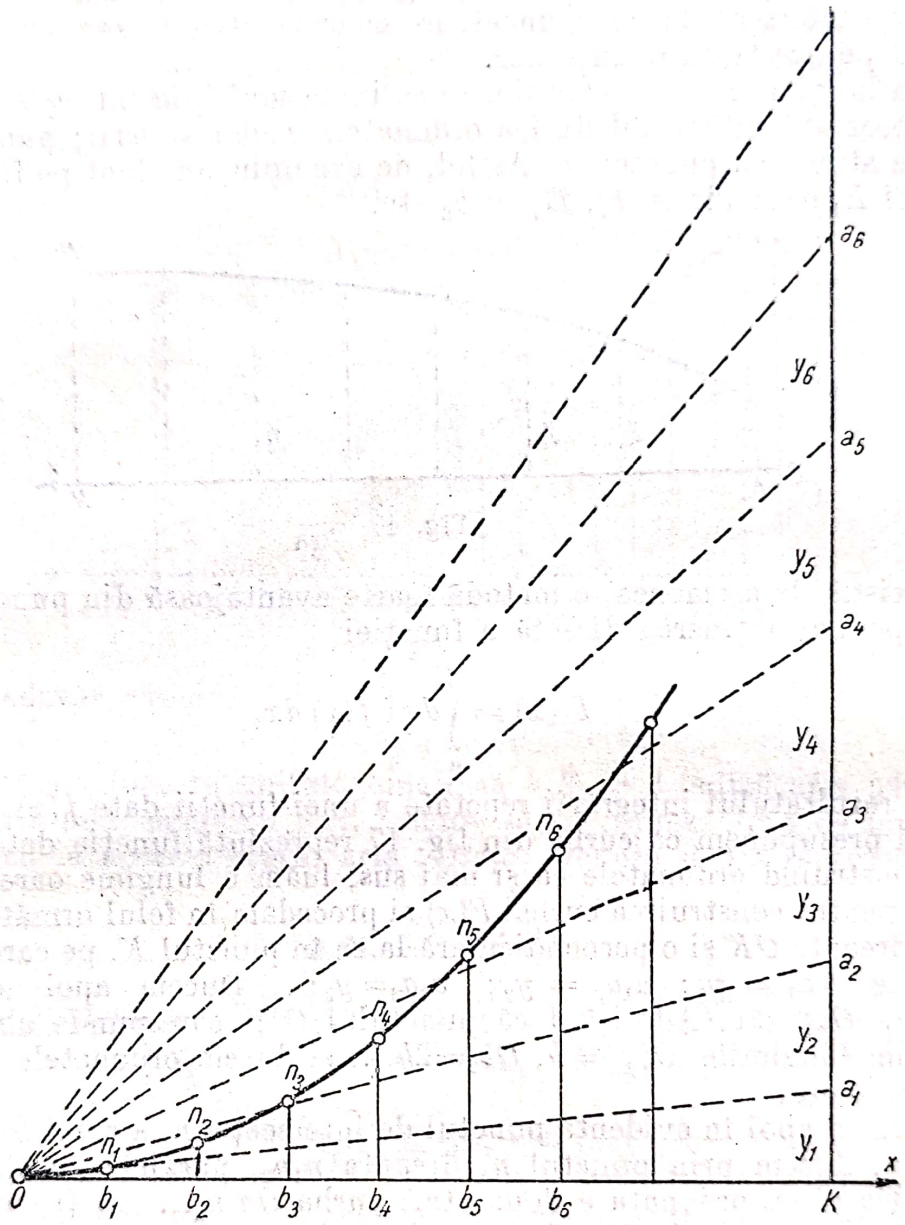

Fig. 18

Pentru a elimina limita superioară de integrare infinită, împărţim integrala în două, şi anume:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} .$$

În a doua integrală, efectuăm substituţia $x = \frac{1}{z}$, astfel încît vom avea

$$dx = -\frac{dz}{z^2},$$

cu limitele:

$$z = 0, \text{ pentru } x = \infty$$

și

$$z = 1, \text{ pentru } x = 1.$$

În acest fel, vom avea

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = -\int_1^{0} \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z}} = \int_0^{1} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}};$$

astfel încît obținem

$$S = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Pentru $x = 0$, funcția care se integrează devine infinită; pentru a scăpa de acest lucru, trebuie să integrăm prin părți:

$$\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\,\frac{1}{1+x} \right)_0^{1} + 2\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = 1 + 2\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx.$$

În acest fel, găsim

$$S = 2 + 4\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx,$$

unde ultima integrală nu mai prezintă nici un fel de particularitate. Folosind la calculul ei formula lui Gauss (v. tabela 11), obținem:

$$S = 2 + 4S_1 = 2 + 1{,}14427 = 3{,}14427,$$

în timp ce valoarea precisă a integralei este

$$S = 3{,}14159\ldots$$

Tabela 11

I	II	III	IV	V	VI
$\frac{1}{2}\lg x$	$2\lg(1+x)$	$(\mathrm{I})-(\mathrm{II}) = \lg\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$	$\lg A$	$\lg A\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$	$A\frac{\sqrt{x}}{(2+x)^2}$
$\bar{1}{,}33563$	0,03982	$\bar{1}{,}29581$	$\bar{1}{,}07358$	$\bar{2}{,}36939$	0,023410
$\bar{1}{,}68159$	0,18035	$\bar{1}{,}50124$	$\bar{1}{,}37897$	$\bar{2}{,}88021$	0,075893
$\bar{1}{,}84949$	0,35218	$\bar{1}{,}49731$	$\bar{1}{,}45400$	$\bar{2}{,}95131$	0,089392
$\bar{1}{,}94303$	0,49557	$\bar{1}{,}44746$	$\bar{1}{,}37897$	$\bar{2}{,}82643$	0,067055
$\bar{1}{,}98957$	0,58144	$\bar{1}{,}40313$	$\bar{1}{,}07358$	$\bar{2}{,}48171$	0,030317
					$S_1 = 0{,}286067$

Cazul cînd funcţia care se integrează devine infinită, pentru una din limitele de integrare, intervine în practică la problema următoare.

Deseori trebuie să se studieze mişcarea rectilinie a unui punct material sau a centrului de greutate al unui corp, asupra căruia acţionează o forţă ce depinde de distanţa punctului la origine; cu alte cuvinte, trebuie să se integreze o ecuaţie de tipul

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \qquad (*)$$

cu condiţia ca pentru $t = 0$ să fie $x = a$ şi $\frac{dx}{dt} = 0$. Funcţia $f(x)$ este deseori dată printr-un grafic, nefiind definită analitic.

Din ecuaţia (*) rezultă

$$2\,\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\,dt = 2\,f(x)dx,$$

de unde

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Deoarece, pentru $x = a$, $\frac{dx}{dt}$ trebuie să se anuleze, urmează că vom avea

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a),$$

unde, evident, $F'(x) = 2f(x)$.

Avem mai departe:

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x) - F(a)}} = dt$$

şi, integrînd, obţinem:

$$t = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{F(x) - F(a)}}. \qquad (**)$$

Deoarece prin ipoteză funcţia $f(x)$ este dată printr-un grafic, se înţelege că atît funcţia $F(x)$ cît şi integrala (**) pot fi calculate numai prin metode aproximative.

Însă, în ultima integrală, funcţia care se integrează devine infinită pentru $x=a$, de unde rezultă că este imposibil să o calculăm direct prin formulele de aproximaţie.

În acest caz, trebuie să se aplice următoarea transformare: înmulţim numărătorul şi numitorul fracţiei de sub integrală cu

$$2F'(x) = 4f(x);$$

obţinem atunci:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{F(x) - F(a)}} = 2\int_a^x \frac{F'(x)\,dx}{2F'(x)\sqrt{F(x) - F(a)}} = \int_a^x \frac{1}{f(x)}\,d\sqrt{F(x) - F(a)}.$$

Ultima integrală o transformăm, integrînd prin părţi, obţinînd:

$$\int_a^x \frac{1}{f(x)} d\sqrt{F(x)-F(a)} = \left[\frac{1}{f(x)}\sqrt{F(x)-F(a)}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\sqrt{F(x)-F(a)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{f(x)}\sqrt{F(x)-F(a)} + \int_a^x \sqrt{F(x)-F(a)}\,\frac{f'(x)\,dx}{[f(x)]^2}.$$

Ultima integrală nu mai este improprie, însă calculul ei direct este dificil, în urma faptului că funcţia care se integrează conţine factorul $f'(x)$, iar funcţia $f(x)$ este dată numai prin graficul ei. Pentru a afla derivata funcţiilor definite în acest fel este nevoie ca să se determine coeficientul unghiular al tangentelor la curba $y = f(x)$; totuşi, ducerea tangentei la un grafic şi aflarea pantei ei prezintă dificultăţi şi nu dă rezultate destul de precise.

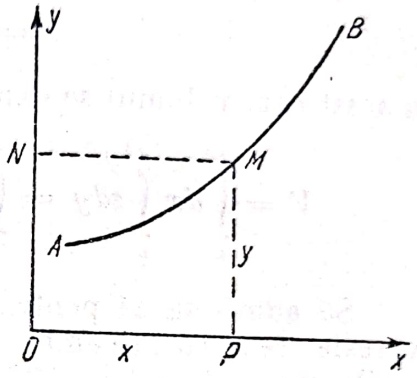

Fig. 19

Pentru a putea renunţa la ducerea tangentelor, trebuie să procedăm în felul următor.

Să presupunem că graficul din fig. 19 reprezintă curba $y = f(x)$. Se înţelege de la sine că, dîndu-se y, putem determina după această figură valorile corespunzătoare ale lui x, iar aceasta este echivalent cu faptul că y este considerat ca variabila independentă, iar x ca o funcţie de y.

Se înţelege de asemenea că, atunci cînd este datăcurba $y=f(x)$, este uşor să se construiască şi curba

$$z = \frac{1}{f(x)}.$$

Să introducem acum în integrala noastră, în locul variabilei x, variabila z cu ajutorul ecuaţiei

$$z = \frac{1}{f(x)}.$$

Vom avea atunci

$$dz = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,dx.$$

Să presupunem că pentru $x=a$ avem $z = \frac{1}{f(a)} = b$.

Deoarece pentru fiecare valoare dată a lui z rezultă imediat şi valoarea corespunzătoare a lui x, urmează că funcţia $F(x)$ poate fi considerată ca o anumită funcţie cunoscută $F_1(z)$, de unde obţinem:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{F(x)-F(a)}} = \frac{1}{f(x)}\sqrt{F(x)-F(a)} - \int_b^z \sqrt{F_1(z)-F_1(a)}\,dz.$$

Calculul ultimei integrale nu mai prezintă nici un fel de dificultăţi.

§ 36. Formulele de aproximaţie indicate mai sus se aplică şi la calculul integralelor multiple, dintre care se întîlnesc foarte des cele care exprimă volumul mărginit de o suprafaţă dată, precum şi momentele statice ale acestui volum, necesare pentru determinarea poziţiei centrului său de greutate.

Să presupunem, de exemplu, că se dă volumul V, mărginit de o suprafaţă, a cărei ecuaţie este

$$z = f(x, y),$$

şi de patru plane, ale căror ecuaţii sînt respectiv:

$$x = a,\ y = c;\ x = b,\ y = d.$$

În acest caz, volumul se exprimă prin integrala

$$V = \int_a^b dx \int_c^d z\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Să admitem că pentru calculul acestei integrale vom folosi prima ei expresie, ceea ce înseamnă că prima integrare o efectuăm în raport cu variabila y.

Din punct de vedere geometric, integrala

$$\int_c^d f(x, y)\,dy = \omega = F(x)$$

reprezintă mărimea ariei secţiunii volumului dat prin planul x, paralel la planul de coordonate zOy. Evident că ω va fi o funcţie anumită de x.

În acest fel, volumul se exprimă prin integrala

$$V = \int_a^b \omega\,dx = \int_a^b F(x)\,dx,$$

adică, printr-o integrală simplă pentru al cărei calcul putem folosi oricare din regulile ştiute, de unde rezultă că obţinem în general o expresie aproximativă de tipul

$$V = \int_a^b F(x)\,dx = (b - a)\,[A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)],$$

unde abscisele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt valori particulare ale mărimii x, cuprinsă între a şi b. Aceste valori pot fi echidistante sau nu, în funcţie de regula care se foloseşte.

Pentru calculul mărimilor $F(x_i)$ avem formula:

$$F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\,dy;$$

deoarece mărimea x_i este aici o constantă, urmează că și această integrală se va putea afla cu ajutorul oricăreia din formulele de aproximație, de unde rezultă o formulă de tipul

$$F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy = (d-c)\,[C_1 f(x_i, y_1) + C_2 f(x_i, y_2) + \ldots + C_k f(x_i, y_k)].$$

Evident că acest calcul devine deosebit de simplu, dacă se aplică în ambele cazuri formula lui Cebîșev, în virtutea căreia

$$V = \frac{b-a}{n}\,[F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_n)],$$

și

$$F(x_i) = \frac{d-c}{k}\,[f(x_i, y_1) + f(x_i, y_2) + \ldots + f(x_i, y_k)],$$

de unde, substituind, obținem:

$$\begin{aligned} V = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{k}\,[&f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + \ldots + f(x_1, y_k) + \\ &+ f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) + \ldots + f(x_2, y_k) + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f(x_n, y_1) + f(x_n, y_2) + \ldots + f(x_n, y_k)]. \end{aligned}$$

Deoarece $f(x_i, y_j)$ nu este altceva decît valoarea cotei z, corespunzătoare valorilor x_i și y_j ale celorlalte două coordonate, urmează că suprafața

$$z = f(x, y)$$

poate fi dată și pe cale grafică, de exemplu prin secțiunile cu planele $x = \text{const}$ și $y = \text{const}$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

DISPOZITIVE MECANICE PENTRU CALCULUL INTEGRALELOR DEFINITE

§ 37. Pentru calculul integralelor definite există o mulțime de dispozitive mecanice de diferite tipuri. În acest capitol vom da teoria lor generală, cu ajutorul căreia nu va fi greu să se alcătuiască formulele corespunzătoare și să se interpreteze indicațiile oricăruia din aceste dispozitive.

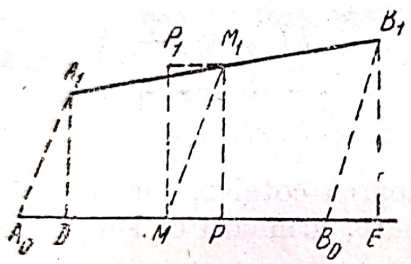

Fig. 20

Această teorie aparține inginerului naval francez Andrades și a fost publicată în „Mémorial du Génie Maritime“ din anul 1874. Deoarece această publicație este considerată secretă, teoria lui Andrades nu a fost tratată în nici un manual, cu toate că este atît de simplă și de generală.

Teoria lui Andrades este bazată pe considerarea ariei descrisă de un segment de dreaptă de o anumită lungime, în mișcarea lui în plan.

Dacă dreapta AB alunecă în plan, fiecare element al ei lasă o urmă pe acest plan; vom considera aria acestei urme ca pozitivă, atunci cînd, privind în sensul de la A la B, aria descrisă de elementul de dreaptă considerat se află la stînga lui AB, și o vom considera ca negativă, cînd ea se află la dreapta lui. Aria totală descrisă de AB va fi suma algebrică a tuturor urmelor elementare luate cu semnele corespunzătoare. Astfel, dacă lăsăm fix mijlocul lui AB și rotim cu un anumit unghi, aria totală descrisă de AB va fi egală cu zero, deoarece suma urmelor negative este egală cu suma celor pozitive.

Din cele de mai sus rezultă următoarea teoremă.

Teoremă. Aria infinit mică descrisă de un segment de dreaptă AB, la o deplasare infinit mică de la poziția inițială A_0B_0 la a doua poziție A_1B_1, este egală cu aria dreptunghiului, care are una din laturi egală cu AB, iar cealaltă este proiecția drumului parcurs de mijlocul M, pe perpendiculara la direcția lui AB.

Să presupunem că $A_0\,B_0$ și $A_1\,B_1$ (fig. 20) reprezintă două poziții succesive ale lui AB; aria descrisă de ea este $A_0B_0B_1A_1$. Ducînd perpendicularele A_1D și B_1E, obținem trapezul DA_1B_1E, a cărui arie se deosebește de $A_0B_0B_1A_1$ cu suma algebrică a ariilor A_0A_1D și B_0B_1E. Aceste două arii vor fi, în general, infiniți mici de ordinul al doilea, în timp ce aria $A_0B_0B_1A_1$ va fi de ordinul întîi; raportul dintre $A_0B_0B_1A_1$ și DA_1B_1E va

fi la limită egal cu unitatea, de unde rezultă că aceste două arii sînt echivalente.

Evident că

$$\text{aria } DA_1B_1E = DE \cdot M_1P = AB \cdot MP_1 = \Delta Q,$$

abstracție făcînd de infiniții mici de ordinul al doilea, deoarece lungimea DE diferă de AB prin mărimi infinit mici, iar MP_1 este de asemenea un infinit mic.

Orice arie finită Q, descrisă de AB, este limita sumei unor arii elementare de tipul lui $A_0B_0B_1A_1$; potrivit teoremei fundamentale a teoriei limitelor, rezultă că fiecare element al unei sume poate fi înlocuit la căutarea limitei sumei cu un alt element echivalent, fără ca această limită să se modifice.

În acest fel, obținem

$$Q = \lim \sum A_0B_0B_1A_1 = \lim \sum DA_1B_1E = \lim \sum AB \cdot MP_1 = AB \lim \sum MP_1.$$

Ultima limită $\lim \Sigma MP_1$ reprezintă lungimea arcului, cu care s-ar roti circumferința unei rotițe, a cărei axă este dreapta AB și al cărei plan trece prin punctul M.

Astfel, ajungem la următoarea *consecință*: *aria descrisă de un segment AB de lungime dată l se măsoară prin produsul acestei lungimi l cu lungimea arcului, cu care se rotește rotița sus-amintită, situată în mijlocul M al segmentului AB.*

Să examinăm acum care este diferența dintre lungimile arcelor, cu care se rotesc două rotițe, situate una în punctul M și cealaltă în punctul N, știind că distanța MN este egală cu a.

Fiecare deplasare infinit mică a lui AB poate fi înlocuită printr-o rotație de unghi $d\varphi$ în jurul centrului instantaneu D. Arcele elementare, descrise de rotițele M și N, vor fi respectiv ME și NF (fig. 21), însă

$$ME = MM_1 \cdot \cos(M_1ME) = DMd\varphi \cdot \cos M_1ME = KM \cdot d\varphi,$$
$$NF = NN_1 \cdot \cos(N_1NF) = DNd\varphi \cdot \cos N_1NF = KN \cdot d\varphi,$$

de unde

$$NF - ME = [KN - KM] \cdot d\varphi = MN \cdot d\varphi = a \cdot d\varphi.$$

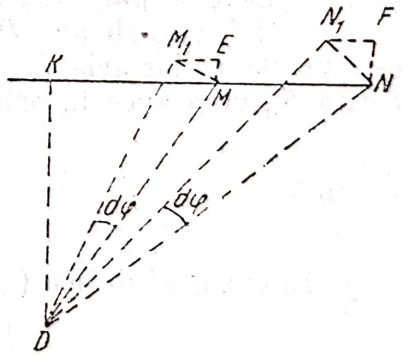

Fig. 21

Acest rezultat arată că la o deplasare finită a lui AB, diferența arcelor totale de rotație ale rotițelor M și N este egală cu $a\varphi$, unde φ este unghiul format de cele două poziții limită ale dreptei AB. Dacă poziția finală a acestei drepte coincide cu cea inițială și dacă AB nu a descris în timpul deplasării o rotație completă, unghiul φ este egal cu zero. Însă, în acest caz, poziția rotiței este absolut indiferentă, deoarece arcul de rotație rămîne același, ori unde s-ar afla rotița. Dacă dreapta AB a efectuat o rotație completă, atunci $\varphi = 2\pi$; iar dacă rotația de măsurat se află în N, la distanța a de la mijloc, trebuie să adăugăm la lungimea arcului de rotație s lungimea $2\pi a$, sau altfel, mărimea $2\pi al$ trebuie adăugată la aria sl, calculată după indicațiile rotiței.

Să presupunem că punctul A al lui AB a descris curba închisă C, iar punctul B s-a deplasat de-a lungul curbei date L, și să presupunem mai departe că rotița se află în punctul N. Atunci, dacă AB, deplasîndu-se din poziția inițială A_0B_0 (fig. 22), ajunge din nou în această poziție, după ce punctul A a descris întreaga curbă C, aria totală descrisă de AB este egală cu aria Q, mărginită de această curbă, deoarece porțiunile ariei cuprinse între C și L vor fi parcurse de AB de două ori în sensuri opuse, de unde rezultă că ele se vor reduce. În acest caz, aria Q se măsoară prin produsul $l \cdot s$, unde s este lungimea arcului cu care s-a învîrtit rotița N.

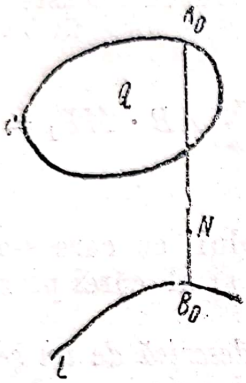

Fig. 22

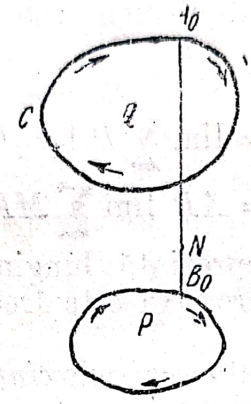

Fig. 23

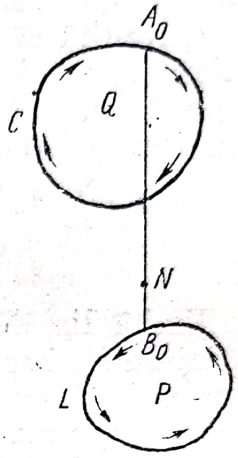

Fig. 24

Am presupus că curba directoare L este deschisă și nu are o buclă. Dacă curba directoare L va fi, de asemenea, închisă ca și curba parcursă C, aria descrisă de dreapta AB la deplasarea ei de la poziția inițială A_0B_0 pînă la aceeași poziție finală (fig. 23), va fi egală cu diferența algebrică dintre aria Q închisă de curba C și aria P a curbei L, descrisă de punctul B.

Pentru a determina semnele corespunzătoare ale ariilor P și Q, este suficient să admitem, potrivit celor de mai sus, că aria mărginită de curba descrisă de punctul A sau B este pozitivă atunci cînd curba respectivă este parcursă de punctul A sau B în sensul mișcării acelor de ceasornic și negativă cînd curba este parcursă în sens invers.

Astfel, ambele arii P și Q din fig. 23 sînt pozitive, iar în fig. 24 aria Q este pozitivă, iar aria P este negativă. Dacă s este arcul cu care s-a învîrtit rotița N, vom avea în primul caz (fig. 23)

$$Q - P = l\,s,$$

de unde

$$Q = ls + P.$$

În cazul al doilea (fig. 24), vom avea

$$Q - [-P] = Q + P = ls,$$

de unde

$$Q = ls - P.$$

Dacă curba închisă C, a cărei arie trebuie măsurată, cuprinde în întregime directoarea L (fig. 25), AB va face o rotație completă, în timp ce punctul A descrie curba C, iar aria Q va fi

$$Q = ls + P + 2\pi la.$$

Conform teoriei expuse, curba directoare L poate fi luată în mod arbitrar. La planimetrele *polare* des întrebuințate ale lui Amsler, această curbă este un cerc; la integratorul și planimetrul său liniar, această curbă este o dreaptă.

§ 38. Construcția *planimetrului lui Amsler* este, în linii generale, următoarea: două bare AK și BO (fig. 26) sînt unite în punctul B printr-o articulație. Capătul O al brațului BO este prevăzut cu un vîrf ascuțit, care se fixează pe grafic. La capătul A al brațului AK se află un vîrf, care descrie curba care mărginește aria ce urmează a fi măsurată. La capătul K al aceleiași bare se află o rotiță cu o margine ascuțită, al cărei plan este perpendicular pe AK. De această rotiță este fixat un cerc cu diviziuni, pe care se poate citi unghiul de rotație al rotiței cu ajutorul unui indice fixat de bară.

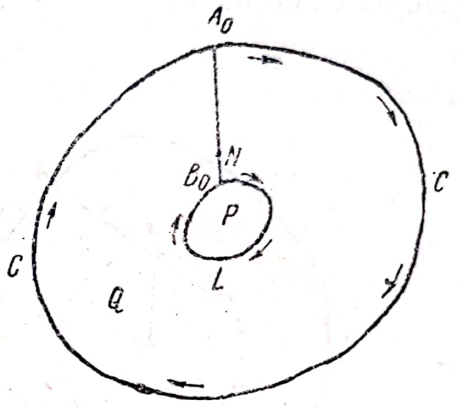

Fig. 25

Folosirea dispozitivului este foarte simplă. Pentru a măsura aria cuprinsă în interiorul unui contur dat C, fixăm punctul O pe figură, așezăm vîrful A într-un punct A_0 al conturului și notăm poziția rotiței (să presupunem că valoarea obținută este θ_0); apoi descriem conturul C cu vîrful A, de exemplu în sensul mișcării acelor de ceasornic. Cînd vîrful ajunge în A_0, după parcurgerea întregului contur, citim a doua oară poziția rotiței. Să presupunem că valoarea indicată este θ_1; atunci, diferența unghiurilor $\theta_1 - \theta_0$ va fi proporțională cu aria Q, conținută în interiorul conturului C, astfel încît

$$Q = k\,(\theta_1 - \theta_0).$$

Din cele precedente se poate vedea că mărimea k se exprimă prin $k = l \cdot r$, unde l este lungimea barei AB, iar r este raza rotiței. Pentru a determina coeficientul de proporționalitate k, se parcurge de obicei cu acul A un

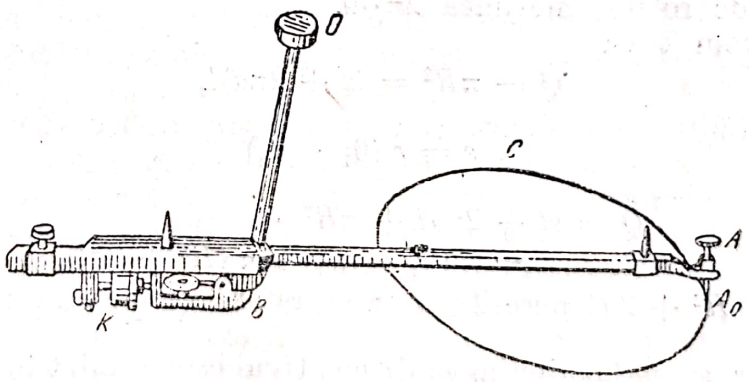

Fig. 26

contur ce cuprinde o arie ce se calculează ușor, de exemplu un dreptunghi cu laturi date, un pătrat sau un cerc de rază dată. Evident că acest coeficient k poate fi determinat pentru același dispozitiv o dată pentru totdeauna. În majoritatea cazurilor, dispozitivul este folosit în așa fel, încît punctul O să fie situat în exteriorul ariei măsurate.

Din formula $k = r \cdot l$ se poate observa că constanta dispozitivului este proporţională cu lungimea barei AB, cuprinsă între articulaţie şi vîrf. Această proprietate este folosită la construcţia planimetrelor destinate măsurării diagramelor indicatoare, unde nu este nevoie să se cunoască aria, ci ordonata medie, adică raportul dintre valoarea ariei şi lungimea bazei. În acest caz, bara planimetrului se construieşte astfel, încît să se poată uşor deplasa într-o mufă a articulaţiei. Fixînd atunci lungimea AB, astfel ca ea să fie egală cu baza ariei, se va obţine din indicaţiile rotiţei o mărime, proporţională cu ordonata medie. Fig. 26 arată un planimetru de acest fel.

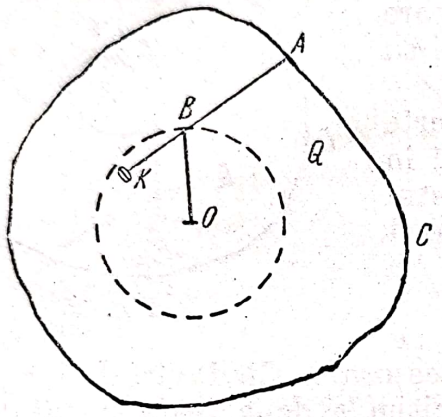

Fig. 27

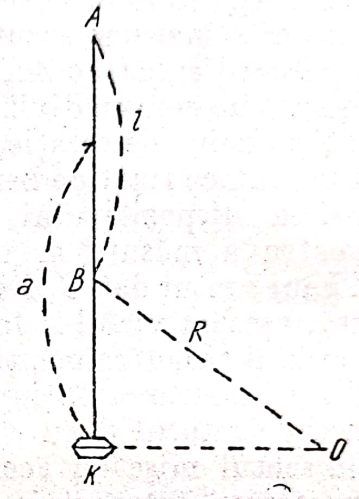

Fig. 28

În cazul cînd punctul O se află în interiorul ariei măsurate, aria descrisă de lungimea AB este o coroană (fig. 27), cuprinsă între cercul director, adică cercul descris de punctul B, şi conturul C. Trecînd de la poziţia iniţială la cea finală, dreapta AB efectuează o rotaţie completă, şi deoarece rotiţa de măsurat nu se află la jumătatea lungimii AB, ci la distanţa a de aceasta, urmează că pe baza celor spuse în § 37 trebuie să adăugăm la lungimea arcului descris de rotiţă, mărimea $2\pi \cdot al$.

Astfel, vom avea

$$Q - \pi R^2 = (s + 2\pi a)l,$$

unde

$$s = r(\theta_1 - \theta_0)$$

sau

$$Q = sl + 2\pi al + \pi R^2 = \\ = k(\theta_1 - \theta_0) + \pi(R^2 + 2al).$$

Mărimea $R^2 + 2al$ permite o interpretare geometrică foarte simplă (fig. 28).

În adevăr, să ne închipuim că dispozitivul este aranjat în aşa fel, încît planul rotiţei să treacă prin punctul O; atunci vom avea

$$OA^2 = AK^2 + OK^2,$$

$$AK^2 = \left(a + \frac{l}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{l^2}{4} + al,$$

$$OK^2 = R^2 - \left(a - \frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - a^2 - \frac{l^2}{4} + al,$$

de unde rezultă

$$OA^2 = R^2 + 2al.$$

Astfel, punînd $OA^2 = R^2$, obținem

$$Q = k(\theta_1 - \theta_0) + \pi R^2.$$

Pe lîngă planimetrul descris, Amsler a mai construit un altul, bazat pe același principiu, însă la care rotița K nu se deplasează pe figură, ci pe un disc special, care se rotește proporțional cu rotația barei BO. Datorită acestui

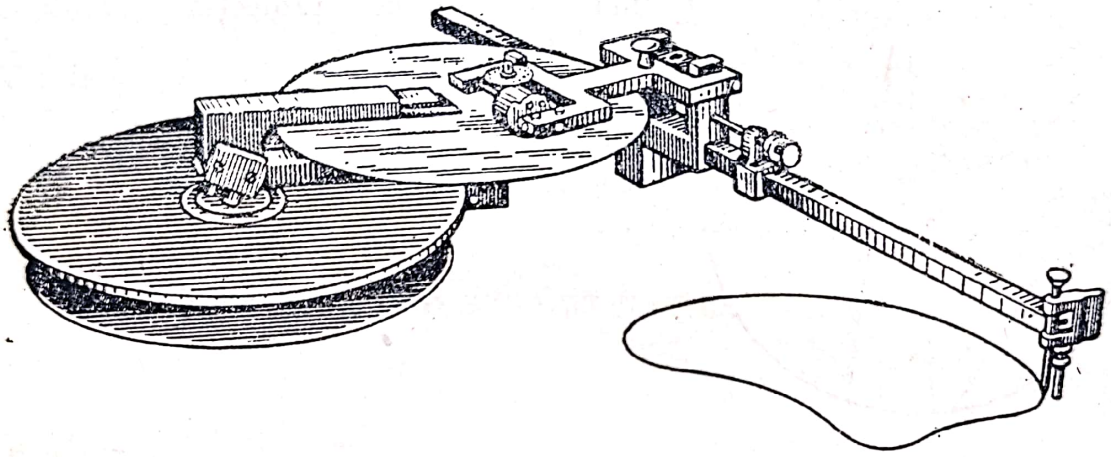

Fig. 29

fapt, se mărește foarte mult unghiul de rotație al rotiței, ceea ce are ca urmare o mai mare precizie a citirii unghiului $\theta_1 - \theta_0$; pe lîngă aceasta, sînt mai precise și indicațiile aparatului însuși, deoarece este eliminată posibilitatea „derapării" rotiței (acest pericol se prezintă, de exemplu, dacă graficul a fost efectuat pe o hîrtie foarte netedă). De asemenea, mai poate fi măsurat cu acest planimetru cu disc și un desen, pe care au rămas urme de la împăturire (fig. 29).

Construcția acestui planimetru este următoarea: cilindrul E (fig. 30 *a*) are o margine mai proeminentă, dințată foarte fin.

Raza OB, care se rotește liber în jurul axei centrale O a cilindrului, poartă pinionul D, a cărui axă este paralelă cu axa O și care se angrenează de circumferința cilindrului C. Acest pinion este legat rigid cu discul D, care efectuează, prin urmare, aceeași rotație ca și pinionul. La capătul B al razei OB este fixată o a doua axă, paralelă cu prima, iar în jurul ei se poate roti liber un braț cotit ABK, care se termină cu vîrful A și cu o furcă, pe care este fixată rotița de măsurat K, al cărui plan este perpendicular pe AB și care se rostogolește pe discul G.

Se înțelege de la sine că conturul ariei măsurate se descrie cu vîrful A și că citirea se efectuează pe rotița K.

Evident că, în linii mari, acesta este același planimetru polar ca și mai sus, la care curba directoare este un cerc descris de punctul B și la care toate celelalte piese servesc numai pentru a mări precizia indicațiilor rotiței.

Pentru a stabili formulele referitoare la acest planimetru, trebuie să aflăm numai raportul dintre unghiul de rotație efectiv al rotiței de măsură K, care se rostogolește pe disc, și unghiul de rotație al unei rotițe K_1, care s-ar afla fixată undeva pe brațul AB și s-ar rostogoli pe planul schiței.

În acest scop, vom alcătui schema dispozitivului și ne vom închipui că rotița K_1 se află în punctul B (fig. 30 a).

Să presupunem că vîrful A a descris elementul de arc AA' al conturului a cărui arie se măsoară, iar dreapta AB a descris cu această ocazie aria $ABB'A'$ în acest caz, rotița K_1 ar fi parcurs drumul BB', iar unghiul ei de rotație ar fi fost

$$d\varphi = \frac{BP}{r},$$

unde punctul P este proiecția punctului B' pe planul rotiței K_1.

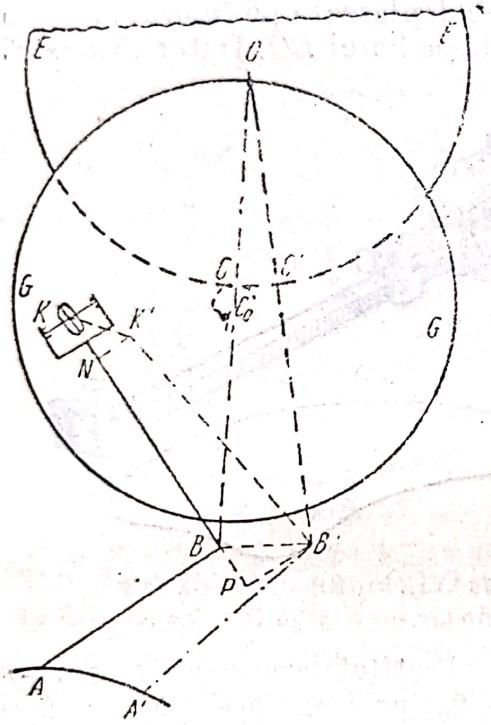

Fig. 30 a

Planul rotiței K coincide planului K_1; dacă discul ar fi imobil, arcul parcurs de punctul K ar fi KK', iar rotația $d\psi$ a rotiței K ar fi determinată de formula

$$d\psi = \frac{KN}{r}.$$

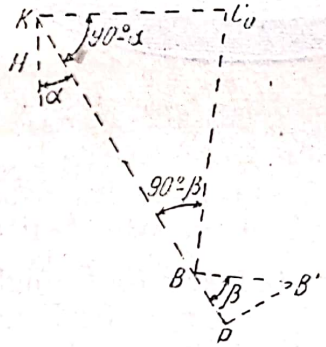

Fig. 30 b

Deoarece unghiul dintre cele două direcții AB și $A'B'$ este infinit mic, urmează că și unghiul dintre direcțiile perpendiculare pe ele BK și $B'K'$ este infinit mic, de unde rezultă că lungimea NP a proiecției dreptei $B'K'$ se deosebește numai prin infiniți mici de ordin superior de lungimea dreptei însăși, adică

$$K'B' = KB = NP + \text{infiniți mici de ordin superior},$$

de unde rezultă

$$KN = BP$$

sau altfel

$$d\varphi = d\psi,$$

adică unghiurile de rotație ale rotițelor K și K_1 ar fi aceleași dacă discul ar rămîne imobil.

Urmează deci să se afle cu ce unghi se rotește rotița K, datorită rotației discului.

Fie

$$OB = R, \quad OC_0 = R_1$$

și să presupunem că raza pinionului este ρ.

Rotația razei OB va fi atunci

$$d\sigma = \frac{BB'}{R}.$$

Unghiul de rotație al pinionului și, prin urmare, și al discului în raport cu raza OB' va fi

$$d\sigma_1 = \frac{OC_0}{\rho} d\sigma = \frac{R_1}{\rho} d\sigma = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{BB'}{\rho}.$$

Prin urmare, discul parcurge sub rotița K drumul KH, a cărui lungime este

$$HK = KC_0 \cdot d\sigma_1 = ds_1,$$

făcînd ca rotița K să se rotească cu unghiul $d\omega$, determinat de formula

$$d\omega = \frac{ds_1 \cdot \cos\alpha}{r} = \frac{1}{r} KC_0 \cdot \cos\alpha \cdot d\sigma_1.$$

Însă, din triunghiul KC_0B (fig. 30 *b*) avem:

$$\frac{KC_0}{\sin(90° - \beta)} = \frac{BC_0}{\sin(90° - \alpha)},$$

de unde

$$KC_0 \cdot \cos\alpha = BC_0 \cdot \cos\beta = (R - R_1)\cos\beta.$$

Astfel, vom avea

$$d\omega = \frac{R - R_1}{r} \cdot \cos\beta \cdot d\sigma_1;$$

și substituind în locul lui $d\sigma_1$ valoarea sa, obținem

$$d\omega = \frac{R - R_1}{r} \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{BB' \cdot \cos\beta}{\rho},$$

însă

$$BB' \cdot \cos\beta = BP = r \cdot d\varphi_1$$

de unde rezultă

$$d\omega = \frac{R - R_1}{R} \cdot \frac{R_1}{\rho} \cdot d\varphi.$$

Acest unghi $d\omega$ se adaugă la unghiul $d\varphi$, cu care s-ar roti rotița K dacă discul K ar fi imobil; unghiul total de rotație va fi, deci,

$$d\omega + d\varphi = \left(\frac{R - R_1}{R} \cdot \frac{R_1}{\rho} + 1\right) d\varphi,$$

ceea ce înseamnă că va fi proporțional cu unghiul de rotație $d\varphi$ al rotiței K_1 a planimetrului obișnuit.

Mărimea $\frac{R-R_1}{R}$ este apropiată de $\frac{1}{2}$, iar mărimea raportului $\frac{R_1}{\rho}$ este, de obicei, mare (în jurul lui 10), de unde rezultă că $\frac{R-R_1}{R} \cdot \frac{R_1}{\rho} + 1$ va fi aproximativ 6.

Astfel, citirile la planimetrul cu disc pot fi mărite oricît de mult, ceea ce asigură o precizie mai mare.

Eroarea planimetrului lui Amsler, la măsurarea unei arii de circa 100 cm² este de 0,05%, iar eroarea planimetrului cu disc, în același caz, este de 0,01%.

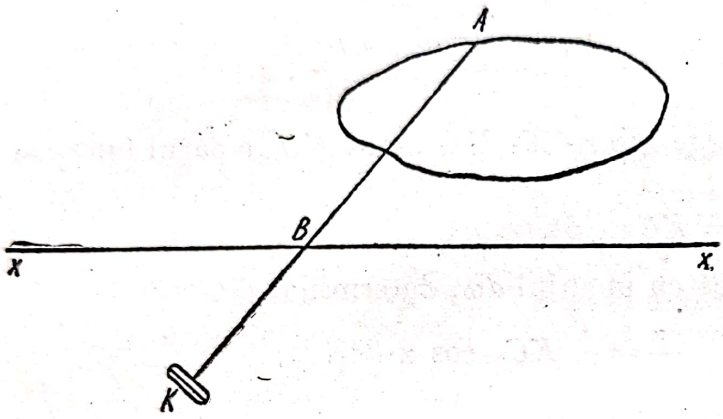

Fig. 31

§ 39. Integratorul lui Amsler, în forma lui cea mai simplă, se deosebește de planimetrul lui Amsler numai prin aceea că punctul B al brațului AK nu se deplasează pe un cerc ca la planimetru, ci pe o dreaptă dată xx (fig. 31). Deoarece formula $Q = k\ (\theta_1 - \theta_0)$ arată că aria Q, conținută în interiorul conturului descris de punctul A, este proporțională cu unghiul de rotație al rotiței, iar coeficientul de proporționalitate nu depinde de raza cercului descris de punctul B, urmează că formula va fi valabilă și în cazul cînd această rază, crescînd nemărginit, va deveni infinită, adică în cazul cînd punctul B se va mișca pe o dreaptă. În acest caz, planimetrul polar se transformă în integratorul figurat pe schiță.

Nu este greu să ne convingem de valabilitatea relației

$$Q = rl\ (\theta_1 - \theta_0)$$

dintre aria mărginită de conturul parcurs de vîrful A al integratorului, lungimea l a brațului AB (fig. 32) și raza rotiței r. În acest scop, trebuie să împărțim numai planul dat în dreptunghiuri elementare, cu baza dx, și să observăm că la parcurgerea laturilor perpendiculare pe axa Ox a unui astfel de dreptunghi, suma rotațiilor rotiței este egală cu zero, în timp ce la parcurgerea laturilor paralele cu axa Ox, ea se exprimă în felul următor:

$$d\theta = \frac{1}{r}\, dx \cdot \cos\,(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{r}\, dx \cdot \sin\,\alpha,$$

însă

$$\sin\alpha = \frac{AP}{AB} = \frac{Y}{l},$$

ceea ce înseamnă că rotația rotiței la deplasarea de la E la F, pe jumătatea superioară a conturului, va fi

$$\theta_2 - \theta_0 = \frac{1}{r}\int_a^b \sin\alpha\, dx = \frac{1}{rl}\int_a^b Y\, dx = \frac{\text{aria } CEAFD}{rl}.$$

La parcurgerea jumătății inferioare a conturului, de la F la E, rotația rotiței va fi

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{r}\int_b^a \sin\alpha\, dx = \frac{1}{rl}\int_b^a y\, dx = -\frac{1}{rl}\int_a^b y\, dx = \frac{-\text{aria } CENFD}{rl}.$$

Aceasta înseamnă că rotația totală a rotiței la parcurgerea conturului va fi

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{\text{aria } CEAFD - \text{aria } CENFD}{rl} = \frac{Q}{rl},$$

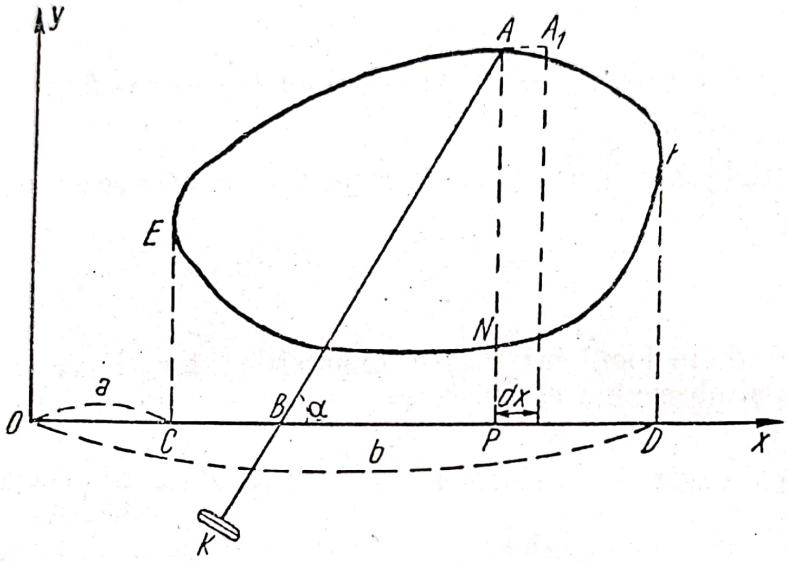

Fig. 32

de unde

$$Q = rl\,(\theta_1 - \theta_0).$$

Amsler a mai prevăzut la integratorul său încă două rotițe suplimentare, cu ajutorul cărora se poate afla: 1) momentul static al ariei înconjurate de vîrful A în raport cu axa Ox și 2) momentul de inerție al acestei arii în raport cu aceeași axă. Pentru a afla momentul static al ariei în raport cu axa Ox, observăm că aceasta se exprimă astfel:

$$M = \frac{1}{2}\int_a^b (Y^2 - y^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b Y^2\, dx - \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx,$$

unde Y este ordonata porțiunii superioare a conturului, iar y, ordonata porțiunii inferioare.

Însă, după cum am văzut

$$Y = l \cdot \sin\alpha; \quad y = l \cdot \sin\alpha_1,$$

unde am notat prin α și α_1 unghiurile formate de dreapta AB cu axa Ox, cînd vîrful este în A, respectiv în N. Aceasta înseamnă că

$$\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b l^2 \sin^2\alpha\, dx = \frac{1}{4}l^3\int_a^b (1 - \cos 2\alpha)\, dx$$

și, prin urmare,

$$M = \frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx + \frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b (1-\cos 2\alpha)\,dx + \int_b^a (1-\cos 2\alpha_1)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b \cos 2\alpha_1\,dx + \int_b^a \cos 2\alpha\,dx\right] =$$

$$= \frac{l^2}{4}\left[\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha_1\right)dx + \int_b^a \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)dx\right].$$

Momentul de inerție al ariei Q în raport cu axa Ox se exprimă prin

$$J = \frac{1}{3}\int_a^b (Y^3 - y^3)\,dx.$$

Substituind în locul lui Y și y expresiile lor $Y = l \cdot \sin\alpha$ și $y = l \cdot \sin\alpha_1$ și observînd că $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, obținem

$$J = \frac{l^3}{4}\int_a^b \sin\alpha\,dx - \frac{l^3}{12}\int_a^b \sin 3\alpha\,dx + \frac{l^3}{4}\int_b^a \sin\alpha_1\,dx - \frac{l^3}{12}\int_b^a \sin 3\alpha_1\,dx,$$

de unde rezultă că

$$J = \frac{l^2}{4}Q - \frac{l^3}{12}\left[\int_a^b \sin 3\alpha\,dx + \int_b^a \sin 3\alpha_1\,dx,\right],$$

deoarece

$$l\int_a^b \sin\alpha\,dx + l\int_b^a \sin\alpha_1\,dx = \int_a^b Y\,dx + \int_b^a y\,dx = \int_a^b (Y-y)\,dx = Q.$$

În acest fel, am redus calculul momentului static și al momentului de inerție al ariei Q în raport cu axa Ox, la calculul integralelor

$$\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)dx \text{ și } \int_a^b \sin 3\alpha\,dx.$$

Pentru a afla mărimile proporționale integralelor

$$\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)dx \text{ și } \int_a^b \sin 3\alpha\,dx,$$

s-a fixat la baza AB (fig. 33) o roată dințată ce constă din două părți, raza uneia fiind de 1,5 ori mai mare decît raza celeilalte. Să notăm

aceste raze prin $2R$ și $3R$. Cu roata mare se angrenează două rotițe dințate mai mici de rază R și pe periferia acestora din urmă sînt fixate axele M și J ale unor role, care se rostogolesc pe planul figurii. Aceste roți se fixează în așa fel, încît, atunci cînd unghiul $\alpha = 0$, axa rolei M este perpendiculară pe axa Ox, în timp ce axa rolei J este paralelă cu axa Ox. Astfel, dacă bara AB va forma cu axa Ox unghiul α, axa rolei M va forma cu această axă unghiul $\frac{\pi}{2} - 2a$, în timp ce axa rolei J va forma unghiul 3α, de unde rezultă că unghiurile de rotație ale acestor două role, la descrierea conturului, vor fi proporționale cu integralele

$$\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx$$

și

$$\int_a^b \sin 3\alpha \, dx$$

care intră în expresia momentului static și a momentului de inerție al ariei Q, a cărei valoare este indicată pe rola S.

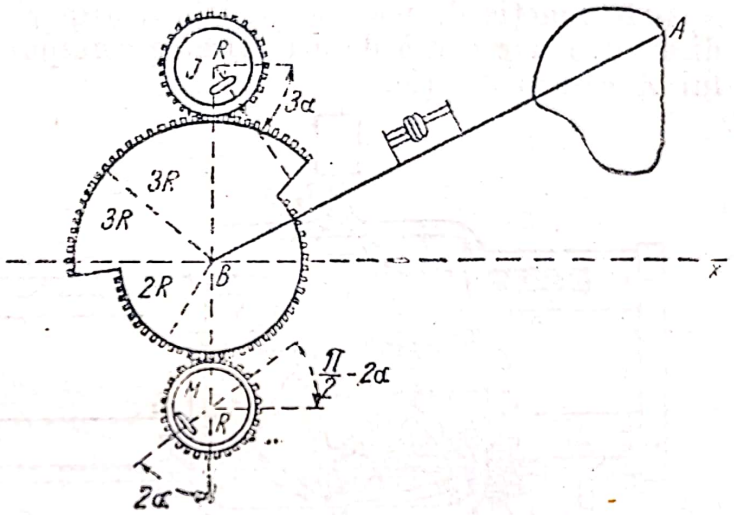

Fig. 33

În afară de integratorul descris, Amsler a mai construit și alte integratoare, la care rolele S, M și J nu se deplasează pe planul figurii, ci pe un disc, a cărui rotație este proporțională cu lungimea drumului descris de punctul B pe axa x. Construcția acestui integrator este în linii generale următoarea.

Pe cadrul R (fig. 34), care constă din două rigle dintre care una are dinți foarte fini, iar a doua un șanț DD_1, se așază un alt cadru CC_2, astfel încît rolele sale C și C_2 să se deplaseze în șanțul DD_1, iar rotița P, prevăzută cu dinți, să se angreneze cu dinții riglei R. Rotița P este fixată de un ax comun cu pinionul conic E, care angrenează un alt pinion conic F, fixat de discul H, astfel încît unghiul de rotație al acestuia din urmă este proporțional cu deplasarea cadrului CC_2 de-a lungul cadrului R. Pe cadrul CC_2 sînt fixați trei suporți Q_1, Q_2, Q_3, pe care se aplică un alt cadru L, ce poartă centrele O, O_1 și O_2 ale unor pinioane angrenate între ele și ale căror raze sînt proporționale cu 3: 2: 1, iar de aceste pinioane sînt fixate axele rolelor S, M, J care se deplasează pe disc. Cel mai mare din aceste pinioane este legat cu ajutorul barei TT_1 printr-o articulație cu bara AB, de care este fixat vîrful pentru parcurgerea conturului. Rotațiile rolelor S, M și J sînt proporționale cu aria conturului, cu momentul static al acestei arii în raport cu dreapta xx_1, descrisă de punctul A și paralelă cu șănțulețul de pe riglă, și cu mărimea integralei $\int_a^b \sin 3\alpha \, dx$, care figurează în expresia momentului de inerție al ariei în raport cu axa xx_1.

§ 40. *Planimetrul-toporaș* constă din vîrful A, cu care se descrie conturul ariei ce trebuie măsurată și care este legat rigid de lama ascuțită și rotunjită B, fixată în așa fel, încît planul ei să treacă prin punctul A. Proprietatea cea mai însemnată a acestei lame constă în aceea că, atunci cînd atinge planul figurii, ea face ca punctul B să se deplaseze pe linia dreaptă ce leagă punctul de contact cu capătul vîrfului A. Astfel, cînd punctul A descrie o linie oarecare, punctul B descrie tractricea (curba de urmărire) corespunzătoare. Această proprietate arată că la planimetrul-toporaș nu există o curbă directoare L constantă, realizată în mod material, ci din contră, această curbă variază în funcție de curba descrisă de vîrful A și în funcție de poziția inițială a dispozitivului; într-un cuvînt, curba directoare este curba de urmărire ce corespunde curbei C și mișcării vîrfului A care o descrie.

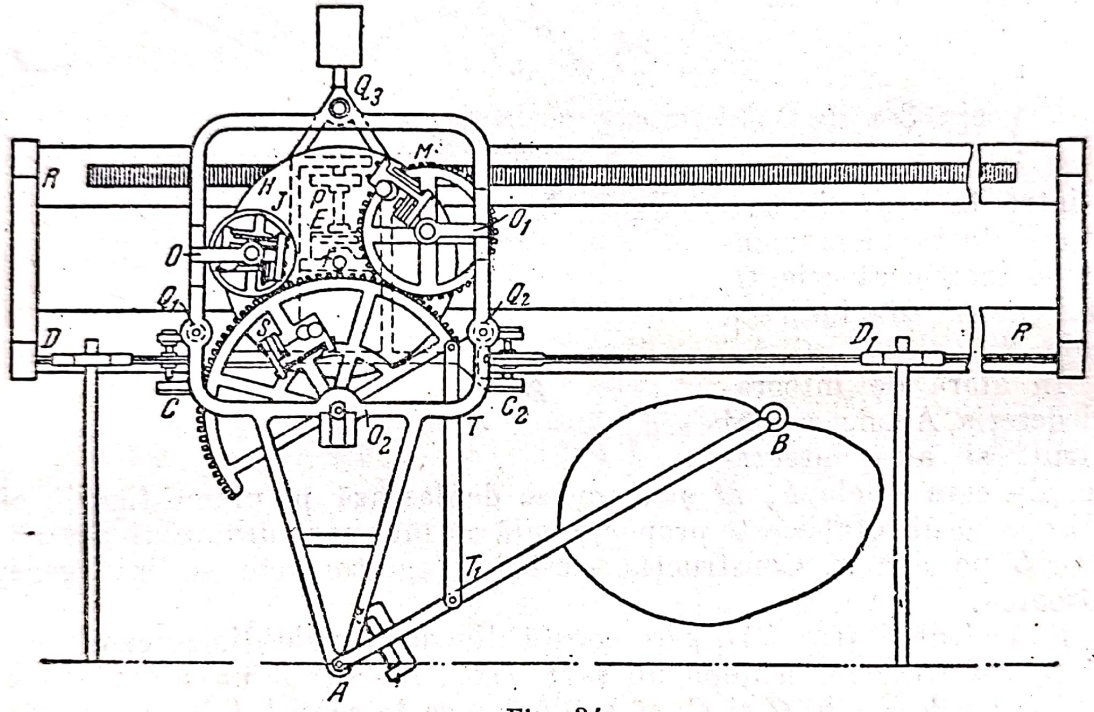

Fig. 34

Să presupunem acum că punctul A al planimetrului, deplasîndu-se din A_0, descrie curba C și revine din nou în A_0; lama B, deplasîndu-se din B_0, desenează atunci linia de urmărire corespunzătoare și ajunge în B_1. Astfel, poziția finală a dreptei AB va fi A_0B_1. Pentru a aduce această dreaptă la coincidență cu poziția ei inițială, nu este nevoie decît să o rotim cu unghiul $\varphi = B_1A_0B_0$ în jurul punctului A_0. În acest caz, linia directoare L va fi completată cu arcul de cerc B_1B_0 (fig. 35), devenind astfel închisă. Aria totală Ω descrisă de linia AB, este egală cu diferența algebrică dintre aria Q și arcele cuprinse între porțiunile curbei directoare, fiecare porțiune trebuind să fie luată cu semnul respectiv.

Astfel, aria descrisă va fi

$$\Omega = Q - (B_0EF + KHB_1 - FGK).$$

Aria descrisă se măsoară prin produsul dintre lungimea lui AB și lungimea arcului s, cu care s-ar roti o rotiță fixată în punctul M.

Pentru a determina acest arc, observăm că, dacă rotița ar fi fixată în B astfel încît axa ei s-ar afla în direcția AB, planul rotiței ar forma

un unghi drept cu planul lamei; deplasarea punctului de contact al rotiței cu planul figurii ar fi totdeauna dirijată perpendicular pe planul rotiței; aceasta înseamnă că rotița ar rămîne imobilă și că indicațiile ei ar fi tot timpul egale cu zero, atîta timp cît punctul A s-ar mișca pe linia de urmărire.

Comparînd acest fapt cu teorema 2, se observă că rotița de măsură, fixată în punctul din mijloc M ar trebui să se rotească cu arcul $\frac{1}{2}l\varphi$, unde φ este unghiul $B_0A_0B_1$, cînd dispozitivul trece în poziția A_0B_1. Atunci, însă, cînd dispozitivul va fi rotit în jurul punctului A_0, pentru a aduce poziția lui finală în coincidență cu cea inițială, rotița care se află în M s-ar mai roti încă cu arcul $\frac{1}{2}l\varphi$.

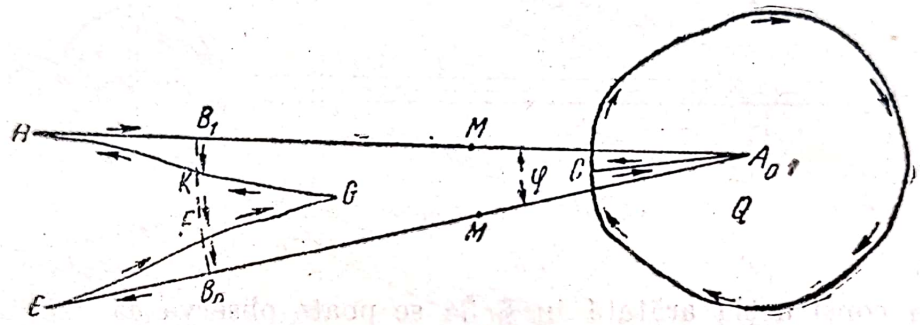

Fig. 35

Astfel, arcul total cu care s-ar roti rotița fixată în M ar fi

$$\frac{1}{2}l\varphi + \frac{1}{2}l\varphi = l\varphi,$$

și, prin urmare, măsura ariei descrise de dreapta AB va fi

$$\Omega = l \cdot l\varphi = l^2\varphi = l \operatorname{arc}(B_0B_1).$$

Avem, deci, următoarea relație

$$l^2\varphi = Q - (B_0EF + KHB_1 - FGK).$$

Printr-o alegere convenabilă a punctului inițial A_0 (acesta trebuie luat în apropierea centrului de greutate al ariei curbei C), putem obține ca suma ariilor $(B_0EF + KHB_1 - FGK)$ să fie apropiată de zero și vom avea relația simplă

$$Q = l^2\varphi \text{ sau } Q = l \operatorname{arc}(B_0B_1).$$

Dacă unghiul φ este mai mic de 20°, arcul B_0B_1 poate fi înlocuit în practică prin coarda sa și vom avea relația

$$Q = l \cdot B_0B_1.$$

Pentru a asigura o mișcare mai regulată a punctului A, s-a modificat puțin construcția planimetrului-toporaș; lama directoare a fost înlocuită printr-o rotiță mică cu o muchie ascuțită; planul acestei rotițe este fixat astfel, încît să treacă prin capătul vîrfului A; acest vîrf se mișcă liber în bucșa sa. Fig. 36 reprezintă dispozitivul așa cum a fost construit după indicațiile mele.

Pentru a folosi acest instrument trebuie să așezăm o bucată de indigo sub rotiță, pentru ca să fie imprimată curba de urmărire și pentru ca să se poată măsura ușor după ea distanța B_0B_1; poziția acestei linii se alege astfel, încît suma ariilor pozitive să fie aproximativ egală cu suma celor negative.

Este de asemenea evident că atunci cînd linia de urmărire a fost desenată, este uşor să se măsoare ariile sus-menţionate şi, prin urmare, să se determine limita erorii făcute.

§ 41. Integraful lui Abdank-Abakanovici efectuează mecanic construcţia care a fost indicată în § 34 pentru găsirea integralei $\int_a^x f(x)\,dx$, cînd funcţia $f(x)$ este dată printr-un grafic.

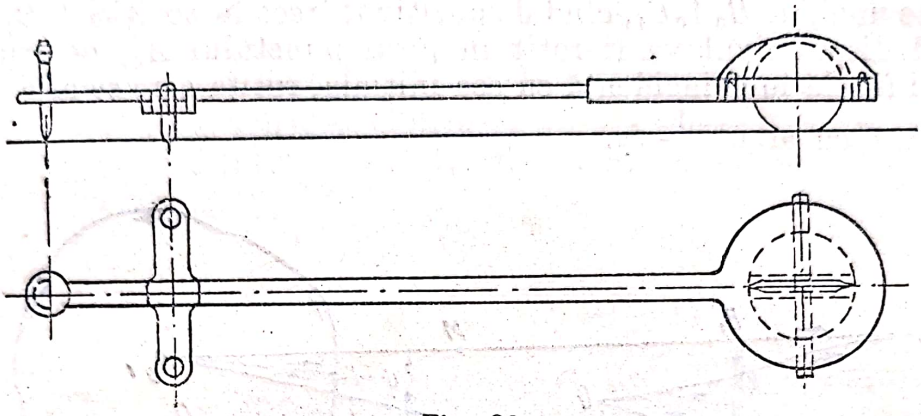

Fig. 36

Din construcţia arătată în § 34 se poate observa că dacă admitem că intervalul dintre ordonate descreşte indefinit, dreapta Ec, ale cărei poziţii particulare sînt E_1c_1, E_2c_2 etc., se va deplasa în mod continuu, iar punctul N va descrie curba căutată de asemenea printr-o deplasare continuă. Această curbă va avea desigur proprietatea că în fiecare punct al ei tangenta este paralelă cu poziţia corespunzătoare a dreptei Ec, cu alte cuvinte punctul N trebuie să fie deplasat o dată cu dreapta Ec, astfel încît în fiecare moment deplasarea punctului să fie paralelă cu dreapta Ec. Această deplasare este efectuată în integraf.

O piesă esenţială a acestui aparat este rotiţa K, arătată în fig. 37; aparatul însuşi este arătat în fig. 38.

Această rotiţă cu muchia ascuţită se poate roti liber în furca ce o susţine. Tija rotundă D a furcii trece printr-un lagăr fixat astfel, încît să se poată deplasa liber pe şina superioară a aparatului.

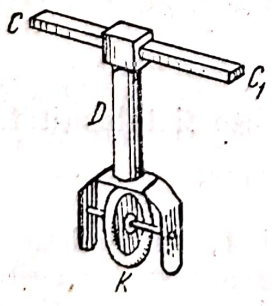

Fig. 37

Această şină este paralelă cu axele rolelor cilindrice, cu care aparatul se aşază pe desen. Axele acestor role sînt absolut paralele între ele şi toate cele patru role au acelaşi diametru. De aceea, dacă aparatul este deplasat în plan, aceasta se face în aşa fel, încît şina se deplasează tot timpul paralel cu poziţia iniţială.

Să vedem mai întîi ce se întîmplă atunci cînd aparatul este deplasat pe planul schiţei cu o distanţă oarecare h (fig. 39), menţinîndu-se, cu ajutorul barei CC_1 (fig. 37), planul rotiţei K sub un unghi constant α faţă de direcţia mişcării.

Deoarece carul se poate deplasa foarte uşor pe şina BB_1 în direcţia perpendiculară la h, iar muchia ascuţită a rotiţei K o împiedică să alunece în planul graficului, fără a o împiedica însă să se rostogolească pe acest plan, urmează că rotiţa K nu va trece în poziţia K', ci se va rostogoli,

rămînînd în planul ei, pînă la poziţia K_2, iar carul se deplasează pe şinele aparatului cu lungimea $K'K_2$. Astfel, centrul rotiţei K şi fiecare punct al carului legat de ea se deplasează paralel cu planul rotiţei o dată cu deplasarea aparatului. Se observă acum uşor scopul şi felul cum funcţionează celelalte părţi ale aparatului. În jurul centrului fixat rigid de rama principală a aparatului, de care este fixată şi şina, se poate roti în planul graficului o riglă cu un şănţuleţ la mijloc. Cu acest şănţuleţ, rigla se aşază pe rolele

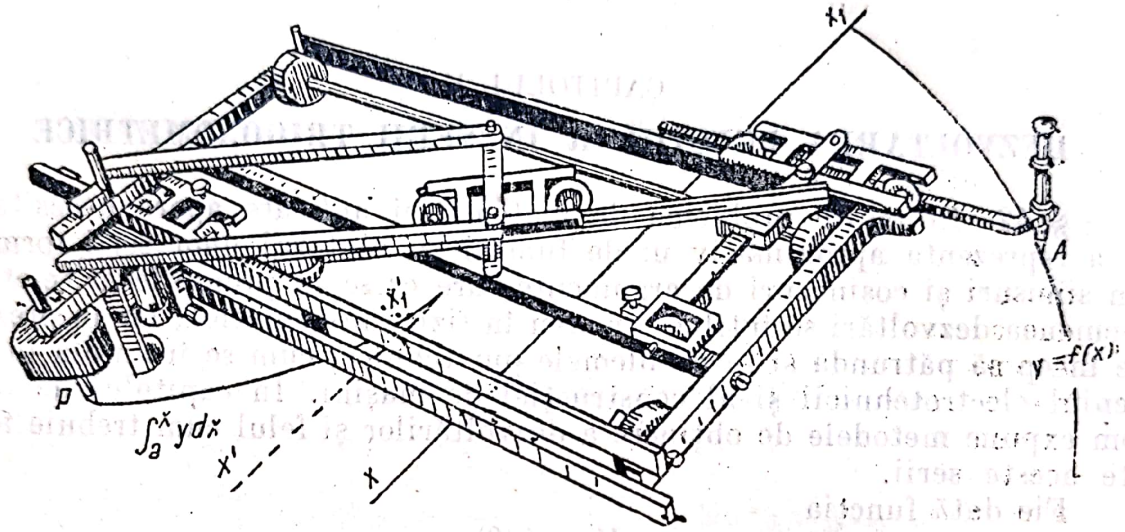

Fig. 38

carului inferior care se deplasează la rîndul lui de-a lungul şinei ramei principale. Acest car poartă vîrful A, care descrie curba dată $f(x)$. Cu ajutorul paralelogramului, planul rotiţei K se menţine paralel cu şanţul riglei rotative, fără ca să împiedice libertatea de mişcare, pe şina superioară, a carului care poartă rotiţa K.

Aparatul funcţionează în felul următor: după ce este aşezat pe planul graficului, astfel încît să se deplaseze în direcţia axei xx_1, rigla din mijloc este fixată paralel cu această axă, iar vîrful A se aşază pe axa xx_1; dacă aparatul este apoi deplasat în planul graficului, vîrful P descrie dreapta $x'x'_1$, paralelă cu axa xx_1, care este axa de la care se socotesc ariile. Dacă se deplasează apoi aparatul încă o dată, descriindu-se cu vîrful A curba dată, vîrful P descrie atunci curba integrală corespunzătoare (curba ariilor), a cărei scară va depinde de poziţia iniţială a aparatului, adică de distanţa dintre centrul de rotaţie al riglei şi proiecţia pe axa xx_1 a centrului de rotaţie al carului inferior, prin intermediul căruia rigla rotativă este legată de vîrful ce descrie curba dată $y=f(x)$. Această distanţă, pe care o notăm cu litera l, serveşte ca unitate pentru scara curbei integrale şi are aceeaşi însemnătate ca şi lungimea E_1b_1, notată prin aceeaşi literă (fig. 16).

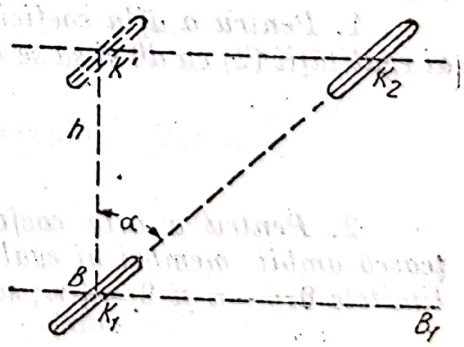

Fig. 39

CAPITOLUL V

DEZVOLTAREA FUNCȚIILOR ÎN SERII TRIGONOMETRICE

§ 42. In multe probleme de matematici aplicate apare necesitatea de a reprezenta aproximativ unele funcții cu ajutorul unor serii formate din sinusuri și cosinusuri de argumente care cresc în progresie aritmetică. Asemenea dezvoltări se întîlnesc mereu în fizica matematică, iar în prezent ele încep să pătrundă și în problemele pur tehnice, cum se întîmplă în domeniul electrotehnicii și al construcției de mașini. În capitolul de față, vom expune metodele de obținere a dezvoltărilor și felul cum trebuie folosite aceste serii.

Fie dată funcția

$$V = f(\theta) \tag{1}$$

de variabila θ în intervalul dintre $\theta = -\pi$ și $\theta = +\pi$; să presupunem că această funcție trebuie reprezentată sub forma unei serii de forma următoare:

$$f(\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \ldots + A_n \cos n\theta + \ldots + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 3\theta + \ldots + B_n \sin n\theta + \ldots \tag{2}$$

Se înțelege de la sine că prima fază a problemei se reduce la indicarea metodei de calcul pentru coeficienții acestei serii, iar a doua la studiul dezvoltării obținute. Pentru calculul coeficienților, Euler a indicat următoarea metodă:

1. *Pentru a afla coeficientul A_0 trebuie să se înmulțească ambii membri ai egalității* (2) *cu $d\theta$ și să se integreze între limitele $-\pi$ și $+\pi$; se obține atunci*

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, d\theta. \tag{3}$$

2. *Pentru a afla coeficientul A_n ($n=1, 2, 3, \ldots$) trebuie să se înmulțească ambii membri ai egalității* (2) *cu $\cos n\theta\, d\theta$ și să se integreze apoi între limitele $\theta = -\pi$ și $\theta = +\pi$; se găsește în acest caz:*

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta. \tag{4}$$

3. *Pentru a afla coeficienții B_n trebuie să se înmulțească ambii membri ai egalității* (2) *cu $\sin n\theta\, d\theta$ și să se integreze între limitele $\theta = -\pi$ și $\theta = +\pi$; se obține astfel:*

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta. \tag{5}$$

Pentru a justifica această metodă, precum și egalitățile (3), (4) și (5), este de ajuns să se observe următoarele egalități:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{n}[\sin n\theta]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{n}[\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = 0, \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\theta \, d\theta = -\frac{1}{n}[\cos n\theta]_{-\pi}^{+\pi} = -\frac{1}{n}[\cos n\pi - \cos(-n\pi)] = 0, \tag{7}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\sin(k+n)\,\theta - \sin(n-k)\,\theta]\, d\theta = 0, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(n-k)\,\theta - \cos(n+k)\theta]\, d\theta = 0, \text{ dacă } k \neq n, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(n-k)\,\theta + \cos(n+k)\,\theta]\, d\theta = 0, \text{ dacă } k \neq n, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta \cos k\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos 2k\theta)\, d\theta = \pi, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \sin k\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \cos 2k\theta)\, d\theta = \pi. \tag{12}$$

În virtutea acestor egalități, se observă că înmulțind egalitatea (2), de exemplu, cu $\cos n\theta \, d\theta$ și integrînd, pentru a obține pe A_n, găsim în membrul întîi

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

iar în membrul al doilea obținem o sumă de integrale de forma

$$A_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta \cos n\theta \, d\theta \text{ și } B_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \cos n\theta \, d\theta,$$

care se anulează toate, în afară de una singură, și anume:

$$A_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta \cos n\theta \, d\theta = \pi \cdot A_n,$$

de unde rezultă

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 43. De la dezvoltarea funcției $f(\theta)$, definită în intervalul $\theta=-\pi$, $\theta=+\pi$, nu este greu să trecem la dezvoltarea oricărei funcții

$$y = F(x),$$

definite în intervalul de la $-l$ la $+l$; trebuie să punem numai

$$\frac{\pi x}{l} = \theta,$$

de unde vom avea

$$y = F\left(\frac{\theta \cdot l}{\pi}\right) = f(\theta),$$

iar formulele (2) ... (5) dau

$$y = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \ldots + A_n \cos n\theta + \ldots + \\ + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + \ldots + B_n \sin n\theta + \ldots,$$

unde

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, d\theta,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

Substituind în aceste formule în locul lui θ mărimea $\frac{\pi x}{l}$ și observînd că $f(\theta)$ se transformă în $F(x)$, iar limitele de integrare în $-l$ și $+l$ și că $d\theta = \frac{\pi}{l}dx$, obținem:

$$y = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{l} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots + A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \ldots + \\ + B_1 \sin\frac{\pi x}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + B_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots, \qquad (13)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F(x)\, dx, \\ A_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Formulele (13) și (14) soluționează problema dezvoltării în serie trigonometrică a unei funcții $F(x)$, definită în intervalul de la $-l$ la $+l$.

În general, dacă funcția $f(\varphi)$ este definită în intervalul dintre $\varphi = \alpha$ și $\varphi = \alpha + 2\pi$, trebuie să punem numai

$$\varphi = \alpha + \pi + \theta;$$

pentru θ, intervalul considerat va fi cuprins între $-\pi$ și $+\pi$, iar în acest interval valorile funcțiilor vor fi cunoscute, și, prin urmare,

$$f(\varphi) = f(\alpha + \pi + \theta) = F(\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \cdots + A_n \cos n\theta + \cdots + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + \cdots + B_n \sin n\theta + \cdots,$$

unde

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\theta)\,d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\theta)\sin n\theta\,d\theta;$$

substituind în locul lui θ expresia respectivă, obținem:

$$f(\varphi) = A_0 + A_1\cos(\varphi - \alpha - \pi) + A_2\cos 2(\varphi - \alpha - \pi) + \cdots + A_n\cos n(\varphi - \alpha - \pi) + \cdots + B_1\sin(\varphi - \alpha - \pi) + B_2\sin 2(\varphi - \alpha - \pi) + \cdots + B_n\sin n(\varphi - \alpha - \pi) + \cdots,$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\,d\varphi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n(\varphi - \alpha - \pi)\,d\varphi = (-1)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n(\varphi - \alpha)\,d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\sin n(\varphi - \alpha - \pi)\,d\varphi = (-1)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\sin n(\varphi - \alpha)\,d\varphi.$$

De aici se observă că funcția $f(\varphi)$, definită în intervalul dintre $\varphi = \alpha$ și $\varphi = \alpha + 2\pi$, poate fi dezvoltată în seria

$$f(\varphi) = A_0 + A_1\cos(\varphi - \alpha) + A_2\cos 2(\varphi - \alpha) + \cdots + A_n\cos n(\varphi - \alpha) + \cdots + B_1\sin(\varphi - \alpha) + B_2\sin 2(\varphi - \alpha) + \cdots + B_n\sin n(\varphi - \alpha) + \cdots, \quad (2')$$

calculînd coeficienții după formulele

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n(\varphi - \alpha)\,d\varphi, \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\sin n(\varphi - \alpha)\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Din aceste formule rezultă imediat că, dacă funcția $F(x)$ este definită în intervalul dintre $x = a$ și $x = a + 2l$, poate fi reprezentată prin seria

$$F(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi(x-a)}{l} + A_2\cos\frac{2\pi(x-a)}{l} + \cdots + A_n\cos\frac{n\pi(x-a)}{l} + \cdots + B_1\sin\frac{\pi(x-a)}{l} + B_2\sin\frac{2\pi(x-a)}{l} + \cdots + B_n\sin\frac{n\pi(x-a)}{l} + \cdots \quad (13')$$

Calculînd coeficienții după formulele

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} F(x)\,dx, \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} F(x)\cos\frac{n\pi\,(x-a)}{l}\,dx, \\ B_n &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} F(x)\sin\frac{n\pi\,(x-a)}{l}\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (14')$$

putem reprezenta pe (2') și într-o altă formă.

Să luăm termenul general

$$A_n\cos n(\varphi-\alpha)+B_n\sin n(\varphi-\alpha),$$

pe care îl putem scrie și în felul următor:

$$(A_n\cos n\alpha - B_n\sin n\alpha)\cos n\varphi + (A_n\sin n\alpha + B_n\cos n\alpha)\sin n\varphi;$$

iar în virtutea expresiilor (3'), vom avea

$$A_n\cos n\alpha - B_n\sin n\alpha = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\,[\cos n(\varphi-\alpha)\cos n\alpha - \sin n(\varphi-\alpha)\sin n\alpha]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi.$$

În același fel, se observă că

$$A_n\sin n\alpha + B_n\cos n\alpha = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Astfel, funcția $f(\varphi)$, definită în intervalul dintre α și $\alpha+2\pi$, poate fi reprezentată prin seria

$$f(\varphi) = A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + \cdots + A_n\cos n\varphi + \cdots + B_1\sin\varphi + B_2\sin 2\varphi + \cdots + B_n\sin n\varphi + \cdots, \quad (2'')$$

unde coeficienții se calculează după formulele

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi. \end{aligned}\right.$$

De aici rezultă că funcția $F(x)$, definită în intervalul de la $x=a$ la $x=a+2l$, poate fi reprezentată prin seria

$$F(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{l} + A_2\cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + A_n\cos\frac{n\pi x}{l} + \cdots + B_1\sin\frac{\pi x}{l} + B_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots + B_n\sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots, \quad (13'')$$

unde coeficienţii se exprimă prin formulele

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} F(x)\,dx, \\ A_n &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \\ B_n &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (14'')$$

§ 44. Să presupunem acum că funcţia dată $F(x)$ este o funcţie pară, adică

$$F(-x) = F(x).$$

Vom avea atunci

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F(x)\,dx = \frac{1}{l}\int_0^{l} F(x)\,dx, \\ A_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

şi

$$B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0,$$

astfel încît rămîne dezvoltarea

$$F(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{l} + A_2\cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + A_n\cos\frac{n\pi x}{l} + \cdots, \qquad (16)$$

unde coeficienţii sînt definiţi de formulele (15).

Dacă presupunem că $F(x)$ este o funcţie impară, astfel încît

$$F(-x) = -F(x),$$

atunci toţi coeficienţii A din formula (13) se anulează, rămînînd numai dezvoltarea ce conţine sinuşi, şi anume:

$$F(x) = B_1\sin\frac{\pi x}{l} + B_2\sin\frac{2\pi x}{l} + B_3\sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots + B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots, \qquad (17)$$

unde

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

§ 45. După cum se observă, toate aceste rezultate decurg de la sine din formulele (2), (3), (4), (5); în privința acestor formule, se pun însă următoarele întrebări:

1. Deducerea formulelor (3), (4), (5) este bazată pe ipoteza că dezvoltarea (2) este valabilă și că seria (2) poate fi integrată *termen cu termen*. Acest lucru necesită o verificare.

2. În privința funcției $f(\theta)$ nu am formulat nici un fel de restricții, în afară de faptul că la calculul coeficienților această funcție este supusă integrării și prin urmare ea poate să fie și discontinuă. Să presupunem că funcția $f(\theta)$ are o discontinuitate pentru $\theta = \theta_0$. Abscisei θ_0 îi corespund atunci două ordonate BE și CE. În membrul al doilea vom avea însă seria

$$A_0 + A_1 \cos \theta_0 + A_2 \cos 2\theta_0 + \cdots + A_n \cos n\theta_0 + \cdots + \\ + B_1 \sin \theta_0 + B_2 \sin 2\theta_0 + \cdots + B_n \sin n\theta_0 + \cdots,$$

care are numai o *singură* valoare. Se pune întrebarea, care din ordonatele BE sau CE reprezintă această serie, sau nici una, nici alta?

3. Dacă facem $\theta = -\pi$ și $\theta = +\pi$, se obține în membrul al doilea aceeași valoare

$$A_0 + A_1 \cos \pi + A_2 \cos 2\pi + A_3 \cos 3\pi + \cdots$$

sau

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + (-1)^n A_n + \cdots,$$

în timp ce în membrul întîi se obține, pentru $\theta = -\pi$, valoarea $f(-\pi)$, iar pentru $\theta = \pi$, valoarea $f(\pi)$. Dacă aceste două valori nu sînt egale între ele, după cum se vede din figură (fig. 40), se pune întrebarea care din aceste două valori reprezintă seria noastră, sau nu cumva nici una din ele?

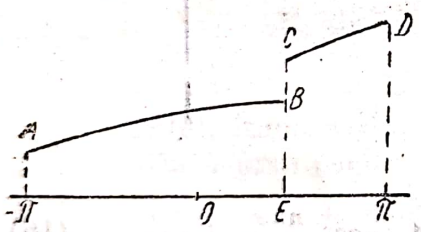

Fig. 40

Toate aceste întrebări au fost rezolvate de Dirichlet, care a demonstrat teorema pe care o vom enunța și demonstra mai jos. În prealabil, vom introduce cîteva noțiuni noi. Să presupunem că $f(\theta)$ are o discontinuitate pentru $\theta = \theta_0$, dar se bucură de proprietatea că $f(\theta_0 - h)$ și $f(\theta_0 + h)$ au limite finite bine determinate atunci cînd variabila pozitivă h tinde către zero. Vom nota aceste limite în felul următor:

$$f(\theta_0 - 0) = \lim_{h \to 0} f(\theta_0 - h); \qquad f(\theta_0 + 0) = \lim_{h \to 0} f(\theta_0 + h) \qquad (h > 0)$$

În acest caz se spune că $f(\theta)$ are pentru $\theta = \theta_0$ o *discontinuitate de prima speță*. Trebuie să avem $f(\theta_0 - 0) \neq f(\theta_0 + 0)$, deoarece în cazul cînd aceste două valori ar fi egale, funcția $f(\theta)$ nu ar fi discontinuă pentru $\theta = \theta_0$. Pe figură (fig. 40), $f(\theta_0 - 0)$ este reprezentată de ordonata EB și $f(\theta_0 + 0)$, de ordonata EC.

Se spune mai departe că funcția $f(\theta)$ satisface, în intervalul finit dintre a și b, *condițiile lui Dirichlet*, dacă 1) *este continuă în acest interval sau are un număr finit de discontinuități de prima speță*; 2) *are un număr finit de maxime și minime în intervalul menționat* și 3) *valorile limită* $f(a + 0)$ *și* $f(b - 0)$ *la capetele intervalului sînt finite.*

În virtutea celor spuse mai sus cu privire la valorile extreme, întregul interval de la a la b poate fi împărțit într-un număr finit de intervale parțiale, în care $f(\theta)$ variază monoton.

Teorema lui Dirichlet. Dacă $f(\theta)$ *verifică în intervalul de la* $-\pi$ *la* $+\pi$ *condițiile lui Dirichlet, atunci la dezvoltarea acestei funcții într-o serie trigonometrică după formulele* (2), (3), (4) *și* (5), *limita sumei primilor* n *termeni ai seriei — cînd* n *crește — este* $f(\theta)$, *pentru fiecare valoare a lui* θ *pentru care funcția* $f(\theta)$ *este continuă; pentru acele valori* $\theta = \theta_k$, *pentru care funcția este discontinuă, suma menționată este:*

$$\frac{1}{2}[f(\theta_k - 0) + f(\theta_k + 0)]$$

și, în sfîrșit, pentru $\theta = -\pi$ *și pentru* $\theta = \pi$, *suma menționată este*

$$\frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(+\pi - 0)].$$

Demonstrarea acestei teoreme este destul de complicată și lungă și este bazată pe aflarea directă a limitei sumei S_n a primilor n termeni ai seriei (2), cînd n tinde către infinit.

Avem:

$$S_n = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \cdots + A_n \cos n\theta + \\ + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + \cdots + B_n \sin n\theta;$$

înlocuind coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ prin valorile lor, scriind sub semnul integral în locul literei θ litera t — pentru evitarea confuziilor — și introducînd factorii $\sin k\theta$ și $\cos k\theta$ sub semnul integral, obținem:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos\theta\cdot\cos t + \cos 2\theta\cdot\cos 2t + \cdots + \cos n\theta\cdot\cos nt + \right. \\ \left. + \sin\theta\cdot\sin t + \sin 2\theta\cdot\sin 2t + \cdots + \sin n\theta\cdot\sin nt\right] dt$$

sau

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-\theta) + \cos 2(t-\theta) + \cdots + \cos n(t-\theta)\right] dt.$$

Suma din parantezele drepte reprezintă suma cosinușilor unor arcuri care cresc în progresie aritmetică; se știe că

$$\frac{1}{2} + \cos(t-\theta) + \cos 2(t-\theta) + \cdots + \cos n(t-\theta) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t-\theta}{2}}{2\sin\frac{t-\theta}{2}},$$

astfel încît vom avea

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt,$$

sau punînd

$$z = \frac{t-\theta}{2},$$

obținem:

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi+\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz. \tag{18}$$

În acest fel, întreaga problemă a fost redusă la studiul integralei (18). Să presupunem mai întîi că θ nu este egal nici cu $-\pi$, nici cu $+\pi$; avem atunci:

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi+\theta}{2}}^{0} f(\theta+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz$$

sau, punînd în a doua integrală $z = -u$:

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi+\theta}{2}} f(\theta-2u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du, \tag{18'}$$

de unde rezultă că problema noastră se reduce la studiul integralelor din formula (18').

§ 46. Pentru studiul acestor integrale vom demonstra mai întîi așa-numita a doua teoremă a mediei: *fie $f(x)$ o funcție oarecare continuă în intervalul dintre a și b și să presupunem că $\varphi(x)$ este o funcție monotonă și mărginită în acest interval; atunci*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

unde ξ este o anumită valoare din intervalul dat.

Este suficient să se demonstreze această formulă pentru cazul unei funcții $\varphi(x)$ descrescătoare, căci dacă $\varphi(x)$ este o funcție crescătoare, $[-\varphi(x)]$ este descrescătoare și, aplicînd formula la $[\varphi(x)]$ și schimbînd în ambii membri ai egalității semnele, obținem egalități de același fel pentru $\varphi(x)$. Vom admite deci că $\varphi(x)$ este o funcție descrescătoare sau, mai bine zis, o funcție necrescătoare. Să presupunem că

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Împărțim intervalul dintre a și b în k părți, notînd cu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ abscisele punctelor intermediare. După prima teoremă a mediei avem atunci:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i),$$

unde ξ_i aparţine intervalului dintre x_i şi x_{i+1}.

Scriind egalităţile analoge pentru toate valorile lui i de la 0 la $(k-1)$, înmulţind fiecare egalitate cu $\varphi(\xi_i)$ şi adunîndu-le, obţinem:

$$\varphi(\xi_0)[F(x_1)-F(x_0)]+\varphi(\xi_1)[F(x_2)-F(x_1)]+\cdots+\varphi(\xi_{k-1})[F(b)-F(x_{k-1})]=$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}(x_{i+1}-x_i)\,\varphi(\xi_i)\,f(\xi_i),$$

unde $F(a)=0$. Suma din membrul întîi al acestei egalităţi poate fi transcrisă în felul următor:

$$F(x_1)[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_1)]+F(x_2)[\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)]+\cdots$$
$$\cdots+F(x_{k-1})[\varphi(\xi_{k-2})-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\,\varphi(\xi_{k-1}).$$

Dacă notăm cu m şi M respectiv valoarea minimă şi maximă a funcţiei $F(x)$ în intervalul dintre a şi b, unde aceasta este continuă, atunci, luînd în considerare faptul că nici una din diferenţele $\varphi(\xi_i)-\varphi(\xi_{i+1})$ nu este negativă, putem afirma că la înlocuirea tuturor $F(x_i)$ prin m, suma precedentă nu devine mai mare, iar la înlocuirea tuturor $F(x_i)$ prin M, aceasta nu devine mai mică. După prima înlocuire, expresia de mai sus va deveni:

$$m\{[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_1)]+[\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)]+\cdots+[\varphi(\xi_{k-2})-\varphi(\xi_{k-1})]\}+$$
$$+F(b)\,\varphi(\xi_{k-1})=m[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\,\varphi(\xi_{k-1}),$$

iar după a doua înlocuire, vom obţine:

$$M[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\,\varphi(\xi_{k-1}).$$

Ajungem astfel la inegalitatea

$$m[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\,\varphi(\xi_{k-1})\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}(x_{i+1}-x_i)\,\varphi(\xi_i)\,f(\xi_i)\leqslant$$
$$\leqslant M[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\,\varphi(\xi_{k-1}).$$

Să trecem în această inegalitate la limită, admiţînd că numărul diviziunilor k creşte nemărginit şi că cea mai mare din diferenţele $(x_{i+1}-x_i)$ tinde către zero. Suma din membrul din mijloc al acestei inegalităţi tinde atunci către limita

$$\int_a^b\varphi(x)\,f(x)\,dx;$$

ξ_0 are ca limită a, deoarece această valoare este cuprinsă între a şi x_1, iar ξ_{k-1} tinde în acelaşi fel către b.

Astfel, inegalitatea precedentă ne dă la limită

$$m[\varphi(a+0)-\varphi(b-0)]+F(b)\,\varphi(b-0)\leqslant\int_a^b\varphi(x)\,f(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant M[\varphi(a+0)-\varphi(b-0)]+F(b)\,\varphi(b-0);$$

prin urmare, putem găsi un număr p, care satisface inegalitatea $m \leqslant p \leqslant M$, pentru care

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = p[\varphi(a+0) - \varphi(b-0)] + F(b)\,\varphi(b-0).$$

Se știe însă că funcția continuă $F(x)$ ia toate valorile cuprinse între valoarea minimă m și maximă M, din care cauză putem găsi o astfel de valoare ξ din intervalul $[a, b]$, încît

$$p = F(\xi).$$

Formula precedentă se poate deci transcrie sub forma:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = [\varphi(a+0) - \varphi(b-0)]F(\xi) + \varphi(b-0)\, F(b)$$

sau

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0)\, F(\xi) + \varphi(b-0)\,[F(b) - F(\xi)].$$

Luînd în considerare definiția lui $F(x)$, obținem:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b-0)\left[\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^\xi f(x)\, dx\right],$$

de unde rezultă

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\, dx,$$

ceea ce trebuia demonstrat. Dacă $\varphi(x)$ este continuă pentru $x = a$ și $x = b$, atunci formula se transcrie sub forma:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\, dx.$$

Deoarece „teoremele de medie“ vor servi ca bază pentru întreaga teorie a seriilor trigonometrice, ne vom mai opri încă asupra acestor teoreme.

Prima teoremă a mediei. Dacă $f(x)$ și $\varphi(x)$ sînt continue în intervalul dintre a și b (inclusiv capetele intervalului) și pe lîngă aceasta $f(x)$ nu-și schimbă semnul în acest interval, atunci

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\, dx,$$

unde ξ aparține intervalului indicat.

Să presupunem că $f(x)$ rămîne pozitivă în intervalul dintre a și b. Să presupunem mai departe că A și B reprezintă respectiv valoarea minimă și maximă a lui $\varphi(x)$ în intervalul dat. În acest fel, vom avea totdeauna

$$\varphi(x) - B \leqslant 0 \text{ și } \varphi(x) - A \geqslant 0,$$

de unde rezultă

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x) - B]\,dx \leqslant 0$$

și

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x) - A]\,dx \geqslant 0,$$

sau altfel

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant B\int_a^b f(x)\,dx$$

și

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqslant A\int_a^b f(x)\,dx.$$

De aici se poate observa că există un număr C, care satisface inegalitatea $A \leqslant C \leqslant B$, pentru care vom avea

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx,$$

și deoarece $\varphi(x)$ este continuă, există o valoare $x = \xi$, pentru care

$$\varphi(\xi) = C.$$

În acest caz vom avea

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Evident că demonstrarea poate fi efectuată în același fel și în cazul cînd $f(x)$ este tot timpul negativă.

A doua teoremă a mediei, care a fost demonstrată mai sus, se exprimă prin egalitatea

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Vom demonstra acum această formulă, admițînd, ca și mai înainte, că $f(x)$ este continuă, iar $\varphi(x)$ o vom considera nu numai monotonă, ci și continuă și cu derivata continuă $\varphi'(x)$. În virtutea faptului că $\varphi(x)$ este o funcție monotonă, rezultă că derivata își păstrează semnul neschimbat.

Să presupunem că

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

și, deci,

$$F'(x) = f(x),$$

$$\int_a^b \varphi(x) F'(x)\,dx = [\varphi(x) F(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \varphi'(x) F(x)\,dx =$$

$$= \varphi(b) \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi'(x) F(x)\,dx,$$

deoarece este evident că

$$F(a) = 0 \text{ și } F(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Deoarece, prin ipoteză, funcția $\varphi'(x)$ își păstrează semnul neschimbat, urmează că după prima teoremă a mediei vom avea

$$\int_a^b \varphi'(x) F(x)\,dx = F(\xi) \int_a^b \varphi'(x)\,dx = F(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)] =$$

$$= [\varphi(b) - \varphi(a)] \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Substituind, obținem:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b) \left[\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^\xi f(x)\,dx \right] =$$

$$= \varphi(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Aceasta este tocmai egalitatea care exprimă a doua teoremă a mediei.

§ 47. Pentru a demonstra teorema lui Dirichlet mai avem nevoie de încă două leme.

Lema 1. Dacă $F(z)$ verifică în intervalul dintre 0 și b condițiile lui Dirichlet, avem

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b F(z) \frac{\sin \mu z}{z}\,dz = \frac{1}{2} F(+0). \qquad (*)$$

Pentru a demonstra aceasta, vom admite deocamdată nu numai că $F(z)$ verifică condiţiile lui Dirichlet, dar şi că această funcţie este monotonă în intervalul dintre 0 şi b.

Se ştie că

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Să considerăm integrala

$$\int_0^{c} \frac{\sin z}{z}\, dz,$$

care este o funcţie continuă de c, care se anulează pentru $c = 0$ şi care tinde către $\frac{\pi}{2}$, cînd c creşte nemărginit. De aici putem deduce că această integrală rămîne, pentru toate valorile pozitive ale lui c, mai mică în valoare absolută decît un anumit număr pozitiv M. Să considerăm acum integrala cu două limite pozitive oarecare

$$\int_p^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Avem:

$$\int_p^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz = \int_0^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz - \int_0^{p} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

$$\left| \int_p^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| \leqslant \left| \int_0^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| + \left| \int_0^{p} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| < 2M.$$

Înainte de a trece la demonstrarea egalităţii (*), vom analiza integrala mai simplă

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{b} \frac{\sin \mu z}{z}\, dz.$$

Efectuînd substituţia $u = \mu z$, obţinem:

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{b} \frac{\sin \mu z}{z}\, dz = \lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu b} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

şi, prin urmare,

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{b} F(+0) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz = \frac{1}{2} F(+0).$$

Pentru a demonstra formula (*), este suficient să arătăm că

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b [F(z)-F(+0)]\frac{\sin\mu z}{z}\,dz=0,$$

sau că expresia care figurează sub semnul integral este mai mică în valoare absolută decît orice ε pozitiv dat, pentru valori suficient de mari ale lui μ. Să împărțim intervalul de integrare dintre 0 și b în două: de la 0 la δ și de la δ la b, unde numărul δ va fi ales mai tîrziu. Să arătăm că fiecare din integralele

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [F(z)-F(+0)]\frac{\sin\mu z}{z}\,dz \text{ și } \frac{1}{\pi}\int_\delta^b [F(z)-F(+0)]\frac{\sin\mu z}{z}\,dz \qquad (**)$$

este, în valoare absolută, mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$, pentru toate valorile suficient de mari ale lui μ. Putem alege pe δ atît de mic, încît în intervalul dintre 0 și δ, $F(z)$ să nu aibă discontinuități.

Luînd în considerare faptul că $F(z)$ este o funcție monotonă și aplicînd a doua teoremă a mediei, obținem:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [F(z)-F(+0)]\frac{\sin\mu z}{z}\,dz=\frac{1}{\pi}[F(\delta)-F(+0)]\int_\xi^\delta \frac{\sin\mu z}{z}\,dz,$$

de unde

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [F(z)-F(+0)]\frac{\sin\mu z}{z}\,dz\right|<\frac{1}{\pi}\left|F(\delta)-F(+0)\right|\cdot 2M.$$

Numărul pozitiv δ poate fi ales atît de apropiat de zero, încît ultima expresie să fie $<\frac{\varepsilon}{2}$. Să trecem acum la a doua din integralele (**); aplicînd și la aceasta a doua teoremă a mediei, obținem:

$$\frac{1}{\pi}[F(\delta)-F(+0)]\int_\delta^\xi \frac{\sin\mu z}{z}\,dz+\frac{1}{\pi}[F(b-0)-F(+0)]\int_\xi^b \frac{\sin\mu z}{z}\,dz.$$

Factorii care înmulțesc integralele sînt constanți și nu ne rămîne decît să arătăm că ambele integrale tind către zero atunci cînd μ crește indefinit. După aceasta, vom putea afirma că a doua din integralele (**) este în valoare absolută $<\frac{\varepsilon}{2}$, pentru toate valorile suficient de mari ale lui μ. Introducînd noua variabilă de integrare $u=\mu z$, obținem:

$$\int_\delta^\xi \frac{\sin\mu z}{z}\,dz=\int_{\mu\delta}^{\mu\xi}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Deoarece δ este un număr pozitiv fix și $\xi > \delta$, urmează că atît $\mu\delta$ cît și $\mu\xi$ tind către infinit, iar ultima integrală tinde evident către zero. În mod absolut analog raționăm și în privința integralei

$$\int_{\xi}^{b} \frac{\sin \mu z}{z}\, dz = \int_{\mu\xi}^{\mu b} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Astfel, formula (*) a fost demonstrată în ipoteza că $F(z)$ este o funcție monotonă. Să presupunem acum că $F(z)$ satisface condițiile lui Dirichlet. În virtutea acestor condiții, intervalul dintre 0 și b poate fi împărțit într-un număr finit de intervale parțiale, în care $F(z)$ este monotonă. Să presupunem, spre exemplu, că există trei intervale parțiale: $(0, b_1), (b_1, b_2)\ (b_2, b)$.

Avem:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{b} F(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{b_1} F(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz + \frac{1}{\pi}\int_{b_1}^{b_2} F(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz + \frac{1}{\pi}\int_{b_2}^{b} F(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz.$$

Prima integrală din membrul al doilea are limita $F(+0)$, și nu rămîne decît să demonstrăm că celelalte două integrale se anulează la limită. Ne vom mărgini la examinarea primei dintre ele. Să prelungim funcția $F(z)$ din intervalul (b_1, b_2) în intervalul $(0, b_1)$, astfel încît funcția $F_1(z)$, obținută în acest fel, să fie monotonă în intervalul $(0, b_2)$. În intervalul (b_1, b_2), funcția $F_1(z)$ coincide prin construcție cu $F(z)$. Avem:

$$\frac{1}{\pi}\int_{b_1}^{b_2} F(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{b_2} F_1(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{b_1} F_1(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz.$$

În membrul al doilea, ambele integrale tind către $F_1(+0)$, potrivit celor demonstrate, din care cauză diferența lor tinde către zero, ceea ce am vrut să demonstrăm. În acest fel, formula (*) a fost demonstrată pentru toate funcțiile $F(z)$ care satisfac condițiile lui Dirichlet în intervalul dintre 0 și b, de unde rezultă valabilitatea lemei 1.

Lema 2. Dacă $F(z)$ satisface în intervalul dintre 0 și b condițiile lui Dirichlet, iar $0 < b < \pi$, avem

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{b} F(z) \frac{\sin \mu z}{\sin z}\, dz = \frac{1}{2} F(+0). \qquad (***)$$

În această demonstrație, vom presupune deocamdată că $F(z)$ este o funcție pozitivă și nu descrește în intervalul dintre 0 și b. Raportul $\frac{z}{\sin z}$ este pozitiv, crescător și rămîne mărginit în intervalul amintit, deoarece $b < \pi$. Prin urmare, funcția $\Phi(z) = F(z)\frac{z}{\sin z}$ este pozitivă și nu descrește în intervalul dat. Din formula

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{b} F(z) \frac{\sin \mu z}{\sin z}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{b} \Phi(z) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz$$

Scanned with OKEN Scanner

și lema 1 rezultă imediat că integrala scrisă mai sus tinde către $\Phi(+0)$. Însă, din definiția lui $\Phi(z)$ rezultă direct că $\Phi(+0) = F(+0)$, de unde urmează că formula (***) este demonstrată pentru cazul unei funcții $F(z)$ pozitive și nedescrescătoare. Prin aceasta, formula este valabilă și atunci cînd $F(z)$ este o constantă pozitivă. Dacă $F(z)$ nu descrește și este mărginită, dar nu este pozitivă, se poate alege un număr pozitiv p, astfel încît funcția nedescrescătoare $F(z) + p$ să fie pozitivă. La această funcție putem aplica formula (***):

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b [F(z)+p]\frac{\sin\mu z}{\sin z}\,dz = \frac{1}{2}F(+0)+\frac{1}{2}p.$$

Însă, după cum am văzut mai sus,

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b p\frac{\sin\mu z}{z}\,dz = \frac{1}{2}p,$$

astfel încît formula (***) este valabilă pentru $F(z)$. Rezultă, deci, că am demonstrat această formulă pentru toate funcțiile nedescrescătoare. Dacă $F(z)$ este o funcție necrescătoare, atunci $[-F(z)]$ este o funcție nedescrescătoare, iar pentru aceasta putem scrie formula (***). Astfel, formula a fost demonstrată pentru toate funcțiile monotone. Extinderea formulei la cazul oricărei funcții $F(z)$ care satisface condițiile lui Dirichlet poate fi efectuată în același fel ca și în cazul formulei (*) la demonstrarea lemei 1.

Să trecem acum la demonstrarea teoremei lui Dirichlet privitoare la limita sumei S_n a primilor termeni ai seriei (2). Pentru această sumă am avut formula (18'). Dacă $-\pi < \theta < +\pi$, ambele limite superioare ale integralelor din membrul al doilea al formulei sînt cuprinse între 0 și π, astfel încît se poate aplica ambelor integrale lema 2, știind că pentru prima integrală avem $F(z) = f(\theta - 2z)$, iar pentru cealaltă $F(z) = f(\theta + 2z)$. În primul caz, $F(+0) = f(\theta - 0)$ și în al doilea $F(+0) = f(\theta + 0)$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}[f(\theta-0)+f(\theta+0)],$$

ceea ce am vrut să demonstrăm.

Să presupunem că $\theta = \pi$. Formula (18') ia atunci forma

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\pi - 2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du.$$

Să împărțim această integrală în două:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi-2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du,$$

făcînd în a doua din ele schimbarea de variabilă $u = \pi - z$; vom avea:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}\,dz.$$

În fiecare din aceste două integrale, limitele superioare sînt mai mici decît π şi, prin urmare,

$$\lim S_n = \frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)].$$

La acelaşi rezultat ajungem şi dacă $\theta = -\pi$.

Aşadar, teorema lui Dirichlet este demonstrată.

§ 48. Din însăşi metoda prin care am obţinut seriile pentru reprezentarea funcţiilor definite între $-l$ şi $+l$, rezultă că în punctele unde funcţia este continuă, suma seriei va reprezenta valoarea funcţiei, iar în punctele de discontinuitate, suma seriei va reprezenta media aritmetică a celor două valori ale funcţiei corespunzătoare punctului de discontinuitate; în sfîrşit, pentru $x = -l$ şi $x = +l$, suma seriei va reprezenta semisuma valorilor

$$\frac{1}{2}[f(-l.+0) + f(l-0)].$$

Evident că aceste proprietăţi se referă şi la dezvoltările din § 44 pentru funcţiile pare [formulele (15) şi (16)] şi pentru funcţiile impare [formula (17)].

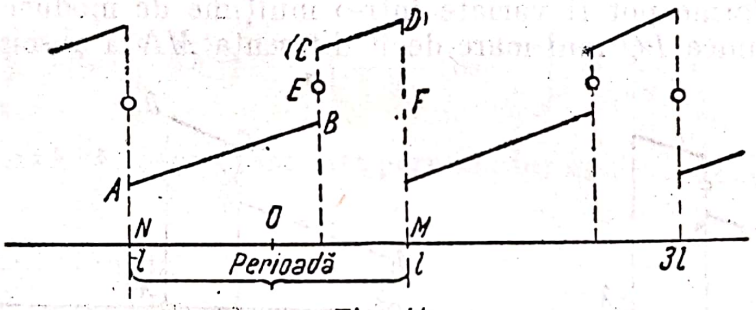

Fig. 41

Suma seriei reprezintă o funcţie periodică cu perioada 2π în cazul formulei (2) şi cu perioada $2l$ în celelalte cazuri; astfel, dacă linia $ABCD$ reprezintă funcţia dată în intervalul dintre $-l$ şi $+l$, seria reprezintă această funcţie precum şi repetarea ei periodică, după cum se arată în fig. 41; în punctele de discontinuitate, seria reprezintă semisuma ordonatelor corespunzătoare.

Dacă notăm intervalul NM cu λ şi admiţînd că originea este în punctul N, considerăm această funcţie ca fiind pară şi o dezvoltăm într-o serie de cosinuşi, adică după formula

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\lambda} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \cdots + A_n \cos\frac{n\pi x}{\lambda} + \cdots,$$

unde

$$A_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\,dx,$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx;$$

suma seriei este reprezentată de graficul din fig. 42, deoarece această serie presupune că $f(-x) = f(x)$, cînd $-\lambda < x < \lambda$.

Dacă această funcție este considerată ca fiind impară și o dezvoltăm după formula

$$f(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \cdots + B_n \sin\frac{n\pi x}{\lambda} + \cdots,$$

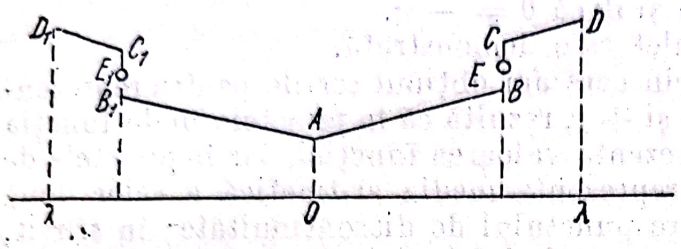

Fig. 42

unde

$$B_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\lambda}\, dx,$$

suma seriei este reprezentată de graficul fig. 43, și pentru abscisele

$$0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots$$

suma ne dă valoarea 0.

Se vede de aici că aceeași porțiune a curbei $ABCD$ poate fi reprezentată sub diferite forme.

Aceste forme pot fi variate într-o mulțime de moduri, luînd pentru $2l$ sau λ lungimea PQ mai mare decît diferența MN a absciselor punctelor

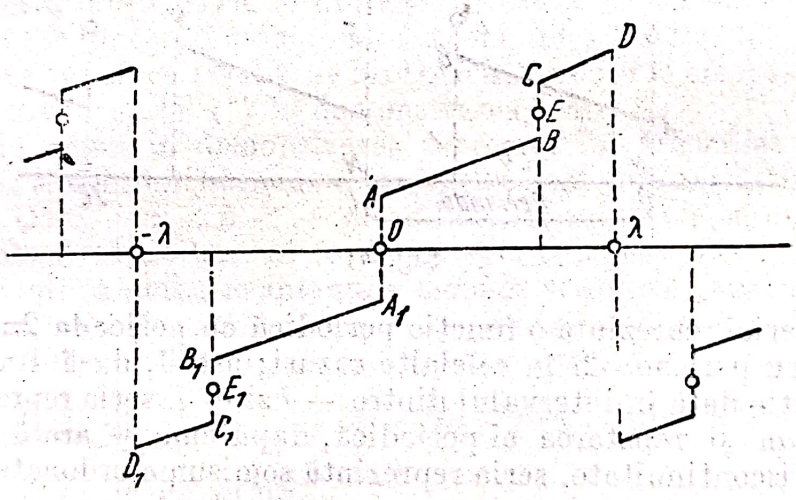

Fig. 43

A și B, de exemplu așa cum se arată în fig. 44, și admițînd că $f(x) = 0$ între P și M și, de asemenea, între N și Q. Dezvoltarea obținută va reprezenta în intervalul dintre M și N ordonatele liniei $ABCD$, iar în punctele M și N numai jumătatea ordonatelor AM și DN.

§ 49. Să dăm acum cîteva exemple de dezvoltare a funcțiilor în serii trigonometrice.

Exemplul 1. Funcția $f(x)$ este reprezentată în intervalul MN de linia AB, adică are valoarea constantă a; să se dezvolte această funcție într-o serie de sinuși, luînd ca origine a coordonatelor punctul M și punînd $MN = \lambda$ (fig. 45):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{k\pi x}{\lambda},$$

unde

$$B_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}\,dx.$$

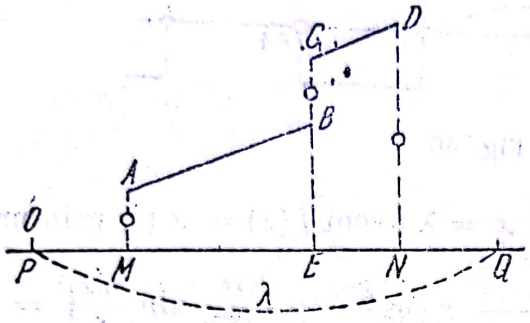

Fig. 44

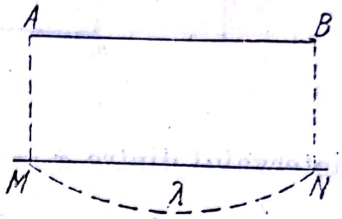

Fig. 45

În cazul nostru, avem pentru intervalul dintre $x = 0$ și $x = \lambda$, funcția $f(x) = a$; prin urmare,

$$B_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} a\sin\frac{k\pi x}{\lambda}\,dx = \frac{2a}{\lambda}\cdot\left[-\frac{\lambda}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\right]_0^{\lambda} = \frac{2a}{k\pi}\,[1-\cos k\pi],$$

de unde se observă că, pentru valorile pare ale lui k,

$$B_k = 0,$$

iar pentru valorile impare

$$B_k = \frac{4a}{k\pi}.$$

Astfel,

$$B_{2p+1} = \frac{4a}{(2p+1)\pi},\quad B_{2p} = 0,$$

iar dezvoltarea noastră va avea forma

$$f(x) = \frac{4a}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots\right].$$

De aici rezultă că pentru $0 < x < \lambda$ [deoarece $f(x) = a$]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots \qquad (19)$$

și în cazul particular, cînd, de exemplu, $x = \frac{1}{2}\lambda$, vom avea

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Pentru $x = \lambda$ și pentru $x = 0$ suma seriei este 0 și nu a. Pentru celelalte valori ale lui x, suma seriei reprezintă acele valori care rezultă din periodicitate și sînt reprezentate în fig. 46.

Exemplul 2. Funcția $f(x)$ este egală cu x în intervalul dintre 0 și N; să se ia $\lambda = ON$ și să se dezvolte funcția $f(x)$: 1) după sinuși; 2) după cosinuși. Să se reprezinte grafic funcția reprezentată prin dezvoltările obținute.

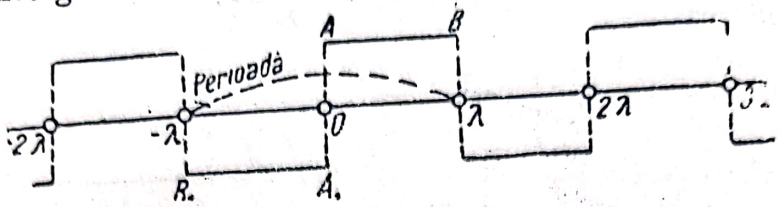

Fig. 46

În intervalul dintre $x = 0$ și $x = \lambda$ avem $f(x) = x$ și, prin urmare,

$$B_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} x \sin\frac{k\pi x}{\lambda}\,dx = \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{\lambda}{k\pi}\,x\cos\frac{k\pi x}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{\lambda}\right]_0^{\lambda} =$$

$$= -\frac{2\lambda}{\pi k}\cos k\pi = \frac{2\lambda}{\pi k}\cdot(-1)^{k+1}.$$

Astfel, avem:

$$f(x) = \frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\lambda} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\lambda} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{\lambda} + \cdots\right];$$

în intervalul dintre $x = -\lambda$ și $x = +\lambda$, funcția $f(x) = x$, iar pentru

$$x = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots, f(x) = 0.$$

Graficul funcției este reprezentat în fig. 47.

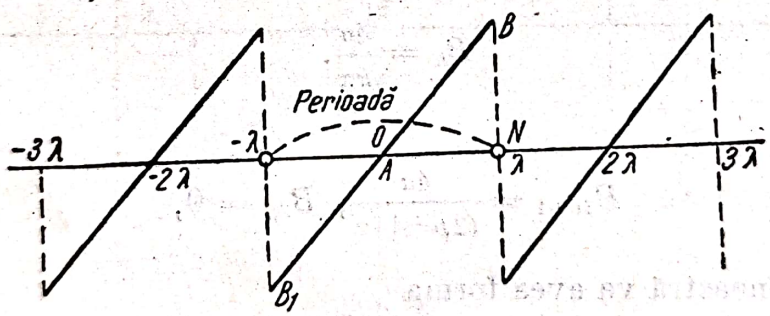

Fig. 47

Pentru dezvoltarea după cosinuși, avem

$$A_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} x\,dx = \frac{1}{2}\,\lambda,$$

$$A_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} x\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\,dx = \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{k\pi}\,x\sin\frac{k\pi x}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\right]_0^{\lambda} =$$

$$= \frac{2\lambda}{k^2\pi^2}[\cos k\pi - 1],$$

și, prin urmare,

$$A_{2p} = 0$$

şi

$$A_{2p+1} = \frac{-4\lambda}{(2p+1)^2 \cdot \pi^2};$$

rezultă, deci,

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots\right].$$

Graficul funcţiei $f(x)$, egală cu x în intervalul dintre $x = 0$ şi $x = \lambda$, este reprezentat în fig. 48.

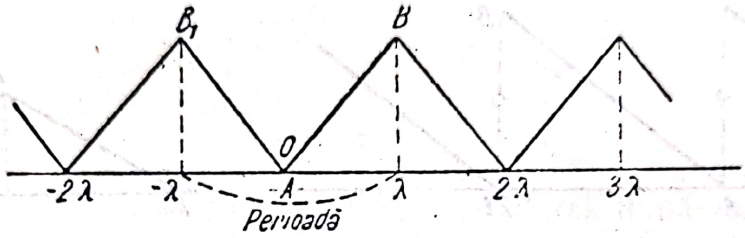

Fig. 48

Astfel, avem formula valabilă între limitele 0 şi λ:

$$x = \frac{1}{2}\lambda - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots\right] \qquad (20)$$

Dacă punem $x = 0$, obţinem:

$$0 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right],$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8},$$

o formulă cunoscută, găsită de Euler. Dacă punem $x = \lambda$, găsim:

$$\lambda = \frac{1}{2}\lambda + \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right],$$

de unde rezultă aceeaşi valoare pentru suma de mai sus.

Exemplul 3. Funcţia $f(x)$ este definită în intervalul dintre $x = 0$ şi $x = 2l$, fiind egală cu x.

Făcînd în formulele (13′) şi (14′) $\alpha = 0$, şi punînd $F(x) = x$ în intervalul dintre 0 şi $2l$, avem:

$$A_0 = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} x\,dx = l,$$

$$A_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} x\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{2l} = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\left[-\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{2l} = -\frac{2l}{n\pi},$$

de unde rezultă că dezvoltarea funcției $F(x)$ va fi

$$F(x) = l - \frac{2l}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots\right]. \qquad (21)$$

Graficul acestei funcții, a cărei perioadă este $2l$ și care este egală cu x în intervalul dintre 0 și $2l$, este reprezentat în fig. 49; pentru $x = 0$ și $x = 2l$ se obține numai jumătatea ordonatelor corespunzătoare, adică $F(0) = l$.

Exemplul 4. Funcția $f(x)$, definită în intervalul dintre $x = 0$ și $x = \lambda$, este reprezentată grafic în fig. 50; să se reprezinte această funcție sub forma unei serii, dezvoltate: 1) după sinuși, 2) după cosinuși.

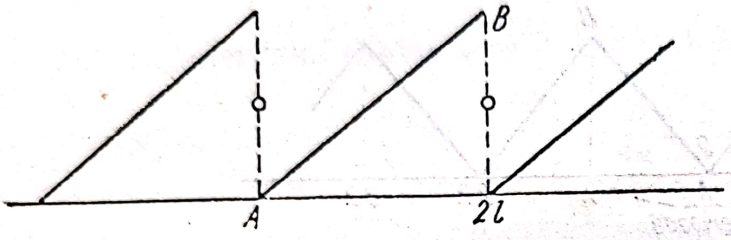

Fig. 49

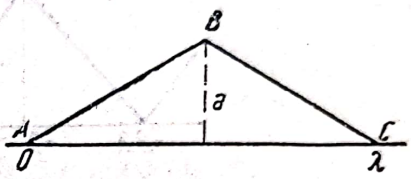

Fig. 50

După cum se vede din figură, funcția $f(x)$ este definită în felul următor:

în intervalul dintre $x = 0$ și $x = \frac{\lambda}{2}$, $f(x) = \frac{2ax}{\lambda}$,

în intervalul dintre $x = \frac{\lambda}{2}$ și $x = \lambda$, $f(x) = 2a - \frac{2ax}{\lambda}$.

Deci,

$$B_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\frac{2ax}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx + \frac{2}{\lambda}\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}\left(2a - \frac{2ax}{\lambda}\right)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\frac{x}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx = \left(-\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\lambda} + \frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\right)_0^{\frac{\lambda}{2}} =$$

$$= -\frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\lambda}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$-\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}\frac{x}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx = -\left[-\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\lambda} + \frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\right]_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda}{n\pi}\cos n\pi + \frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\lambda}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx = -\frac{\lambda}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\right]_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} = -\frac{\lambda}{n\pi}\cos n\pi + \frac{\lambda}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Adunînd aceste mărimi și înmulțind rezultatul cu $\frac{4a}{\lambda}$, obținem

$$B_n = \frac{8a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

ceea ce ne dă coeficienţii $B_{2k} = 0$ şi

$$B_{2k+1} = \frac{8a}{(2k+1)^2\,\pi^2} \cdot \sin\frac{2k+1}{2}\cdot\pi = (-1)^k \cdot \frac{8a}{(2k+1)^2\,\pi^2},$$

astfel încît vom avea în cele din urmă

$$f(x) = \frac{8a}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{\lambda} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{\lambda} - \ldots\right].$$

Graficul funcţiei este reprezentat în fig. 51.

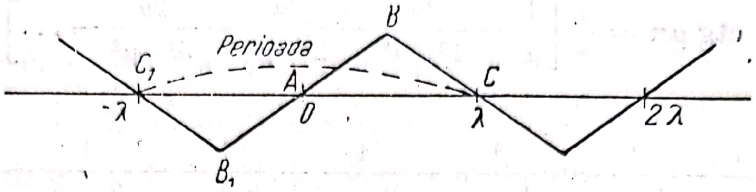

Fig. 51

Se propune cititorului să găsească dezvoltarea după cosinuşi.

Exemplul 5. Fie date funcţiile $f(\theta) = \sin\mu\theta$ şi $F(\theta) = \cos\mu\theta$, unde μ este un număr oarecare dar nu întreg. Să se dezvolte aceste funcţii în serie în intervalul $(-\pi, +\pi)$.

Deoareca funcţia propusă $f(\theta)$ este impară, o vom dezvolta într-o serie de sinuşi:

$$f(\theta) = B_1\sin\theta + B_2\sin 2\theta + \ldots + B_n\sin n\theta + \ldots,$$

unde

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

În cazul nostru vom avea:

$$B_n = \int_0^{\pi}\sin\mu\theta\sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-\mu)\,\theta - \cos(\mu+n)\,\theta]\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-\mu}\sin(n-\mu)\,\theta - \frac{1}{n+\mu}\sin(n+\mu)\,\theta\right]_0^{\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2n\sin\mu\pi}{\pi(n^2-\mu^2)}$$

şi, prin urmare,

$$\sin\mu\theta = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-\mu^2}\sin\theta - \frac{2}{2^2-\mu^2}\sin 2\theta + \frac{3}{3^2-\mu^2}\sin 3\theta - \ldots,\right], \qquad (22)$$

această ecuaţie fiind valabilă pentru toate valorile lui θ dintre 0 şi π, însă nu pentru $\theta=\pi$.

Funcţia $F(\theta) = \cos\mu\theta$ o dezvoltăm într-o serie de cosinuşi, obţinînd:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\mu\theta\, d\theta = +\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\mu}[\sin\mu\theta]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi\cdot\mu}\sin\mu\pi,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\mu\theta\cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n+\mu)\,\theta + \cos(n-\mu)\,\theta]\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+\mu}\sin(n+\mu)\,\theta + \frac{1}{n-\mu}\sin(n-\mu)\,\theta\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{2\mu}{n^2-\mu^2}\sin\mu\pi$$

și, prin urmare,

$$\cos\mu\theta = \frac{\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2-\mu^2}\cos\theta - \frac{2\mu}{2^2-\mu^2}\cos 2\theta + \frac{2\mu}{3^2-\mu^2}\cos 3\theta - \ldots\right],$$

această serie fiind valabilă și pentru $\theta = \pi$ și $\theta = -\pi$, deoarece

$$\cos\mu\pi = \cos(-\mu\pi).$$

Făcînd $\theta = \pi$, obținem:

$$\operatorname{ctg}\mu\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu} - \frac{2\mu}{1^2-\mu^2} - \frac{2\mu}{2^2-\mu^2} - \frac{2\mu}{3^2-\mu^2} - \ldots\right]$$

sau altfel

$$\pi\operatorname{ctg}\mu\pi = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{2-\mu} + \frac{1}{2+\mu} - \frac{1}{3-\mu} + \frac{1}{3+\mu} - \ldots,$$

adică dezvoltarea cunoscută a lui $\operatorname{ctg}\mu\pi$ în fracții simple.

Tot astfel, făcînd în formula (22) $\theta = \frac{\pi}{2}$ și observînd că

$$\sin\mu\pi = 2\sin\frac{\mu\pi}{2}\cdot\cos\frac{\mu\pi}{2},$$

obținem

$$\frac{\pi}{2}\sec\frac{\mu\pi}{2} = \frac{2\cdot 1}{1-\mu^2} - \frac{2\cdot 3}{3^2-\mu^2} + \frac{2\cdot 5}{5^2-\mu^2} - \ldots;$$

nu rămîne decît să se pună în această formulă $\frac{\mu\pi}{2} = z$, pentru a obține dezvoltarea secantei în fracții simple.

§ 50. S-au demonstrat pentru seriile trigonometrice următoarele proprietăți:

1. O serie de forma

$$A_0 + A_1\cos\theta + A_2\cos 2\theta + \ldots + A_n\cos n\theta + \ldots \qquad (*)$$

este convergentă, dacă toți coeficienții sînt pozitivi sau sînt alternativ pozitivi și negativi și descresc indefinit în valoare absolută cînd n crește. În primul caz, convergența poate să nu aibă loc, dacă θ este un multiplu par al lui π sau $\theta = 0$, iar în cazul al doilea, dacă θ este un multiplu impar al lui π. În adevăr, să notăm cu S_n suma primilor $(n+1)$ termeni a seriei (*) și să presupunem mai întîi că toți coeficienții sînt pozitivi.

Înmulțind expresia S_n cu $2\sin\frac{\theta}{2}$, obținem:

$$2S_n\sin\frac{\theta}{2} = \sum_{k=0}^{n} 2A_k\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2} = \sum_{k=0}^{n} A_k\left[\sin\frac{2k+1}{2}\theta - \sin\frac{2k-1}{2}\theta\right],$$

de unde

$$2(S_{n+p} - S_n)\sin\frac{\theta}{2} = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k\left[\sin\frac{2k+1}{2}\theta - \sin\frac{2k-1}{2}\theta\right]$$

sau, scriind suma altfel:

$$-2(S_{n+p}-S_n)\sin\frac{\theta}{2}=A_{n+1}\sin\frac{2n+1}{2}\theta+(A_{n+2}-A_{n+1})\sin\frac{2n+3}{2}\theta+$$
$$+(A_{n+3}-A_{n+2})\sin\frac{2n+5}{2}\theta+\ldots+$$
$$+(A_{n+p}-A_{n+p-1})\sin\frac{2n+2p-1}{2}\theta-A_{n+p}\sin\frac{2n+2p+1}{2}\theta.$$

Comparînd această sumă cu următoarea:

$$\sigma_{n,p}=A_{n+1}+(A_{n+2}-A_{n+1})+(A_{n+3}-A_{n+2})+\ldots+(A_{n+p}-A_{n+p-1})+A_{n+p},$$

la care toți termenii sînt pozitivi, deoarece A_n descrește cînd indicele crește, și care sumă este egală cu $2A_{n+p}$, putem scrie:

$$2|S_{n+p}-S_n|\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant 2A_{n+p},$$

deoarece factorii $\sin\frac{2k-1}{2}\theta$ nu sînt mai mari decît 1 în valoare absolută. Însă, la creșterea lui n, valoarea lui A_{n+p} tinde către 0, oricare ar fi numărul pozitiv p, din care cauză și valoarea diferenței $|S_{n+p}-S_n|$ tinde către zero, dacă θ este diferit de zero și de un multiplu par al lui π; aceasta înseamnă că seria (*) este convergentă.

Dacă semnele coeficienților A alternează, trebuie să se pună

$$\theta=\pi-\varphi,$$

de unde se obține o nouă serie dezvoltată după cosinușii multiplilor lui φ, în care toți coeficienții au același semn.

În același fel, se poate demonstra convergența seriei dezvoltate după sinuși

$$A_1\sin\theta+A_2\sin 2\theta+\ldots+A_n\sin n\theta+\ldots,$$

admițîndu-se ipotezele precedente privitoare la coeficienții A_n. Această serie este convergentă pentru toate valorile lui θ, fără excepție.

2. Să arătăm acum că, dacă funcția $f(\theta)$ satisface condițiile lui Dirichlet, la dezvoltarea ei într-o serie trigonometrică coeficienții vor descreste cel puțin tot atît de repede ca $\frac{1}{n}$.

În adevăr,

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta.$$

Deoarece funcția $f(\theta)$ satisface condițiile lui Dirichlet, putem împărți intervalul $(-\pi, +\pi)$ în felul următor:

de la $-\pi$ la a_1; de la a_1 la a_2;...; de la a_k la $+\pi$,

astfel încît în fiecare din acestea, $f(\theta)$ să fie monotonă, ceea ce înseamnă că ea va fi sau crescătoare, sau descrescătoare, sau constantă, iar numărul k de intervale de acest fel va fi finit.

Să luăm unul din aceste intervale, de exemplu $[a_i, a_{i+1}]$; atunci, partea corespunzătoare a integralei va fi

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta;$$

aplicînd la ea a doua teoremă a mediei, avem

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = f(a_i) \int_{a_i}^{\xi} \cos n\theta \, d\theta + f(a_{i+1}) \int_{\xi}^{a_{i+1}} \cos n\theta \, d\theta,$$

și, prin urmare,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = f(a_i) \frac{\sin n\xi - \sin n\alpha_i}{n} + f(a_{i+1}) \frac{\sin na_{i+1} - \sin n\xi}{n} = \frac{K_i}{n},$$

unde K_i este o mărime care rămîne mărginită la creșterea lui n.

De aici rezultă

$$A_n = \frac{1}{\pi}[K_1 + K_2 + \ldots + K_k] \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K}{n},$$

unde K rămîne mărginită la creșterea lui n, ceea ce demonstrează teorema de mai sus.

Ne convingem, în același fel, că și coeficienții B_n se bucură de aceeași proprietate.

Exemplele 1, 2, 3 prezintă tocmai serii în care ordinul de descreștere al coeficienților este $\frac{1}{n}$.

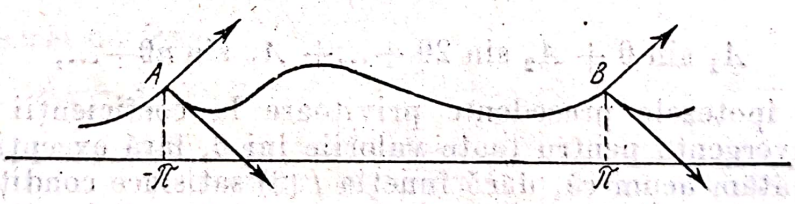

Fig. 52

Să presupunem acum că funcția $f(\theta)$ este periodică cu perioada 2π, că este continuă și că are o *derivată* care satisface condițiile lui Dirichlet în intervalul dintre $-\pi$ și $+\pi$ (fig. 52). În acest caz, ordinul de descreștere al coeficienților este cel puțin de $\frac{1}{n^2}$.

În adevăr,

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{n} \sin n\theta \cdot f(\theta)\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\theta \, f'(\theta) \, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\theta \, f'(\theta) \, d\theta;$$

iar ultima integrală este — după cum am văzut — de ordinul lui $\frac{1}{n}$, adică egală cu $\frac{K}{n}$, unde K rămîne mărginită la creșterea lui n; aceasta înseamnă că A_n va fi de ordinul lui $\frac{1}{n^2}$, adică de forma $\frac{K}{n^2}$.

Coeficientul B_n se determină din egalitatea

$$\pi B_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \left[-\frac{1}{n} f(\theta) \cos n\theta \right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta \, f'(\theta) \, d\theta.$$

Datorită periodicității lui $f(\theta)$, termenul fără integrală este nul, de unde rezultă

$$\pi B_n = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta \, f'(\theta) \, d\theta = \frac{1}{n^2} \cdot K,$$

în virtutea celor demonstrate relativ la A_n pentru funcția $f'(\theta)$.

Teorema precedentă poate fi formulată mai simplu în felul următor: *dacă funcția dezvoltată în serie este continuă între* $-\pi$ *și* $+\pi$, *dacă derivata ei satisface condițiile lui Dirichlet și dacă* $f(\pi) = f(-\pi)$, *coeficienții* A_n *și* B_n *vor fi de ordinul* $\frac{1}{n^2}$, *ceea ce înseamnă că, la creșterea lui* n, *produsele*

$$A_n \cdot n^2 \text{ și } B_n \cdot n^2$$

vor fi mărginite.

Se observă ușor cum se poate generaliza această proprietate, aplicînd-o la dezvoltări între 0 și π, adică la dezvoltări numai în sinuși sau numai în cosinuși.

Exemplul 4 poate servi ca o confirmare a acestei teoreme. Exemplul 5 arată că la dezvoltarea funcției

$$f(\theta) = \sin \mu\theta,$$

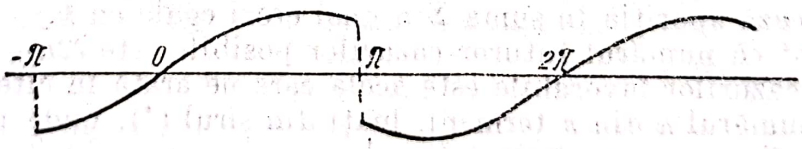

Fig. 53

al cărei grafic este arătat în fig. 53 [dacă $\mu < 1$, astfel încît $f(-\pi)$ nu este egal cu $f(+\pi)$], coeficientul

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2n \cdot \sin \mu\pi}{\pi (n^2 - \mu^2)}$$

este de ordinul *întîi* în raport cu n, și nu de ordinul al doilea, cu toate că funcția însăși este continuă între limitele date. Se poate demonstra că, atunci cînd funcția este reprezentată printr-o serie trigonometrică, această serie poate fi totdeauna integrată. Derivarea nu este totdeauna permisă.

Astfel, de exemplu, integrînd formulele (19) între limitele 0 și λ, obținem formula (20), ceea ce propunem spre verificare cititorului.

Problemă. Forma pe care o ia o grindă elastică sprijinită în punctele A și B (fig. 54) și la care este aplicată sarcina P în punctul C, de abscisă $x = c$, este determinată de următoarele două ecuații:

$$\text{de la } x = 0 \text{ la } x = c \qquad z = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{c\,(l-c)}{6l} \cdot \left[(2l - c)\,x - \frac{x^3}{c}\right],$$

$$\text{de la } x = c \text{ la } x = l \qquad z = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{c\,(l-c)}{6l} \cdot \left[(l + c)\,(l - x) - \frac{(l-x)^3}{l-c}\right],$$

unde E și J sînt niște constante. Să se arate că mărimea z poate fi reprezentată, în întregul interval de la $x = 0$ la $x = l$, prin ecuația

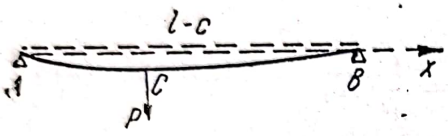

Fig. 54

$$z = \frac{2Pl^3}{EJ \cdot \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin\frac{k\pi c}{l} \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

§ 51. Vom cita încă o aplicație interesantă a seriilor trigonometrice și anume la rezolvarea următoarei probleme: *care este probabilitatea ca eroarea sumei* Σ, *alcătuită din* s *termeni, dintre care toți pot conține cu aceeași probabilitate o eroare egală cu unul din numerele șirului*

$$-n, -(n-1), -(n-2), \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots, +(n-1), +n, \quad (*)$$

să fie cuprinsă între limitele $-h$ *și* $+h$, *unde* $h < ns$.

Pentru a rezolva această problemă, Laplace procedează în felul următor: el caută mai întîi care este probabilitatea ca eroarea sumei Σ să fie egală cu un anumit număr dat k, și ia apoi suma probabilităților obținute, dînd lui k valorile

$$-h; -(h-1); \ldots; -2; -1; 0; +2; \ldots, +h.$$

Pentru a calcula probabilitatea menționată $p(k)$, trebuie să se determine numărul tuturor cazurilor egal posibile, cum și numărul cazurilor care favorizează apariția în suma Σ a unei erori egale cu k.

Evident că numărul tuturor cazurilor posibile este $(2n+1)^s$, în timp ce numărul cazurilor favorabile este acela care ne arată în cîte feluri poate fi alcătuit numărul k din s termeni, luați din șirul (*), unde printre acești termeni pot fi și numere egale între ele.

Cînd numerele n și s sînt mici, nu este greu să se calculeze direct numărul acestor cazuri, dar îndată ce numerele n și s devin mai mari, calculul direct devine foarte dificil, astfel încît Laplace recurge la următorul artificiu.

Să luăm polinomul

$$Q = x^{-n} + x^{-(n-1)} + x^{-(n-2)} + \ldots + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \ldots + x^n,$$

pe care îl ridicăm la puterea s; obținem atunci un polinom în care puterea cea mai mare a lui x va fi x^{ns}, iar puterea cea mai mică va fi x^{-ns}; să luăm din acest polinom termenul care conține pe x^k; coeficientul A_k din acest termen ne va arăta numărul modurilor în care poate fi alcătuit numărul k din termenii arătați.

Evident că în termenul cu x^{-h} vom avea același coeficient A_h, astfel încît polinomul Q^s va fi alcătuit din termeni de forma

$$A_h\,(x^h + x^{-h}).$$

Se înțelege de la sine că coeficientul A_h nu va depinde de valoarea atribuită literei x, din care cauză putem pune

$$x = e^{+\theta i},$$

de unde rezultă

$$Q = e^{-n\theta i} + e^{-(n-1)\theta i} + \ldots + e^{-\theta i} + 1 + e^{+\theta i} + e^{2\theta i} + \ldots + e^{n\theta i} =$$
$$= 1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta + \ldots + 2\cos n\theta.$$

Pe de altă parte, vom avea

$$A_h\,(x^h + x^{-h}) = A_h\,(e^{+h\theta i} + e^{-h\theta i}) = 2A_h\cos k\theta.$$

Așadar, trebuie să aibă loc egalitatea

$$(1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos n\theta)^s = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} A_k\cos k\theta.$$

Notînd membrul întîi al egalității prin $f(\theta)$, se observă că A_k se exprimă prin

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos k\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta\,d\theta.$$

Scriind expresia lui $f(\theta)$ în felul următor:

$$f(\theta) = [e^{-n\theta i} + \ldots + e^{-\theta i} + 1 + e^{\theta i} + \ldots + e^{n\theta i}]^s,$$

se observă că expresia din paranteze este suma unei progresii geometrice. Această sumă este egală cu

$$\frac{e^{-n\theta i} - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}} = \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta i} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta i}}{e^{-\frac{\theta i}{2}} - e^{\frac{\theta i}{2}}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

de unde rezultă că

$$f(\theta) = \left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s,$$

iar expresia precedentă pentru coeficientul A_k se transformă în următoarea:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s \cos k\theta\,d\theta.$$

Probabilitatea $p\,(k)$ se exprimă prin

$$p\,(k) = \frac{A_k}{(2n+1)^s} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{\theta}{2}}{(2n+1)\,\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s \cos k\theta\, d\theta.$$

Se observă ușor că, atunci cînd valoarea lui s este foarte mare, sînt importante în această integrală numai elementele care corespund unor unghiuri θ mici, pentru care cantitatea ridicată la puterea s este aproape de 1. Să punem pentru prescurtare

$$2n+1 = m, \quad \frac{\theta}{2} = \varphi.$$

Vom avea

$$\left[\frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{\theta}{2}}{(2n+1)\,\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s = \left(\frac{\sin m\varphi}{m\sin\varphi}\right)^s \qquad (*)$$

și dezvoltînd în raport cu puterile lui φ, găsim pentru valorile lui φ apropiate de zero:

$$\left(\frac{\sin m\varphi}{m\sin\varphi}\right)^s = \left(\frac{m\varphi - \frac{m^3\varphi^3}{6} + \dots}{m\varphi - \frac{m\varphi^3}{6} + \dots}\right)^s = \left(1 - \frac{m^2-1}{6}\varphi^2 + \dots\right)^s =$$

$$= 1 - \frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2 + \dots$$

Pentru valori mari ale lui s, funcția $e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2}$ diferă considerabil de zero numai pentru valorile lui φ apropiate de zero și are primii doi termeni ai dezvoltării egali cu termenii corespunzători din dezvoltarea funcției (*).

Înlocuind în expresia lui $p\,(k)$ funcția (*) prin funcția $e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2}$ și punînd $\theta = 2\varphi$, obținem:

$$p\,(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2} \cos 2k\varphi\, d\varphi.$$

Pentru valori mari ale lui s, putem prelungi integrarea pînă la infinit, fără a modifica în mod vizibil rezultatul, astfel încît găsim:

$$p\,(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2} \cos 2k\varphi\, d\varphi.$$

Introducem în locul lui φ noua variabilă de integrare x, punînd

$$\sqrt{\frac{(m^2-1)\,s}{6}}\,\varphi = x.$$

Substituind $m = 2n+1$ și introducînd notația

$$q = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n\,(n+1)\,s}},$$

obținem

$$p\,(k) = \frac{q}{\pi}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos kq\,x\,dx.$$

Însă

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos kq\,x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{k^2q^2}{4}}$$

și, prin urmare,

$$p\,(k) = \frac{q}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{k^2q^2}{4}}.$$

Mărimea aflată reprezintă probabilitatea ca eroarea să fie egală cu k. Pentru a afla probabilitatea ca eroarea să fie cuprinsă între $-h$ și $+h$, trebuie să se ia suma

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=-h}^{+h} e^{\frac{k^2q^2}{4}}\cdot\frac{q}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=-h}^{+h} e^{-\left(k\frac{q}{2}\right)^2}\cdot\frac{q}{2}.$$

Cînd k crește cu o unitate, expresia $t = k\frac{q}{2}$ crește cu $\frac{q}{2}$. Luînd în considerare factorul $\frac{q}{2}$, cum și faptul că q este mic pentru valori mari ale lui s, putem înlocui această sumă printr-o integrală, obținînd astfel

$$P\,(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-H}^{+H} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^H e^{-t^2}\,dt,$$

unde $P\,(h)$ este probabilitatea căutată și

$$H = \frac{q}{2}\,h = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{n\,(n+1)\,s}}\cdot h.$$

Pentru funcția

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^H e^{-u^2}\,du = \Theta\,(H)$$

sînt alcătuite tabele, care pot fi găsite, de exemplu, în lucrarea lui J. Bertrand „Calcul des probabilités“. Un extras din aceste tabele se dă în

cap. VIII al acestui curs. Ne putem, de asemenea, folosi de tabelele foarte amănunțite ale valorilor integralei

$$\int_x^\infty e^{-t^2} \cdot dt,$$

alcătuite de acad. A. A. Marcov.

Să presupunem, astfel, că trebuie să se găsească probabilitatea ca la adunarea a 100 numere care se bucură de proprietatea că la fiecare din ele eroarea nu depășește 0,5 unități ale ultimei zecimale, eroarea rezultatului să nu depășească 5 unități ale ultimei zecimale. În acest caz, se poate lua $n = 5$, $s = 100$ și $h = 50$. Vom avea

$$\frac{\sqrt{6} \cdot h}{2\sqrt{n \cdot (n+1)\, s}} = \frac{\sqrt{6} \cdot 50}{2\sqrt{5 \cdot 6 \cdot 100}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118;$$

și după tabelă

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1{,}118} e^{-u^2} \cdot du = 0{,}886.$$

Am exprimat aici eroarea în unități ale zecimalei următoare după ultima păstrată, dar este evident că s-ar fi putut exprima eroarea și în unități ale celei de a doua zecimale după ultima păstrată, adică s-ar fi putut lua $n=50$, $h=500$ și $s = 100$; în general, eroarea ar putea fi exprimată în orice fracțiuni, luîndu-se în acest caz $n = 5N$, $h=50N$ și $s=100$, de unde

$$H = \frac{\sqrt{6} \cdot 50 \cdot N}{2\sqrt{5N \cdot (5N+1) \cdot 100}}.$$

La o creștere nemărginită a lui N, această valoare se apropie de

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = 1{,}225,$$

astfel încît probabilitatea căutată va fi

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1{,}225} e^{-u^2}\, du = 0{,}917.$$

Se înțelege de la sine că într-o mare parte a cazurilor trebuie să se ia în considerare faptul că eroarea poate fi cuprinsă între două limite date, de exemplu $\pm$ cinci unități ale zecimalei imediat următoare celei din urmă, luînd orice valoare cuprinsă între ele, și nu numai valorile

$$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5.$$

În acest caz trebuie să se procedeze așa cum s-a arătat mai sus.

Acest exemplu arată cît de mare este probabilitatea ca la adunarea unui număr mare de numere aproximative, rotunjite după regula obișnuită, erorile să nu se acumuleze, ci din contra să se compenseze.

Scanned with OKEN Scanner

§ 52. Formulele lui Fourier. Fourier, care a dezvoltat foarte mult teoria seriilor trigonometrice, aplicînd-o la diferite probleme ale fizicii matematice, a dat următoarea formulă:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cdot\cos\alpha(\theta - x)\cdot d\theta. \qquad (1)$$

Pentru a demonstra formula lui Fourier, vom presupune că funcția $f(x)$, definită în intervalul $(-\infty, +\infty)$, verifică următoarele condiții: 1) satisface în orice interval finit condițiile lui Dirichlet; 2) este absolut integrabilă într-un interval infinit, adică integralele

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|\,dx \text{ și } \int_0^{\infty} |f(x)|\,dx$$

au valori finite. Vom demonstra formula lui Fourier în ipotezele de mai sus. În punctele de discontinuitate trebuie să se ia aici semisuma limitelor corespunzătoare la stînga și la dreapta, adică formula lui Fourier are forma

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cos\alpha(\theta - x)\,d\theta. \qquad (2)$$

Dacă x este un punct în care $f(x)$ este continuă, avem

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] = f(x),$$

de unde obținem formula de mai sus. În § 47 s-a demonstrat formula lui Dirichlet

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{b} F(z)\frac{\sin\mu z}{z}dz = \frac{1}{2}F(+0),$$

unde s-a presupus că $F(x)$ satisface condițiile lui Dirichlet în intervalul finit dintre 0 și b. Pentru a demonstra formula lui Fourier, trebuie să se arate că

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\mu} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cos\alpha(\theta - x)\,d\theta = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]. \qquad (*)$$

În virtutea integrabilității absolute a lui $f(\theta)$, integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cos\alpha(\theta - x)\,d\theta$$

este uniform convergentă pentru toate valorile reale ale lui α. În adevăr, integralele

$$\int_N^{N'} f(\theta)\cos\alpha(\theta - x)\,d\theta \text{ și } \int_{-N'}^{-N} f(\theta)\cos\alpha(\theta - x)\,d\theta \qquad (0 < N < N')$$

nu depășesc în valoare absolută integralele

$$\int_{N}^{N'} |f(\theta)|\,d\theta \text{ și } \int_{-N'}^{-N} |f(\theta)|\,d\theta, \qquad (**)$$

care nu depind de α, iar pentru fiecare ε pozitiv dinainte dat, există un astfel de N_0, încît pentru toți N și $N' > N_0$, integralele (**) să fie mai mici decît ε. Convergența uniformă a acestor integrale permite să se schimbe ordinea de integrare în integrala dublă din formula fundamentală (*), astfel încît putem scrie, introducînd o notație specială $V(\mu, x)$ pentru această integrală:

$$V(\mu, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\mu} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cos\alpha(\theta - x)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\,d\theta \int_0^{\mu}\cos\alpha(\theta - x)\,d\alpha.$$

Efectuînd integrarea în raport cu α în prima integrală din membrul al doilea, obținem

$$V(\mu, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\frac{\sin\mu(\theta - x)}{\theta - x}\,d\theta.$$

Împărțind intervalul de integrare $(-\infty, +\infty)$ în două intervale: $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$ și introducînd în locul lui $\theta - x$ variabila $-z$ în primul și z în al doilea interval, obținem

$$V(\mu, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x - z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x + z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz.$$

Ambele integrale de mai sus sînt de același tip ca și integrala din formula lui Dirichlet; pentru prima dintre ele avem $F_1(z) = f(x - z)$, iar pentru a doua integrală $F_2(z) = f(x + z)$. O anumită complicație este cauzată de faptul că intervalul de integrare este infinit. Folosindu-ne însă de condițiile de mai sus, pe care le satisface $f(x)$, este ușor să arătăm că deși intervalul de integrare este infinit, pentru ambele integrale este totuși valabilă formula lui Dirichlet obținută, unde $F_1(+0) = f(x - 0)$ și $F_2(+0) = f(x + 0)$, adică

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x - z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz &= \frac{1}{2}f(x - 0), \\ \lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x + z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz &= \frac{1}{2}f(x + 0). \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

Din aceste formule și din expresia lui $V(\mu, x)$ rezultă imediat formula fundamentală (*). Să demonstrăm prima din formulele (***). Pentru $z > 1$, funcția $\frac{\sin\mu z}{z}$ este în valoare absolută mai mică decît 1, oricare ar fi valoarea reală a lui μ, iar funcția $f(x - z)$ este prin ipoteză absolut integrabilă

în intervalul $(0, \infty)$. De aceea, există pentru fiecare ε pozitiv dinainte dat un număr N mai mare ca 1, pentru care vom avea, oricare ar fi μ:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_N^\infty f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_N^\infty |f(x-z)| \, dz < \varepsilon.$$

Într-un interval finit, integrala lui Dirichlet

$$\frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz$$

tinde către $\frac{1}{2} f(x-0)$ dacă μ crește indefinit, de unde rezultă că vom avea pentru valori suficient de mari ale lui μ:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \varepsilon.$$

Evident că putem scrie mai departe

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_N^\infty f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right].$$

Luînd în considerare inegalitățile precedente, obținem pentru toate valorile suficient de mari ale lui μ:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-z) \frac{\sin \mu z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

de unde rezultă — în virtutea faptului că ε este arbitrar — prima din formulele (***). A doua se demonstrează în același fel, astfel încît formula lui Fourier este demonstrată în ipotezele menționate mai sus.

Formula lui Fourier (2) se mai scrie cîteodată și astfel:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cos \alpha (\theta - x) \, d\theta, \tag{3}$$

ceea ce este evident echivalent cu (2), deoarece funcția $\cos \alpha (\theta - x)$ este pară.

Deoarece $\sin \alpha (\theta - x)$ este o funcție impară de α, urmează că

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \sin \alpha (\theta - x) \, d\theta = 0, \tag{*}$$

dacă această integrală există, fiindcă toate elementele ei se anulează două cîte două.

Înmulțind formula (*) cu i și adunînd-o la (3), obținem, în virtutea egalității

$$e^{\alpha(\theta-x)i} = \cos\alpha(\theta - x) + i\sin\alpha(\theta - x),$$

formula lui Fourier pentru o funcție continuă în forma următoare

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, e^{\alpha(\theta-x)i}\, d\theta$$

sau

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)^{\alpha(\theta-x)i}\, d\alpha\, d\theta. \tag{4}$$

Formula lui Fourier se extinde la cazul unui număr oarecare de variabile. În adevăr, să presupunem că funcția $f(x)$ conține în afară de x încă o variabilă y, pe care o considerăm ca un parametru arbitrar: putem scrie în acest caz

$$f(x) = f(x,\ y);$$

avem atunci

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta,\ y)\, e^{\alpha(\theta-x)i}\, d\alpha\, d\theta.$$

Considerînd în expresia $f(\theta,\ y)$ litera θ ca un parametru, găsim după aceeași formulă a lui Fourier

$$f(\theta, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta,\varphi)\, e^{\beta(\varphi-y)i}\, d\beta\, d\varphi$$

și substituind obținem:

$$f(x,\ y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int\int f(\theta,\ \varphi)\, e^{[\alpha(\theta-x)+\beta(\varphi-y)]i}\ d\alpha\, d\beta\, d\theta\, d\varphi. \tag{5}$$

De aici rezultă de la sine posibilitatea generalizării la un număr oarecare de variabile.

Dacă funcția $f(x)$ este pară, astfel încît

$$f(-x) = f(x),$$

atunci, scriind formula (2) în forma

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cos\alpha\theta\cos\alpha\, x\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\sin\alpha\theta\sin\alpha x\ d\theta,$$

se observă că integrala care conține factorul sin $\alpha\theta$ se va anula, fiind integrala unei funcții impare, ale cărei elemente se anulează două cîte două. Această formulă ia deci forma

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\theta)\cos\alpha\theta\cos\alpha x\, d\theta. \qquad (6)$$

Formula poate fi aplicată la orice funcție, însă numai pentru valorile *pozitive* ale lui x, deoarece s-a presupus la deducerea ei că pentru valorile negative ale lui x este valabilă egalitatea

$$f(-x) = f(x).$$

Tot astfel, dacă $f(-x) = -f(x)$ și $f(0) = 0$, integrala care conține factorul cos $\alpha\theta$ se va anula, rămînînd

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\theta)\sin\alpha\theta\sin\alpha x\, dx. \qquad (7)$$

Formula lui Fourier este foarte des aplicată la problemele fizicii matematice privitoare la propagarea căldurii, a electricității, luminii, sunetului etc.

§ 53. În multe probleme practice din electrotehnică, din teoria devierii busolelor etc. apare necesitatea de a dezvolta într-o serie trigonometrică o funcție, care este dată sau printr-un grafic sau pentru care se cunosc numai un șir de valori particulare, corespunzătoare unor anumite valori ale argumentului din cuprinsul unei perioade.

Aceste valori sînt de obicei echidistante.

Să presupunem, deci, că pentru funcția $y = f(x)$, a cărei perioadă este egală cu l, se cunosc valorile

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ldots,\ Y_{n-1},$$

corespunzătoare valorilor

$$0,\ \frac{l}{n},\ 2\frac{l}{n},\ 3\frac{l}{n},\ldots,\ (n-1)\frac{l}{n}$$

ale variabilei independente x, unde este mai avantajos ca n să fie un număr par.

Am văzut că funcția y poate fi reprezentată prin seria

$$y = A_0 + A_1\cos\frac{2\pi x}{l} + A_2\cos\frac{4\pi x}{l} + A_3\cos\frac{6\pi x}{l} + \ldots +$$
$$+ B_1\sin\frac{2\pi x}{l} + B_2\sin\frac{4\pi x}{l} + B_3\sin\frac{6\pi x}{l} + \ldots$$

sau dacă punem

$$\frac{2\pi x}{l} = \theta,$$

prin seria

$$y = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \ldots + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 3\theta + \ldots$$

De obicei este suficient să se cunoască în această serie numai primii termeni, într-un număr nu prea mare, de exemplu pînă la argumentul 3θ sau 4θ.

În acest caz, fiecare din valorile cunoscute ale funcției dă posibilitatea să se scrie o ecuație corespunzătoare, iar sistemul acestor ecuații poate servi la determinarea coeficienților necunoscuți A_0, A_1,..., B_1, B_2,...

Numărul acestor ecuații este de obicei cu mult mai mare decît numărul necunoscutelor și pentru rezolvarea lor se folosește așa-numita metodă „a celor mai mici pătrate", care este expusă în cap. VIII al acestui curs. Cu ajutorul acestei metode și pe baza sistemului de ecuații date, se formează un nou sistem de „ecuații normale", la care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor.

Regula formării „ecuațiilor normale" constă în următoarele: fiecare ecuație a sistemului dat se înmulțește cu coeficientul primei necunoscute și se adună apoi toate aceste ecuații, obținîndu-se prima ecuație a sistemului normal. Tot, așa pentru a obține a doua ecuație normală se înmulțește fiecare din ecuațiile sistemului propus cu coeficientul celei de a doua necunoscute, adunîndu-se apoi ecuațiile obținute în acest fel. Se procedează în același fel pentru fiecare din necunoscute. Să aplicăm această metodă la cazul nostru, mărginindu-ne — pentru a simplifica scrierea — numai la termenii pînă la 3θ.

Sistemul care servește la determinarea necunoscutelor

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3$$

(punîndu-se în locul lui $\frac{2\pi}{n}$ litera α), va fi:

$$\theta = 0; \quad Y_0 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3;$$

$$\theta = \alpha; \quad Y_1 = A_0 + A_1 \cos\alpha + A_2 \cos 2\alpha + A_3 \cos 3\alpha + B_1 \sin\alpha + B_2 \sin 2\alpha + B_3 \sin 3\alpha;$$

$$\theta = 2\alpha; \quad Y_2 = A_0 + A_1 \cos 2\alpha + A_2 \cos 4\alpha + A_3 \cos 6\alpha + B_1 \sin 2\alpha + B_2 \sin 4\alpha + B_3 \sin 6\alpha;$$

. . . . . .

$$\theta = i\alpha; \quad Y_i = A_0 + A_1 \cos i\alpha + A_2 \cos 2i\alpha + A_3 \cos 3i\alpha + B_1 \sin i\alpha + B_2 \sin 2i\alpha + B_3 \sin 3i\alpha;$$

. . . . . .

$$\theta = (n-1)\alpha; \quad Y_{n-1} = A_0 + A_1 \cos(n-1)\alpha + A_2 \cos 2(n-1)\alpha + A_3 \cos 3(n-1)\alpha + B_1 \sin(n-1)\alpha + B_2 \sin 2(n-1)\alpha + B_3 \sin 3(n-1)\alpha.$$

Sistemul normal corespunzător este, prin urmare,

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i = nA_0 + A_1 \sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha + A_2 \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha + \cdots + B_3 \sum_{i=0}^{n-1} \sin 3i\alpha,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos i\alpha = A_0 \sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha + A_1 \sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 i\alpha + A_2 \sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha \cos 2i\alpha + \cdots +$$

$$+ B_3 \sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha \sin 3i\alpha,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos 2i\alpha = A_0 \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha + A_1 \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha \cos i\alpha +$$

$$+ A_2 \sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 2i\alpha + \cdots + B_3 \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha \sin 3i\alpha,$$

. . . . . .

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \sin 3i\alpha = A_0 \sum_{i=0}^{n-1} \sin 3i\alpha + A_1 \sum_{i=1}^{n-1} \sin 3i\alpha \cos i\alpha + \cdots + B_3 \sum_{i=0}^{n-1} \sin^2 3i\alpha.$$

Se vede ușor că aceste ecuații pot fi mult simplificate, dacă ne vom folosi de faptul că valorile argumentelor care figurează sub semnul sumei cresc în progresie aritmetică și parcurg o dată sau de mai multe ori un cerc întreg; în adevăr, fiecare ecuație va conține numai o singură necunoscută, deoarece toate sumele cuprinse în ea, în afară de una singură, se vor anula.

Să considerăm spre exemplu suma

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos (n-1)\alpha,$$

unde $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Avem următorul șir de egalități

$$2 \sin \alpha = 2 \sin \alpha,$$

$$2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha,$$

$$2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha = \sin 3\alpha - \sin \alpha,$$

$$2 \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha = \sin 4\alpha - \sin 2\alpha,$$

. . . . . .

$$2 \cos (n-2)\alpha \sin \alpha = \sin (n-1)\alpha - \sin (n-3)\alpha,$$

$$2 \cos (n-1)\alpha \sin \alpha = \sin n\alpha - \sin (n-2)\alpha,$$

pe care adunîndu-le obținem

$$2 \cdot S_1 \sin \alpha = \sin \alpha + \sin (n-1)\alpha + \sin n\alpha.$$

Deoarece $n\alpha = 2\pi$, urmează că

$$\sin \alpha + \sin (n-1)\alpha + \sin n\alpha = \sin \alpha + \sin (2\pi - \alpha) + \sin 2\pi = 0,$$

de unde rezultă

$$S_1 = 0.$$

În același fel, se observă că sînt valabile și relațiile

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin i\alpha = 0; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sin 2i\alpha = 0; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha = 0 \cdots$$

În ceea ce privește, de exemplu, sumele de forma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha \cos 2i\alpha,$$

deoarece

$$2 \cos \alpha i \cdot \cos 2i\alpha = \cos 3i\alpha + \cos i\alpha,$$

urmează că

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha \cos 2i\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \cos 3i\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \cos i\alpha = 0.$$

Așadar, nu rămîn decît sumele

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 i\alpha, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 2i\alpha, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 3i\alpha,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin^2 i\alpha, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sin^2 2i\alpha, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sin^2 3i\alpha.$$

Se arată ușor că fiecare din aceste sume este egală cu $\frac{n}{2}$.

În adevăr, avem:

$$2 \cos^2 i\alpha = 1 + \cos 2i\alpha.$$

Urmează deci

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 i\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \cos 2i\alpha) = n + \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha = n.$$

În același fel, din

$$2 \sin^2 i\alpha = 1 - \cos 2i\alpha,$$

obținem relația

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} \sin^2 i\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \cos 2i\alpha) = n - \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2i\alpha = n.$$

Tot astfel aflăm și celelalte sume.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, sistemul normal de ecuații va fi

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i = nA_0,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos i\alpha = \frac{n}{2} A_1,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos 2i\alpha = \frac{n}{2} A_2,$$

. . . . . .

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \sin 3i\alpha = \frac{n}{2} B_3,$$

de unde se află valorile coeficienților

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3.$$

§ 54. Seriile trigonometrice apar la soluționarea practică a multor probleme ale fizicii matematice și deseori trebuie să se cunoască nu numai funcția reprezentată de o serie de acest fel, ci și derivatele ei de diferite ordine. Astfel, de exemplu, la problema încovoierii și oscilațiilor grinzilor, mărimea obținută sub forma unei serii trigonometrice este săgeata z din fiecare punct al grinzii. Pentru calculul rezistenței grinzii, trebuie să se cunoască însă momentul de încovoiere în fiecare punct, precum și forța tăietoare. Prima din aceste mărimi se exprimă prin a doua derivată, iar a doua se exprimă prin a treia derivată în raport cu z.

Dacă trecem apoi la calculele numerice, putem întîlni situația ca în timp ce mărimea z este reprezentată printr-o serie care converge foarte repede, derivatele ei să fie reprezentate de serii care converg atît de încet, încît ar trebui să se ia un număr foarte mare de termeni pentru a atinge precizia dorită.

Următoarea metodă dă deseori posibilitatea să se simplifice calculele, accelerînd convergența seriei. În acest scop, se încearcă să se descompună seria dată într-o sumă de cîteva alte serii, dintre care cele care converg lent să se poată însuma direct.

Să ilustrăm întîi cele spuse printr-un exemplu particular.

Să presupunem că este dată seria

$$S = \frac{\cos\varphi}{1^2+\alpha^2} - \frac{3\cos 3\varphi}{9+\alpha^2} + \frac{5\cos 5\varphi}{25+\alpha^2} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(2n+1)\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^2+\alpha^2} + \cdots$$

și să admitem că trebuie să se calculeze suma ei pentru $\alpha = 1$, adică

$$S_1 = \frac{1}{1^2+1}\cos\varphi - \frac{3}{9+1}\cos 3\varphi + \frac{5}{25+1}\cos 5\varphi + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{(2n+1)^2+1}\cos(2n+1)\varphi + \cdots$$

Această serie converge foarte încet, dar dacă ne îndreptăm atenția asupra formulei

$$\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi + \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \left(0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\right), \\ -\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi\right), \end{cases}$$

obținem

$$\pm\frac{\pi}{4} - S_1 = \frac{1}{1+1}\cos\varphi - \frac{1}{3(9+1)}\cos 3\varphi + \frac{1}{5(25+1)}\cos 5\varphi + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)[(2n+1)^2+1]}\cos(2n+1)\varphi + \cdots$$

Se înțelege că seria inițială converge tot atît de încet ca și seria al cărei termen general este $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, în timp ce seria transformată converge ca o serie al cărei termen general este $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, adică mult mai rapid. De aici rezultă că aflarea valorii numerice $\pm\frac{\pi}{4} - S_1$, și prin ea a valorii S_1, poate fi efectuată cu mult mai repede decît calculul direct al mărimii S_1 cu ajutorul seriei care o reprezintă.

§ 55. Pentru a putea recurge la aceste transformări, ori de cîte ori este nevoie, trebuie să avem la dispoziție o tabelă a sumelor cîtorva din seriile cele mai remarcabile și mai des întîlnite. Aceste sume se obțin din următoarele două dezvoltări:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi} = \frac{x}{1}\sin\varphi + \frac{x^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \cdots \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2) = \frac{x}{1}\cos\varphi + \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi + \cdots \quad (2)$$

Pentru a deduce aceste formule putem proceda în felul următor: vom nota cu u și v sumele

$$u = \frac{x}{1}\cos\varphi + \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi + \cdots$$

$$v = \frac{x}{1}\sin\varphi + \frac{x^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \cdots;$$

astfel încît vom avea

$$u + vi = \frac{x}{1}e^{\varphi i} + \frac{x^2}{2}e^{2\varphi i} + \frac{x^3}{3}e^{3\varphi i} + \cdots = \frac{xe^{\varphi i}}{1} + \frac{(xe^{\varphi i})^2}{2} + \frac{(xe^{\varphi i})^3}{3} + \cdots$$

Luînd în considerare dezvoltarea

$$\ln(1 - z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots,$$

obținem

$$u + vi = -\ln[1 - xe^{\mp i}] = -\ln[1 - x(\cos\varphi + i\sin\varphi)],$$

de unde rezultă

$$e^{-(u+vi)} = e^{-u}(\cos v - i\sin v) = (1 - x\cos\varphi) - i\cdot x\sin\varphi.$$

Deci,

$$e^{-u}\cos v = 1 - x\cos\varphi,$$
$$e^{-u}\sin v = x\sin\varphi$$

sau altfel

$$\operatorname{tg} v = \frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi},$$
$$e^{-2u} = (1 - x\cos\varphi)^2 + x^2\sin^2\varphi = 1 - 2x\cos\varphi + x^2.$$

Prin urmare, avem:

$$v = \operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi},$$
$$u = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2),$$

adică tocmai cele două formule pe care am vrut să le demonstrăm.

Punînd în formulele (1) și (2) $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ și scriind apoi din nou în locul literei θ litera φ, obținem:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\cos\varphi}{1 - x\sin\varphi} = \frac{x}{1}\cos\varphi + \frac{x^2}{2}\sin 2\varphi - \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi - \frac{x^4}{4}\sin 4\varphi + \frac{x^5}{5}\cos 5\varphi + \cdots,$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\sin\varphi + x^2) = \frac{x}{1}\sin\varphi - \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \frac{x^4}{4}\cos 4\varphi + \frac{x^5}{5}\sin 5\varphi - \cdots$$

Apoi, înlocuind pe x prin $-x$, găsim:

$$x\sin\varphi + \frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi - \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi - \frac{1}{4}x^4\cos 4\varphi + \frac{1}{5}x^5\sin 5\varphi + \cdots = \frac{1}{2}\ln(1 + 2x\sin\varphi + x^2),$$

$$x\cos\varphi - \frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi - \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \frac{1}{4}x^4\sin 4\varphi + \frac{1}{5}x^5\cos 5\varphi - \cdots = \operatorname{arctg}\frac{x\cos\varphi}{1 + x\sin\varphi}.$$

Aceste patru relații, adunate două cîte două, ne dau

$$x\sin\varphi - \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\sin 5\varphi - \cdots = \frac{1}{4}\ln\frac{1 + 2x\sin\varphi + x^2}{1 - 2x\sin\varphi + x^2},$$

$$x\cos\varphi - \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\cos 5\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\cos\varphi}{1 - x^2}.$$

Înlocuind apoi φ prin $\frac{\pi}{2} - \varphi$, obținem:

$$x\cos\varphi + \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\cos 5\varphi + \cdots = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2},$$

$$x\sin\varphi + \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\sin 5\varphi + \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}.$$

În acest fel găsim sistemul de formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cos n\varphi = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2), \tag{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\sin n\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}, \tag{B}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}. \tag{C}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}, \tag{D}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\cos\varphi}{1-x^2}, \tag{E}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}. \tag{F}$$

Seriile A, ..., F, convergente pentru x^2 mai mic ca 1, rămîn convergente și pentru $x = \pm 1$. Avem astfel formulele

$$\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \cdots = -\ln\left(2\sin\frac{1}{2}\varphi\right), \tag{3}$$

$$\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \cdots = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \tag{4}$$

$$\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi + \cdots = \frac{1}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi, \tag{5}$$

$$\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots = \frac{\pi}{4}, \tag{6}$$

$$\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ pentru } 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} \text{ pentru } \frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi, \end{cases} \tag{7}$$

$$\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{8}$$

$$\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \cdots = \ln\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right), \tag{9}$$

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\varphi, \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Formulele (4), (6), (7) și (10) se obțin ușor și în mod direct prin dezvoltarea în serii trigonometrice după regulile din § 43 și sînt valabile oricare ar fi valorile unghiului φ cuprinse între 0 și π.

De aceste dezvoltări trebuie să ne folosim așa cum s-a arătat în exemplul precedent, adică trebuie să alegem dezvoltarea care conține sinusurile sau cosinusurile acelorași arcuri ca și seria propusă și la care semnele coeficienților alternează în același fel ca și la seria dată. Înmulțind apoi termenul general al acestei dezvoltări cu un factor nedeterminat, se adaugă produsul astfel obținut la termenul general al seriei propuse și după ce coeficientul s-a redus la forma cea mai simplă, se obține o fracție al cărei numărător este o anumită funcție de n și conține factorul nedeterminat menționat mai sus. Acest factor se determină apoi în așa fel, încît la numărător să dispară termenul cu puterea cea mai mare a lui n.

Dacă se constată că factorul menționat are o valoare *constantă* (independentă de n), atunci ne-am atins scopul.

§ 56. Să analizăm acum care este, în general, ordinul de mărime în raport cu $\frac{1}{n}$ al coeficienților seriei Fourier pentru diverse funcții.

Știm că dacă

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

coeficienții a_n și b_n se exprimă prin formulele

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\, d\xi, \quad \pi b_n = \int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\, d\xi.$$

Să presupunem că funcția $f(x)$ admite în intervalul dintre 0 și 2π derivate care, la fel ca și funcția însăși, au un număr finit de discontinuități de prima speță în acest interval. Fie $k_1, k_2, \ldots, k_p$ punctele de discontinuitate ale lui $f(x)$. În acest caz, putem scrie egalitatea

$$\pi a_n = \int_0^{k_1} f(\xi)\cos n\xi d\xi + \int_{k_1}^{k_2} f(\xi)\cos n\xi\, d\xi + \cdots + \int_{k_p}^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\, d\xi,$$

și efectuînd integrarea prin părți, obținem

$$\pi a_n = \left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_0^{k_1} + \left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_{k_1}^{k_2} + \cdots + \left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_{k_p}^{2\pi} -$$
$$- \frac{1}{n}\int_0^{k_1} f'(\xi)\sin n\xi d\xi - \frac{1}{n}\int_{k_1}^{k_2} f'(\xi)\sin n\xi\, d\xi - \cdots - \frac{1}{n}\int_{k_p}^{2\pi} f'(\xi)\sin n\xi\, d\xi.$$

Folosind notațiile

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(k+\varepsilon) = f(k+0)$$

și

$$(\varepsilon > 0),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(k-\varepsilon) = f(k-0),$$

găsim

$$\pi a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{\pi b'_n}{n},$$

unde

$$A_n = \sin nk_1 [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] + \cdots + \sin nk_p [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)],$$

iar b'_n este coeficientul lui $\sin nx$ în dezvoltarea funcției, alcătuită din derivatele $f'(x)$, la fel cum însăși funcția $f(x)$ este alcătuită din valorile lui $f(x)$ date în intervalele de mai sus.

În același fel rezultă

$$\pi b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{\pi a'_n}{n},$$

unde

$$B_n = -\{-f(+0) + \cos nk_1 [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] + \\ + \cos nk_2 [f(k_2 - 0) + f(k_2 + 0)] + \cdots + f(2\pi - 0)\},$$

iar a'_n este coeficientul lui $\cos nx$ în dezvoltarea amintită mai sus a funcției alcătuite din $f'(x)$.

Tot astfel, vom găsi

$$\pi a'_n = \frac{A'_n}{n} - \frac{\pi b''_n}{n},$$

unde $k'_1, k'_2, \ldots, k'_q$ sînt punctele de discontinuitate ale lui $f'(x)$. Avem

$$A'_n = \sin nk'_1 [f'(k'_1 - 0) - f'(k'_1 + 0)] + \sin nk'_2 [f'(k'_2 - 0) - f'(k'_2 + 0)] + \\ + \cdots + \sin nk'_p [f(k'_q - 0) - f(k'_q + 0)],$$

iar b''_n este coeficientul lui $\sin nx$ în dezvoltarea funcției, alcătuită din valorile $f''(x)$ pentru fiecare din intervalele amintite mai sus.

În mod asemănător

$$\pi b'_n = \frac{B'_n}{n} + \frac{\pi a''_n}{n},$$

unde

$$B'_n = \{-f'(+0) + \cos nk'_1 [f'(k'_1 - 0) - f'(k'_1 + 0)] + \cdots + f'(2\pi - 0)\},$$

iar a''_n este coeficientul lui $\cos nx$ în dezvoltarea funcției, alcătuită din valorile lui $f''(x)$.

Vom avea astfel

$$\pi a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} - \frac{a''_n}{n^2},$$

$$\pi b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} - \frac{b''_n}{n^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

și, prin urmare, pentru ca seria Fourier obținută să fie *absolut* convergentă, este suficient ca să avem pentru fiecare n

$$A_n = 0 \text{ și } B_n = 0,$$

deoarece în aceste condiții seria obținută va avea coeficienții de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$ și valorile absolute ale termenilor ei vor fi mai mici decît termenii seriei

$$\frac{c}{1} + \frac{c}{2^2} + \frac{c}{3^2} + \cdots + \frac{c}{n^2} + \cdots,$$

unde c este o constantă și, în acest caz, seria va fi nu numai absolut convergentă, ci și *uniform* convergentă.

Vom avea însă $A_n = B_n = 0$, dacă sînt îndeplinite condițiile

$$f(k_1 - 0) = f(k_1 + 0),$$
$$f(k_2 - 0) = f(k_2 + 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(k_p - 0) = f(k_p + 0),$$
$$f(2\pi - 0) = f(+0).$$

Se observă astfel că *seria Fourier, care reprezintă o funcție continuă în intervalul dintre* 0 *și* 2π *pentru care* $f(0) = f(2\pi)$, *este absolut și uniform convergentă. S-a mai presupus aici că* $f(x)$ *are derivate finite* $f'(x)$ *și* $f''(x)$, *continue sau cu un număr finit de discontinuități de prima speță.*

Dacă funcția reprezentată de seria Fourier are discontinuități în intervalul $(0, 2\pi)$, sau valorile ei corespunzătoare punctelor 0 și 2π nu sînt egale între ele, coeficienții dezvoltării vor fi de ordinul *întîi* în raport cu $\frac{1}{n}$.

§ 57. Expresiile obținute în paragraful precedent arată că coeficienții lui $\frac{1}{n}$, în expresiile mărimilor a_n și b_n, depind numai de mărimea salturilor funcției $f(x)$ în punctele de discontinuitate; de aceea, dacă funcția $f(x)$ este reprezentată sub forma

$$f(x) = F(x) + \varphi(x),$$

unde funcția $F(x)$ poate fi aleasă în așa fel, încît să aibă aceleași salturi ca și $f(x)$, diferența $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ poate fi reprezentată printr-o serie Fourier ai cărei coeficienți vor descrește cel puțin ca $\frac{1}{n^2}$.

Reciproc, dacă este dată dezvoltarea unei anumite funcții într-o serie Fourier, este evident că la aflarea sumei acestei serii sau la reprezentarea aproximativă a acestei funcții prin primii ei termeni, pentru a obține același grad de aproximație, se pot lua în general un număr cu atît mai mic de termeni, cu cît ordinul lor în raport cu $\frac{1}{n}$ este mai mare.

Se demonstrează că funcția $F(x)$ poate fi totdeauna determinată în așa fel, încît restul $\varphi(x)$ să fie reprezentat printr-o serie Fourier ai cărei coeficienți

Scanned with OKEN Scanner

să fie de un ordin oricît de mare în raport cu $\frac{1}{n}$. Să arătăm acum metoda generală pentru determinarea unei asemenea funcții $f(x)$.

Am văzut că la dezvoltarea funcției $f(x)$, definită între 0 și 2π, într-o serie de forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

coeficienții a_n și b_n se exprimă prin

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi$$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin (n\xi) \, d\xi.$$

Folosindu-ne de formula generală a integrării prin părți

$$\int u\varphi^{(k)} dx = u\varphi^{(k-1)} - u'\varphi^{(k-2)} + u''\varphi^{(k-3)} - u'''\varphi^{(k-4)} + \cdots \pm$$

$$\pm u^{(p-1)} \varphi^{(k-p)} \mp \int u^{(p)}\varphi^{(k-p)} dx,$$

obținem următoarele expresii (oprindu-ne la termenii cu $\frac{1}{n^4}$ pentru a simplifica scrierea):

$$\int f(\xi) \cos n\xi \, d\xi = \frac{1}{n} f(\xi) \sin n\xi + \frac{1}{n^2} f'(\xi) \cos n\xi - \frac{1}{n^3} f''(\xi) \sin n\xi -$$

$$- \frac{1}{n^4} \cos n\xi f'''(\xi) + \frac{1}{n^4} \int f^{IV}(\xi) \cos n\xi d\xi,$$

$$\int f(\xi) \sin n\xi \, d\xi = -\frac{1}{n} f(\xi) \cos n\xi + \frac{1}{n^2} f'(\xi) \sin n\xi + \frac{1}{n^3} f''(\xi) \cos n\xi -$$

$$- \frac{1}{n^4} \sin n\xi f'''(\xi) - \frac{1}{n^4} \int f^{IV}(\xi) \sin n\xi \, d\xi.$$

Notînd apoi prin $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_p$ punctele de discontinuitate ale funcției $f(x)$, situate între 0 și 2π, prin $k_1', k_2', \ldots, k_q'$ punctele de discontinuitate ale funcției $f'(x)$, adică punctele de discontinuitate ale derivatelor de ordinul întîi ale funcțiilor din care este alcătuită funcția $f(x)$ în diferitele intervale, prin $k_1'', k_2'', \ldots, k_r''$ aceleași puncte pentru funcția $f''(x)$ etc., obținem

$$\left.\begin{aligned} n\pi a_n &= A_n + \frac{A_{1n}}{n} - \frac{A_{2n}}{n^2} - \frac{A_{3n}}{n^3} + \frac{A_{4n}}{n^4} - \frac{a_n^V}{n^4}, \\ n\pi b_n &= -B_n + \frac{B_{1n}}{n} + \frac{B_{2n}}{n^2} - \frac{B_{3n}}{n^3} - \frac{B_{4n}}{n^4} - \frac{b_n^V}{n^4}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

unde

$$A_n = [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] \sin nk_1 + [f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)] \sin nk_2 + \\ + \cdots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)] \sin nk_p,$$

$$A_{1n} = f'(2\pi - 0) - f'(+0) + [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)] \cos nk_1' + \cdots + \\ + [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)] \cos nk_q',$$

$$-A_{2n} = [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)] \sin nk_1'' + \cdots + \\ + [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)] \sin nk_r'',$$

. . . . . .

$$-B_n = f(2\pi - 0) - f(+0) + [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] \cos nk_1 + \cdots + \\ + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)] \cos nk_p,$$

$$B_{1n} = [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)] \sin nk_1' + \\ + \cdots + [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)] \sin nk_q',$$

$$B_{2n} = [f''(2\pi - 0) - f''(+0)] + [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)] \cos nk_1'' + \\ + \cdots + [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)] \cos nk_r'',$$

. . . . . .

a_n^{ν} și b_n^{ν} reprezintă coeficienții cosinușilor, respectiv ai sinușilor din dezvoltarea lui $f^{\nu}(x)$.

Punînd

$$\left.\begin{array}{ll} f(2\pi - 0) - f(+0) = K_0, & f'(2\pi - 0) - f'(+0) = K_0', \\ f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0) = K_1, & f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0) = K_1', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f(k_p - 0) - f(k_p + 0) = K_p, & f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0) = K_q', \\ f''(2\pi - 0) - f''(+0) = K_0'', & \\ f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0) = K_1'', & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0) = K_r'', & \end{array}\right\} (*)$$

putem scrie formulele precedente în felul următor:

$$\left.\begin{array}{l} A_n = K_1 \sin nk_1 + K_2 \sin nk_2 + \ldots + K_p \sin nk_p, \\ A_{1n} = K_0' + K_1' \cos nk_1' + K_2' \cos nk_2' + \ldots + K_q' \cos nk_q', \\ -A_{2n} = K_1'' \sin nk_1'' + K_2'' \sin nk_2'' + \ldots + K_r'' \sin nk_r'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -B_n = K_0 + K_1 \cos nk_1 + K_2 \cos nk_2 + \ldots + K_p \cos nk_p, \\ B_{1n} = K_1' \sin nk_1' + K_2' \sin nk_2' + \ldots + K_q' \sin nk_q', \\ B_{2n} = K_0'' + K_1'' \cos nk_1'' + K_2'' \cos nk_2'' + \ldots + K_r'' \cos nk_r'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} (2)$$

Formulele (1) și (2) arată că în dezvoltarea coeficienților a_n și b_n în serii de puteri ale lui $\frac{1}{n}$, coeficienții A_n și B_n de pe lîngă $\frac{1}{n}$ depind numai de punctele de discontinuitate și de mărimile salturilor funcției $f(x)$ însăși,

coeficienții A_{1n} și B_{1n} de pe lîngă $\frac{1}{n^2}$ depind numai de punctele de discontinuitate și de mărimile salturilor primei derivate $f'(x)$ a funcției reprezentate prin seria Fourier dată; coeficienții A_{2n} și B_{2n} de pe lîngă $\frac{1}{n^3}$ depind numai de punctele de discontinuitate și de mărimea salturilor celei de a doua derivate $f''(x)$ etc.

Se observă de aici că, dacă vrem, de exemplu, să determinăm funcția $F(x)$ din expresia

$$f(x) = F(x) + \varphi(x), \tag{3}$$

astfel încît seria Fourier care reprezintă funcția $\varphi(x)$ să aibă coeficienții de ordinul j în raport cu $\frac{1}{n}$, atunci după ce determinăm punctele de discontinuitate ale funcției $f(x)$ și ale primelor ei $j-1$ derivate, trebuie să compunem funcția $F(x)$ din porțiuni de drepte și parabole de diferite ordine, ale căror ecuații

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1, \\ y &= \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y &= \alpha_{j-2} x^{j-1} + \beta_{j-2} x^{j-2} + \dots + \lambda \end{aligned}$$

se determină astfel încît mărimile salturilor și punctelor de discontinuitate ale funcției $f_1(x)$ și ale primelor ei $j-1$ derivate să fie aceleași ca și cele ale funcției $f(x)$, definită prin seria dată.

Operațiile pentru aflarea funcției $F(x)$ se efectuează în următoarea succesiune: înainte de toate, aflăm punctele de discontinuitate și valorile salturilor funcției $f(x)$, adică mărimile

$$k_1, k_2, \dots, k_p \text{ și } K_0, K_1, K_2, \dots, K_p,$$

folosindu-ne în acest scop de formulele (2) și (1), care trebuie să fie verificate identic, adică trebuie să fie valabile pentru toate valorile lui n. Făcînd apoi în seria propusă $x = 0, k_1, k_2, \dots, k_p$, calculăm valorile corespunzătoare ale sumei acestei serii. Pe baza teoremei lui Dirichlet se vor obține valorile:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[f(2\pi - 0) + f(+0)], \\ &\frac{1}{2}[f(k_1 - 0) + f(k_1 + 0)], \\ &\frac{1}{2}[f(k_2 - 0) + f(k_2 + 0)], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{1}{2}[f(k_p - 0) + f(k_p + 0)], \end{aligned}$$

și deoarece

$$\begin{aligned} f(2\pi - 0) - f(+0) &= K_0, \\ f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0) &= K_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f(k_p - 0) - f(k_p + 0) &= K_p, \end{aligned}$$

iar mărimile K_0, K_1,..., K_p se cunosc, se vor găsi și valorile $f(+0)$ și $f(2\pi-0)$; $f(k_1-0)$ și $f(k_1+0)$;...; $f(k_p-0)$ și $f(k_p+0)$.

Marcînd aceste valori pe grafic și ducînd prin punctele corespunzătoare linii drepte, funcția $F_1(x)$, alcătuită din aceste porțiuni rectilinii, va avea aceleași discontinuități, aceleași salturi și aceleași valori în punctele de discontinuitate și în punctele $x=0$ și $x=2\pi$, ca și funcția dată $f(x)$. Cu alte cuvinte, funcția $F_1(x)$ se definește în felul următor:

$$\left.\begin{aligned}
F_1(x) &= f(+0) + \frac{x}{k_1}\cdot f(k_1-0) && \text{pentru } 0<x<k_1,\\
F_1(x) &= f(k_1+0) + \frac{x-k_1}{k_2-k_1}[f(k_2-0)-f(k_1+0)] && \text{pentru } k_1<x<k_2,\\
F_1(x) &= f(k_2+0) + \frac{x-k_2}{k_3-k_2}[f(k_3-0)-f(k_2+0)] && \text{pentru } k_2<x<k_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_1(x) &= f(k_p+0) + \frac{x-k_p}{2\pi-k_p}[f(2\pi-0)-f(k_p+0)] && \text{pentru } k_p<x<2\pi.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dacă luăm

$$F(x) = F_1(x),$$

adică dacă punem

$$f(x) = F_1(x) + \varphi_1(x),$$

funcția

$$\varphi_1(x) = f(x) - F_1(x)$$

va fi continuă în întregul interval dintre $x=0$ și $x=2\pi$; concomitent vom avea

$$\varphi_1(0) = 0 \quad \text{și} \quad \varphi_1(2\pi) = 0.$$

Prin urmare, la dezvoltarea funcției $\varphi_1(x)$ într-o serie Fourier, coeficienții obținuți sînt cel puțin de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$.

Se observă de aici că este suficient să se dezvolte funcția $F_1(x)$ într-o serie Fourier și să se scadă seria obținută din cea dată, pentru ca restul să fie funcția $\varphi_1(x)$.

Să presupunem că seria obținută în acest fel pentru

$$\varphi_1(x) = f(x) - F_1(x)$$

va fi

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx, \quad (5)$$

coeficienții c_n și d_n fiind în general de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$; aceasta înseamnă că funcția $\varphi_1(x)$ poate fi derivată termen cu termen. Efectuînd această derivare, obținem dezvoltarea lui $\varphi_1'(x)$, în care coeficienții vor fi de ordinul lui $\frac{1}{n}$.

Analog celor precedente, reprezentăm pe $\varphi_1'(x)$ sub forma

$$\varphi_1'(x) = \psi_1(x) + \omega_1(x), \tag{6}$$

astfel încît funcția $\psi_1(x)$ să fie alcătuită din segmente rectilinii și să aibă aceleași salturi și aceleași puncte de discontinuitate ca și $\varphi_1'(x)$; funcția $\omega_1(x)$ va fi atunci reprezentată printr-o serie ai cărei coeficienți sînt de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$.

Integrînd egalitatea (6), obținem funcția

$$\varphi_1(x) = \int \psi_1(x)\,dx + \int \omega_1(x)\,dx.$$

Calculînd integrala

$$\int \psi_1(x)\,dx,$$

observăm că în locul segmentului rectiliniu $ax+b$ se obține parabola corespunzătoare

$$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C.$$

Constantele arbitrare C, introduse prin această integrare, se determină din condiția ca funcția $\varphi_1(x)$ să fie continuă, iar valorile ei corespunzătoare punctelor de discontinuitate ale funcției $\psi_1(x)$ se vor afla după formula (5).

În schimb, integrala

$$\int \omega_1(x)\,dx$$

va fi reprezentată de o serie ai cărei coeficienți sînt de ordinul al treilea în raport cu $\frac{1}{n}$.

Punînd

$$\int \psi_1(x)\,dx = F_2(x) \quad \text{și} \quad \int \omega_1(x)\,dx = \varphi_2(x),$$

obținem egalitatea

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \varphi_2(x).$$

Evident că dacă se ia

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

seria care reprezintă funcția $\varphi_2(x)$ din egalitatea

$$f(x) = F(x) + \varphi_2(x)$$

va avea coeficienți de ordinul al treilea în raport cu $\frac{1}{n}$, în schimb funcția discontinuă $F(x)$ dată grafic sau analitic va fi alcătuită pentru diferitele intervale din segmente rectilinii și segmente de parabole.

Derivăm de două ori funcția $\varphi_2(x)$; în acest caz, seria care reprezintă $\varphi_2''(x)$ va avea coeficienți de ordinul întîi. Determinînd punctele de dis-

Scanned with OKEN Scanner

continuitate și valorile salturilor funcției $\varphi_2''(x)$ și alcătuind funcția $\psi_2(x)$ din segmente rectilinii, astfel încît să aibă aceleași discontinuități și aceleași salturi ca și $\varphi_2''(x)$, punem:

$$\varphi_2''(x) = \psi_2(x) + \omega_2(x).$$

Această egalitate o integrăm de două ori termen cu termen, constantele arbitrare fiind determinate prin valorile particulare ale funcției $\varphi_2(x)$ și ale derivatei ei. Obținem o expresie de tipul

$$\varphi_2(x) = F_3(x) + \varphi_3(x),$$

în care $\varphi_3(x)$ va fi reprezentată de o serie cu coeficienți de ordinul al patrulea în raport cu $\frac{1}{n}$. Continuînd în același fel, putem ajunge, evident, la orice ordin de descreștere.

Observăm că din aceleași expresii rezultă că, dacă funcția $f(x)$ este alcătuită din porțiuni, dintre care fiecare este o funcție întreagă (polinom) în raport cu x, coeficienții a_n și b_n vor fi polinoame în $\frac{1}{n}$, al căror grad va fi cu cel mult *o unitate* mai mare decît puterea cea mai mare a lui x.

Astfel, de exemplu, dacă $f(x)$ ar fi definită prin condițiile

$$f(x) = ax + b \text{ pentru } x \text{ cuprins între } 0 \text{ și } \frac{\pi}{4}\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{pentru } x \text{ cuprins între } \frac{\pi}{4} \text{ și } \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pentru } x \text{ cuprins între } \frac{\pi}{2} \text{ și } 2\pi\left(\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right),$$

coeficienții a_n și b_n ar avea forma

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3}.$$

Aplicînd procesul descris mai sus, am obține $\varphi_3(x) = 0$ pentru întregul interval $(0, 2\pi)$ și, prin urmare, am afla, din dezvoltarea dată, însăși funcția $f(x)$.

Să luăm, de exemplu, seria

$$S_1 = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots,$$

care este, după cum am văzut, convergentă pentru toate valorile lui x, cuprinse între 0 și 2π. Pentru $x=0$ și $x=2\pi$ rezultă $S_1=0$.

Avem:

$$n\pi a_n = 0 = K_1 \sin nk_1 + K_2 \sin nk_2 + \ldots,$$
$$n\pi b_n = \pi = -[K_0 + K_1 \cos nk_1 + \ldots].$$

Din a doua ecuație găsim:

$$K_0 = f(2\pi - 0) - f(+0) = -\pi,$$
$$K_1 = K_2 = \ldots = 0.$$

Prin urmare, funcția $f(x)$ nu are discontinuități în intervalul dintre $x = 0$ și $x = 2\pi$, însă diferența valorilor funcției la capetele intervalului este $f(2\pi - 0) - f(+0) = -\pi$.

Deoarece pentru $x = \pi$, $f(x) = 0$, urmează că, dacă luăm pentru funcția $F_1(x)$ un segment de dreaptă care trece prin punctele A, B, C, (fig. 55), funcția

$$\varphi(x) = f(x) - F_1(x)$$

nu va avea discontinuități, și deoarece $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, urmează că dezvoltarea lui $\varphi(x)$ poate avea numai coeficienți de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$.

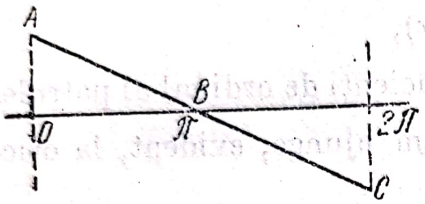

Fig. 55

Astfel, avem

$$F_1(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

pentru $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

dezvoltînd-o, vom observa că

$$F_1(x) = f(x)$$

și că $\varphi(x) = 0$.

Trebuie să se aibă în vedere că în aceste raționamente se presupune că însăși funcția $f(x)$ și derivatele ei pînă la ordinul $j-1$ rămîn finite pentru toate valorile din intervalul $[0, 2\pi]$ (inclusiv capetele acestuia); de aceea, dacă am fi luat seria

$$f(x) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots,$$

raționamentele nu ar fi fost aplicabile, deoarece pentru $x = 0$ și $x = 2\pi$ avem $f(x) = \infty$, ceea ce înseamnă că formulele folosite nu sînt valabile.

§ 58. În practică, se întîlnesc cu mult mai des serii dezvoltate numai după sinușii sau după cosinușii multiplilor lui $\frac{\pi x}{l}$, presupunîndu-se că funcția $f(x)$ este dată între $x = 0$ și $x = l$.

În acest caz, coeficienții dezvoltărilor

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

și

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

se exprimă prin formulele

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi)\, d\xi$$

și

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

Procedînd în mod analog cu cele de mai sus, obținem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n\pi a_n}{2} &= A_n + \frac{l}{\pi}\cdot\frac{A_{1n}}{n} - \frac{l^2}{\pi^2}\cdot\frac{A_{2n}}{n^2} - \frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{A_{3n}}{n^3} + \ldots, \\ \frac{n\pi b_n}{2} &= -B_n + \frac{l}{\pi}\cdot\frac{B_{1n}}{n} + \frac{l^2}{\pi^2}\cdot\frac{B_{2n}}{n^2} - \frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{B_{3n}}{n^3} - \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

unde

$$A_n = [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)]\sin\frac{n\pi k_1}{l} + \ldots +$$
$$+ [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)]\sin\frac{n\pi k_p}{l},$$

$$A_{1n} = f'(l-0)\cos n\pi - f'(+0) + [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\cos\frac{n\pi k_1'}{l} +$$
$$+ \ldots + [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)]\cos\frac{n\pi k_q'}{l},$$

$$-A_{2n} = [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\sin\frac{n\pi k_1''}{l} + \ldots +$$
$$+ [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)]\sin\frac{n\pi k_r''}{l},$$

. . . . . .

$$-B_n = f(l-0)\cos n\pi - f(+0) + [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)]\cos\frac{n\pi k_1}{l} +$$
$$+ \ldots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)]\sin\frac{n\pi k_p}{l},$$

$$B_{1n} = [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\sin\frac{n\pi k_1'}{l} +$$
$$+ [f'(k_2' - 0) - f'(k_2' + 0)]\sin\frac{n\pi k_2'}{l} + \ldots,$$

$$B_{2n} = f''(l - 0)\cos n\pi - f''(+0) +$$
$$+ [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\cos\frac{n\pi k_1''}{l} + \ldots$$

. . . . . .

Punînd ca și în § 57:

$K_0 = f(l-0)\cos n\pi - f(+0)$, $\quad K_0' = f'(l-0) - f'(+0)$,

$K_1 = f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)$, $\quad K_1' = f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)$,

. . . . .

putem scrie formulele precedente în felul următor:

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= K_1 \sin\frac{n\pi k_1}{l} + K_2 \sin\frac{n\pi k_2}{l} + \cdots + K_p \sin\frac{n\pi k_p}{l},\\
A_{1n} &= K'_0 + K'_1 \cos\frac{n\pi k'_1}{l} + \cdots + K_q \cos\frac{n\pi k'_q}{l},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-B_n &= K_0 + K_1 \cos\frac{n\pi k_1}{l} + K_2 \cos\frac{n\pi k_2}{l} + \cdots + K_p \cos\frac{n\pi k_p}{l},\\
B_{1n} &= K'_1 \sin\frac{n\pi k'_1}{l} + K'_2 \sin\frac{n\pi k'_2}{l} + \cdots + K'_q \sin\frac{n\pi k'_q}{l},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

În rest, trebuie procedat în același fel ca și mai înainte.

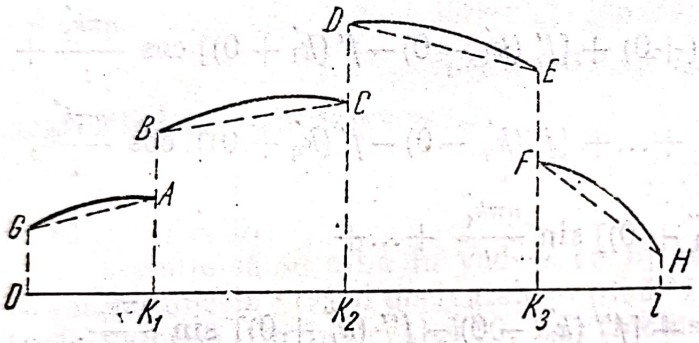

Fig. 56

Astfel, să presupunem că este dată seria care reprezintă o funcție $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

definită între $x=0$ și $x=l$. Să presupunem că această funcție este reprezentată de graficul din fig. 56.

Deoarece între 0 și l funcția are discontinuități pentru $x = k_1$, $x = k_2$, $x = k_3$, salturile fiind respectiv egale cu

$$\begin{aligned}
K_1 &= AB = f(k_1 + 0) - f(k_1 - 0),\\
K_2 &= CD = f(k_2 + 0) - f(k_2 - 0),\\
-K_3 &= EF = f(k_3 - 0) - f(k_3 + 0),
\end{aligned}$$

determinînd mărimea și punctele acestor discontinuități, vom alcătui funcția $F_1(x)$, care va fi:

$$F_1(x) = f(+0) + \frac{f(k_1 - 0)}{k_1} \cdot x \qquad \text{pentru } 0 < x < k_1,$$

$$F_1(x) = f(k_1 + 0) + \frac{x - k_1}{k_2 - k_1}[f(k_2 - 0) - f(k_1 + 0)] \qquad \text{pentru } k_1 < x < k_2,$$

$$F_1(x) = f(k_2 + 0) + \frac{x - k_2}{k_3 - k_2}[f(k_3 - 0) - f(k_2 + 0)] \qquad \text{pentru } k_2 < x < k_3,$$

$$F_1(x) = f(k_3 + 0) + \frac{x - k_3}{l - k_3}[f(l - 0) - f(k_3 + 0)] \qquad \text{pentru } k_3 < x < l,$$

ceea ce înseamnă că $F_1(x)$ este reprezentată de linia arătată în figură care este alcătuită din porțiuni rectilinii, astfel încît saltu rile se produc la aceleași abscise și cu aceeași valoare ca și la funcția dată.

Funcția $F_1(x)$, alcătuită în acest fel, se dezvoltă în serie Fourier după sinușii multiplilor lui $\frac{\pi x}{l}$ și se scade această serie din cea dată; rămîne o serie ai cărei coeficienți sînt de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$; să notăm această funcție cu $\varphi(x)$. Aflăm derivata $\varphi'(x)$, derivînd seria termen cu termen, și obținem o serie asemănătoare celei propuse. Găsim punctele de discontinuitate și mărimea salturilor, și, ca mai înainte, alcătuim funcția $\varphi_1(x)$, care are aceleași salturi și aceleași puncte de discontinuitate ca și $\varphi'(x)$, și se compune din porțiuni rectilinii.

Vom avea atunci:

$$\varphi'(x) = \varphi_1(x) + \psi(x),$$

unde $\psi(x)$ va reprezenta o funcție a cărei dezvoltare după cosinuși are coeficienți care sînt cel puțin de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$.

Dezvoltăm pe $\varphi_1(x)$ în serie Fourier și determinăm dezvoltarea lui $\psi(x)$, luînd diferența seriilor

$$\varphi'(x) - \varphi_1(x) = \psi(x).$$

Integrînd, avem:

$$\varphi(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx.$$

Integrala

$$\int \varphi_1(x)\,dx$$

va consta din porțiuni rectilinii de forma $\alpha x + \beta$, pentru porțiunile în care $\varphi_1(x)$ este reprezentată de o dreaptă paralelă la axa Ox și din arce date de ecuația $\frac{ax^2}{2} + bx + \gamma$, pentru porțiunile în care $\varphi_1(x)$ este reprezentată prin dreapta $ax + b$; constantele arbitrare le determinăm după valorile pe care le ia funcția $\varphi(x)$ în punctele de discontinuitate ale derivatei ei. În acest fel, punem în evidență din dezvoltare funcția

$$F_1(x) + \int \varphi_1(x)\,dx,$$

astfel încît restul va fi o serie cu coeficienți de ordinul al treilea în raport cu $\frac{1}{n}$. În acest fel putem continua pînă ce se obține o serie în care calculul sumei, cu precizia dorită, nu mai prezintă nici un fel de dificultate, deoarece aceasta converge foarte rapid.

Exemplul 1. Să examinăm seria

$$f(x) = \frac{8\beta}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{2}\sin\frac{5\pi x}{l} + \cdots\right],$$

pe care am considerat-o în § 49 și pentru care coeficientul b_n se exprimă prin formula

$$b_n = \frac{8\beta}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Să presupunem că vrem să aflăm funcția reprezentată de această serie.

Deoarece coeficientul b_n este de ordinul al doilea în raport cu $\frac{1}{n}$, urmează că funcția $f(x)$ este continuă între $x = 0$ și $x = l$.

Aflăm derivata

$$f'(x) = \frac{8\beta}{\pi} \cdot \frac{1}{l}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{8\beta}{\pi l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

După formula (7) găsim

$$\frac{n\pi \cdot a_n'}{2} = \frac{4\beta}{l} \cdot \sin\frac{n\pi}{2} = [f'(k_1 - 0) - f'(k_1 + 0)]\sin\frac{n\pi k_1}{l} + \cdots;$$

și, deoarece această egalitate trebuie să aibă loc în mod identic, urmează că

$$\frac{n\pi k_1}{l} = \frac{n\pi}{2},$$

adică

$$k_1 = \frac{l}{2},$$

$$f'(k_1 - 0) - f'(k_1 + 0) = \frac{4\beta}{l}.$$

După teorema lui Dirichlet, avem pentru punctul de discontinuitate

$$k_1 = \frac{l}{2}$$

relația

$$\frac{1}{2}[f'(k_1 - 0) + f'(k' + 0)] = \frac{8\beta}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \cdot \cos\frac{n\pi}{2} = 0.$$

De aici rezultă

$$f'(k_1 - 0) = \frac{2\beta}{l}; \qquad f'(k_1 + 0) = -\frac{2\beta}{l}.$$

Aceasta înseamnă că pentru $F_1'(x)$ trebuie luată funcția

$$F_1'(x) = \frac{2\beta}{l} \quad \text{pentru } 0 < x < \frac{l}{2},$$

$$F_1'(x) = -\frac{2\beta}{l} \text{ pentru } \frac{l}{2} < x < l,$$

adică $F_1'(x)$ este reprezentată de graficul din fig. 57.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, dezvoltînd pe $F_1'(x)$ în serie Fourier, obținem:

$$F_1'(x) = \frac{8\beta}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l},$$

adică

$$f'(x) = F_1'(x),$$

de unde rezultă

$$f(x) = F_1(x) + C.$$

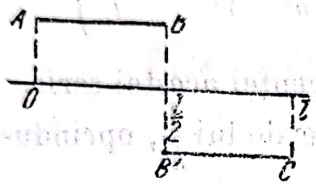

Fig. 57

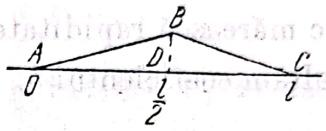

Fig. 58

Însă, integrînd funcția $F_1'(x)$, observăm că pentru intervalul dintre $x = 0$ și $x = \frac{l}{2}$ se obține:

$$F_1(x) = \frac{2\beta}{l} x \text{ pentru } 0 < x < \frac{l}{2},$$

deoarece trebuie să avem $F_1(x) = 0$, în punctul $x = 0$.

Pentru intervalul dintre $\frac{l}{2}$ și l găsim

$$F_1(x) = -\frac{2\beta}{l} x + C_1$$

și, deoarece pentru $x = l$ trebuie să avem $F_1(x) = 0$, urmează că

$$C_1 = 2\beta$$

și deci

$$F_1(x) = \frac{2\beta}{l}(l - x) \text{ pentru } \frac{l}{2} < x < 1.$$

În acest fel, vom avea:

$$f(x) = F_1(x) = \frac{2\beta}{l} x \text{ pentru } 0 < x < \frac{l}{2},$$

$$f(x) = F_1(x) = \frac{2\beta}{l}(l - x) \text{ pentru } \frac{l}{2} < x < l,$$

ceea ce înseamnă că reprezentarea grafică a lui $f(x)$ este dată de linia poligonală ABC (fig. 58), unde săgeata $BD = \beta$ și $AD = DC = \frac{l}{2}$.

Se observă ușor că atunci cînd coeficienții din seria Fourier se exprimă prin polinoame în $\frac{1}{n}$, cu coeficienți care nu depind de n, atunci, procedînd în mod analog, alcătuim funcția reprezentată de această serie, iar în diferitele

porțiuni această funcție va fi reprezentată de curbe ale căror ecuații vor fi de forma

$$y = ax^h + bx^{h-1} + \cdots + h$$

unde k este un număr întreg și pozitiv.

Exemplul 2. Să luăm acum o serie la care coeficienții nu sînt funcții întregi de $\frac{1}{n}$. Fie

$$f(x) = a\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

și se cere să se mărească rapiditatea convergenței acestei serii.

Să dezvoltăm coeficientul b_n după puterile lui $\frac{1}{n^2}$, oprindu-ne la termenul cu $\frac{1}{n^5}$; avem atunci

$$\frac{n}{n^2-1^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right];$$

și seria propusă poate fi, prin urmare, scrisă în felul următor:

$$S = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1^2}\sin\frac{n\pi x}{l} = S_1 + S_3 + \Omega,$$

unde

$$S_1 = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$S_3 = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

și

$$\Omega = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Să notăm cu $F_1(x)$ funcția reprezentată de seria S_1; avem atunci pentru seria S_1

$$\frac{n\pi}{2}b_n = -a\cos\frac{n\pi}{2} =$$

$$= -\left[F_1(l-0)\cos n\pi - F_1(+0) + [F_1(k_1-0) - F_1(k_1+0)]\cdot\cos\frac{n\pi k_1}{l} + \cdots\right],$$

de unde rezultă

$$F_1(l-0)=0, \qquad F_1(+0)=0,$$

$$\frac{n\pi}{2}=\frac{n\pi k_1}{l},$$

adică

$$k_1=\frac{l}{2}$$

și

$$F_1(k_1-0)-F_1(k_1+0)=a.$$

Aceasta înseamnă că în punctul $x=k_1=\frac{l}{2}$ funcția $F_1(x)$ face un salt, a cărui mărime este a.

Pentru a afla valorile $F_1(k_1+0)$ și $F_1(k_1-0)$, punem $x=\frac{l}{2}$ în seria S_1:

$$F_1(k_1-0)+F_1(k_1+0)=0.$$

Astfel, avem ecuațiile

$$F_1(k_1-0)-F_1(k_1+0)=a$$

și

$$F_1(k_1-0)+F_1(k_1+0)=0,$$

de unde rezultă

$$F_1(k_1-0)=\frac{a}{2}$$

și

$$F_1(k_1+0)=-\frac{a}{2}.$$

Deoarece, însă,

$$F_1(+0)=0$$

și

$$F_1(l-0)=0,$$

vom lua pentru $F_1(x)$ funcția

$$F_1(x)=\frac{a}{l}x \qquad \text{pentru } 0<x<\frac{l}{2},$$

$$F_1(x)=\frac{a}{l}(x-l) \quad \text{pentru } \frac{l}{2}<x<l,$$

reprezentînd-o printr-o serie Fourier dezvoltată, ca și seria dată, după sinușii multiplilor lui $\frac{\pi x}{l}$.

Vom avea:

$$b_{1,n} = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{a}{l}\xi \sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{a}{l}(\xi - l)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi =$$

$$= \frac{2a}{l^2}\int_0^{l} \xi \sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi - \frac{2a}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = -\frac{2a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Prin urmare,

$$F_1(x) = S_1 = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

și deci

$$f(x) - \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - F_1(x) = S_3 + \Omega.$$

Suma

$$S_3 = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

reprezintă o funcție continuă împreună cu prima ei derivată. De aceea, derivînd această funcție de două ori, obținem:

$$S_3'' = +\frac{2a\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} = F_3''(x),$$

iar această funcție este definită, în baza celor spuse relativ la funcția $F_1(x)$, de egalitățile

$$F_3''(x) = -\frac{a\pi^2}{l^3}x \qquad \text{pentru } x \text{ cuprins între } 0 \text{ și } \frac{l}{2},$$

$$F_3''(x) = -\frac{a\pi^2}{l^3}(x - l) \qquad \text{pentru } x \text{ cuprins între } \frac{l}{2} \text{ și } l.$$

Deci, avem:

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \qquad \text{pentru } x \text{ cuprins între } 0 \text{ și } \frac{l}{2},$$

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6} + C_3(x - l) + C_4 \qquad \text{pentru } x \text{ cuprins între } \frac{l}{2} \text{ și } l.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea constantelor C_1, C_2, C_3, C_4 avem condițiile

$$F_3(0) = 0, \quad F_3(l) = 0,$$

$$\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right)_{x=\frac{l}{2}} = \left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6} + C_3(x-l) + C_4\right)_{x=\frac{l}{2}}$$

$$\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right)'_{x=\frac{l}{2}} = \left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6} + C_3(x-l) + C_4\right)'_{x=\frac{l}{2}}$$

deoarece funcția $F_3(x)$, cum și prima ei derivată, sînt continue pentru $0 < x < l$ și, pe lîngă aceasta, $F_3(0) = F_3(l) = 0$.

Obținem în acest fel:

$$C_2 = C_4 = 0, \quad C_1 = C_3 = \frac{a\pi^2}{24l}$$

astfel încît funcția $F_3(x)$ este definită de egalitățile

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{6l^3}x^3 + \frac{a\pi^2}{24l}x \text{ pentru } x \text{ de la } 0 \text{ la } \frac{l}{2};$$

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{6l^3}(x-l)^3 + \frac{a\pi^2}{24l}(x-l) \text{ pentru } \frac{l}{2} < x < l;$$

$F_3(x)$ este reprezentată de curba din fig. 59.

Punînd

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + F_1(x) + F_3(x) + \Omega,$$

unde $F_1(x)$ și $F_3(x)$ sînt funcțiile găsite mai sus, reducem calculul valorilor funcției $f(x)$ la calculul valorilor funcțiilor $F_1(x)$ și $F_3(x)$, care este foarte simplu, cum și la calculul sumei Ω, reprezentată de o serie ai cărei coeficienți sînt de ordinul al cincilea în raport cu $\frac{1}{n}$, în timp ce în seria propusă aceștia au fost de ordinul întîi în raport cu $\frac{1}{n}$.

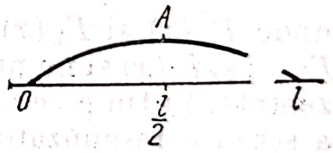

Fig. 59

§ 59. La această metodă de punere în evidență a termenilor, din seria dată, care determină discontinuitățile funcției sau ale derivatelor ei, trebuie să se recurgă în mod necesar și în cazul cînd se cere să se calculeze sau să se reprezinte sub forma unei serii, derivata de ordinul întîi sau de un ordin superior a funcției date, dacă această derivată nu poate fi aflată prin derivarea directă a seriei propuse.

Să ilustrăm aceasta printr-un exemplu.

Să presupunem, de exemplu, că funcția $f(x)$ este definită astfel:

$$f(x) = a\sin\frac{\pi x}{l} \text{ pentru } 0 < x < \frac{l}{2}$$

și

$$f(x) = 0 \qquad \text{pentru } \frac{l}{2} < x < l.$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident că această funcție nu are derivată în punctul de discontinuitate, adică pentru

$$x = \frac{l}{2},$$

în timp ce pentru toate celelalte valori ale lui x are derivate de *orice* ordin.

Astfel, de exemplu, în cazul funcției date, derivata de ordinul al doilea ar fi

$$f''(x) = -\frac{\pi^2 a}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{pentru} \quad 0 < x < \frac{l}{2},$$

$$f''(x) = 0 \qquad\qquad \text{pentru} \quad \frac{l}{2} < x < l,$$

în timp ce seria Fourier, care reprezintă funcția dată, are coeficienți de ordinul *întîi* în raport cu $\frac{1}{n}$; dacă am deriva această serie termen cu termen, de două ori, am obține o serie ai cărei coeficienți ar fi de ordinul întîi în raport cu n, adică ai cărei coeficienți ar crește nemărginit; se înțelege că această serie fiind divergentă, nu ar avea nici un sens.

Cu toate acestea, dacă reprezentăm această funcție în felul următor:

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \varphi(x),$$

unde $F_1(x)$ și $F_2(x)$ sînt funcții cu aceleași discontinuități ca și $f(x)$ și $f'(x)$, astfel încît $\varphi(x)$ să aibă o dezvoltare ai cărei coeficienți sînt de ordinul al treilea în raport cu $\frac{1}{n}$, am putea scrie egalitatea

$$f''(x) = F_1''(x) + F_2''(x) + \varphi''(x)$$

unde $F_1''(x)$ și $F_2''(x)$ ar putea fi determinate pe baza *definiției* funcțiilor $F_1(x)$ și $F_2(x)$ și nu prin derivarea seriilor, prin care aceste funcții sînt reprezentate, în timp ce $\varphi''(x)$ ar putea fi aflată prin derivarea termen cu termen a seriei corespunzătoare.

Astfel, să luăm exemplul nostru, adică

$$f(x) = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{pentru } 0 < x < \frac{l}{2},$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{pentru } \frac{l}{2} < x < l.$$

În acest caz, seria pentru $f(x)$ este:

$$f(x) = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{2a}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 1} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

care a fost analizată în paragraful precedent, unde am avut egalitatea

$$f(x) = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi x}{l} + F_1(x) + S_3 + \Omega.$$

Însă

$$S_3 + \Omega = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

iar $F_1(x)$ constă din porțiuni rectilinii, astfel încît derivata ei de ordinul al doilea este nulă, în afară de punctele de discontinuitate, unde această derivată nu există.

Avem, prin urmare,

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + F_1(x) - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

iar două derivări consecutive ne dau

$$f''(x) = -\frac{a}{2}\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{2a}{\pi}\frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{l^2}\left[\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}\right] = -f(x)\frac{\pi^2}{l^2}.$$

Așadar,

$$f''(x) = -\frac{a\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} \text{ pentru } 0 < x < \frac{l}{2}$$

și

$$f''(x) = 0 \qquad \text{pentru } \frac{l}{2} < x < l;$$

pentru $x = \frac{l}{2}$ funcția $f''(x)$ este discontinuă.

Dacă funcția $f(x)$ nu ar fi cunoscută, atunci ecuația

$$f''(x) + \frac{\pi^2}{l^2}f(x) = 0$$

ne-ar servi ca o definiție.

În adevăr, din această ecuație rezultă:

$$f(x) = C_1\sin\frac{\pi x}{l} + C_2\cos\frac{\pi x}{l},$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare, care pot avea valori diferite pentru diferitele porțiuni ale funcției $f(x)$, fiindcă funcția $f(x)$ are discontinuități între 0 și l.

Valorile constantelor C_1 și C_2 trebuie să fie determinate prin valorile funcției de la începutul și sfîrșitul fiecărui interval de continuitate.

Am văzut astfel în § 58, exemplul 2, că funcția $f(x)$ este discontinuă

Scanned with OKEN Scanner

pentru $x = \frac{l}{2}$. Prin urmare, primul ei interval de continuitate este cuprins între $x = 0$ și $x = \frac{l}{2}$. Am văzut că în acest interval avem

$$f(0) = 0 \quad \text{și} \quad f\left(\frac{l}{2} - 0\right) = a$$

de unde rezultă

$$C_1 = a \quad \text{și} \quad C_2 = 0,$$

astfel încît

$$f(x) = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{pentru} \quad 0 < x < \frac{l}{2}.$$

Al doilea interval de continuitate al funcției noastre este cuprins între $x = \frac{l}{2}$ și $x = l$. După cum am văzut, avem în acest interval

$$f\left(\frac{l}{2} + 0\right) = 0 \quad \text{și} \quad f(l) = 0,$$

prin urmare

$$C_1 = 0 \quad \text{și} \quad C_2 = 0,$$

adică

$$f(x) = 0 \text{ pentru } \frac{l}{2} < x < l.$$

În acest fel am definit complet funcția $f(x)$.

La folosirea seriilor Fourier, pentru rezolvarea problemelor din teoria elasticității și rezistența materialelor, trebuie să avem totdeauna în vedere cele spuse în acest paragraf, privitor la calculul derivatelor funcțiilor, reprezentate de aceste serii.

Observăm, de asemenea, că această metodă de îmbunătățire a rapidității convergenței seriilor Fourier și de aflare a derivatelor funcțiilor reprezentate de aceste serii, mai poate servi pentru demonstrarea sau pentru verificarea faptului că funcția reprezentată de seria dată satisface în adevăr ecuația diferențială din care ea a fost aflată, cu toate că seria însăși nu admite derivările succesive necesare.

§ 60. Dezvoltarea în serii trigonometrice a unor funcții care nu sînt date analitic, ci grafic, de exemplu sub forma diverselor înregistrări ale unor aparate automate, pentru care este *cunoscută dinainte* perioada fenomenelor respective, necesită calcule destul de obositoare, indicate în § 53.

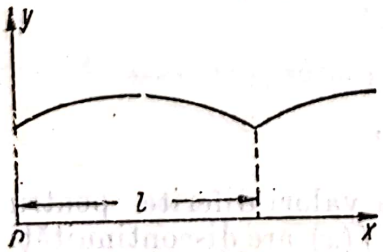

Fig. 60

Pentru a ușura această muncă, au fost construite aparate pentru calculul automat al coeficienților acestor dezvoltări.

Dintre aceste aparate, denumite *analizatoare armonice*, vom descrie numai două, și anume: analizatorul prof. Henrici din Londra și al inginerului Mader din München. Construcția analizatorului lui Henrici este bazată pe următoarele considerații. Să presupunem că funcția $f(x)$, definită grafic, are o perioadă de lungime l (fig. 60)

şi se cere dezvoltarea ei într-o serie trigonometrică, care, după cum s-a arătat în § 43, va avea forma

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \cdots + A_k \cos k\theta + \cdots + \\ + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + \cdots + B_k \sin k\theta + \cdots$$

unde $\theta = \frac{2\pi x}{l}$, iar coeficienţii se exprimă prin formulele

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos k\frac{2\pi x}{l}\,dx,$$

$$B_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin k\frac{2\pi x}{l}\,dx.$$

Să notăm funcţia $f(x)$ cu y şi să transformăm expresiile pentru A_k şi B_k prin integrare prin părţi; vom obţine:

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l y \cos k\frac{2\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{k\pi}\left[y \sin k\frac{2\pi x}{l}\right]_0^l - \frac{1}{k\pi}\int_0^l \sin k\frac{2\pi x}{l}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_0^l \sin k\frac{2\pi x}{l}\,dy$$

şi

$$B_k = \frac{2}{l}\int_0^l y \sin k\frac{2\pi x}{l}\,dx = -\frac{1}{k\pi}\left[y \cos k\frac{2\pi x}{l}\right]_0^l + \frac{1}{k\pi}\int_0^l \cos k\frac{2\pi x}{l}\,dy =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_0^l \cos k\frac{2\pi x}{l}\,dy,$$

deoarece, prin ipoteză, valorile $y = f(x)$, corespunzătoare valorilor $x = 0$ şi $x = l$, sînt egale între ele. Astfel, calculul coeficienţilor seriei se reduce la calculul integralelor de următoarele tipuri

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \int_0^l y\,dx,$$

$$A_k = -\frac{1}{k\pi}\int_0^l \sin k\frac{2\pi x}{l}\,dy$$

şi

$$B_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^l \cos k\frac{2\pi x}{l}\,dy\ ^{1}).$$

[1]) În formulele pentru A_k şi B_k, variabila de integrare este x, iar $dy = y'dx$.

Prima din aceste integrale se află cu ajutorul unui planimetru obișnuit; pentru aflarea celorlalte două, Henrici a construit analizatorul său.

În linii mari, construcția acestui dispozitiv (fig. 61) constă în următoarele: cadrul principal al aparatului poartă o axă, paralelă la latura mai lungă. La capetele acestei axe sînt fixate rotițele E și E_1, prevăzute cu dinți foarte fini.

În partea din față a aparatului, mai este fixată de cadrul său principal o furcă imobilă, ce poartă rola D, a cărei axă este paralelă la EE_1. Așezat pe planșeta de desen, aparatul o atinge cu rotițele E, E_1 și D.

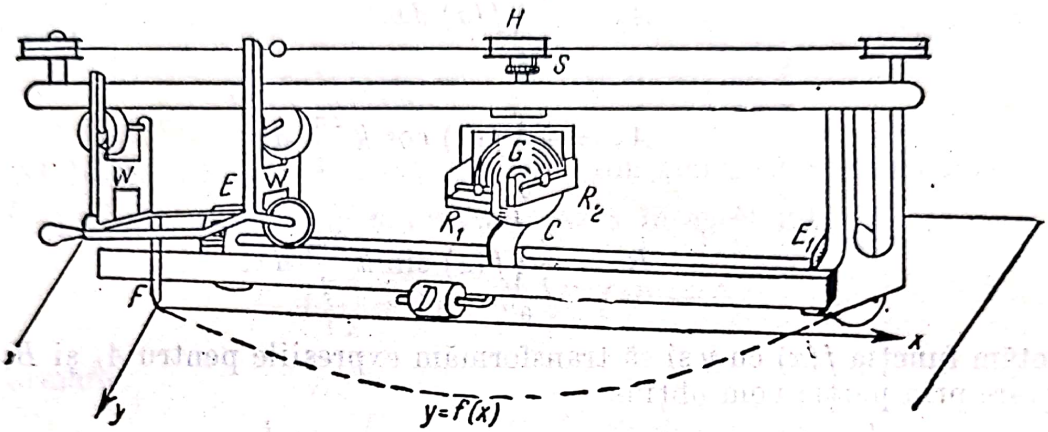

Fig. 61

În afară de aceasta, mai sînt fixați de axa EE_1 niște cilindri netezi C; diametrii acestor cilindri sînt ceva mai mici decît diametrii rotițelor E și E_1, astfel încît aceștia nu ating desenul atunci cînd aparatul este deplasat pe planșetă. În figură este arătat unul din cilindrii C.

Partea de dinainte a cadrului mai servește și ca șină directoare, pe care se poate deplasa carul W, care poartă vîrful F, cu ajutorul căruia se descrie curba $y = f(x)$ ce urmează a fi analizată.

Aparatul se așază pe planul schiței, care trebuie fixată în acest scop pe o planșetă de desen, astfel încît axa aparatului, EE_1, să fie paralelă cu axa x. Rezultă deci că întregul aparat se va deplasa liber, paralel cu axa y. Astfel, dacă vîrful F este deplasat paralel cu axa x, carul W se va deplasa pe șina sa, în timp ce întregul aparat va rămîne imobil. Dacă însă vîrful F este dus paralel cu axa y, întregul aparat se va deplasa, prin rostogolirea rotițelor E, E_1, în timp ce carul W va rămîne imobil pe șina sa (în raport cu aparatul).

Se înțelege că, atunci cînd vîrful F descrie o curbă oarecare, ambele mișcări descrise mai sus se vor produce simultan. Lungimea cu care se poate deplasa carul W este limitată de lungimea ramei și este tocmai egală cu mărimea l, care reprezintă perioada; curba ce urmează a fi analizată trebuie, deci, desenată la o scară care să asigure satisfacerea acestei condiții. Deasupra fiecăruia din cilindrii C, care este fixat pe axa EE_1, se află fixată o bucșă de porțiunea superioară a ramei prin care trece un ax S, ce se poate mișca liber în această bucșă. De acest ax este prins dispozitivul propriu-zis de integrare (fig. 62), care constă din cadrul pătratic $KLMN$, de care sînt fixate două role de integrare R_1 și R_2, absolut analoge rolelor din planimetrul lui Amsler; axele acestor role, R_1 și R_2, sînt perpendiculare între ele. Pe acest cadru mai este fixată o altă rolă r, care este apăsată pe bila G printr-un arc.

Pe fiecare din cilindrii C este așezată liber o bilă G, cuprinsă de cadrul $KLMN$, astfel încît rolele R_1 și R_2 sînt tangente la această bilă în planul cercului mare, paralel cu planul figurii, și prin urmare perpendicular pe axa S. Bila este tangentă la suprafața laterală a cilindrului, într-un punct al cercului mare care este perpendicular pe axa EE_1 și trece, prin urmare, prin axa S.

Rola r cu arcul ei servește pentru menținerea bilei în poziția de mai sus, fără să împiedice totuși rotirea ei.

Pe fiecare din axele S este așezat un tambur H, cuprins de o sîrmă întinsă, care trece peste niște scripeți montați la cadrul principal și ale cărei capete sînt fixate de carul W. Tamburii H au diametri diferiți astfel calculați, încît perimetrul primului tambur să fie egal cu l, cel de al doilea să fie $\frac{1}{2}\,l$, cel de-al treilea $\frac{1}{3}\,l$ etc; astfel, dacă carul W se deplasează pe șina sa cu lungimea l, primul tambur face o rotație completă și, prin urmare, va face o rotație completă și axa S împreună cu cadrul ei $KLMN$, al doilea tambur va efectua două rotații complete, cel de-al treilea trei etc.

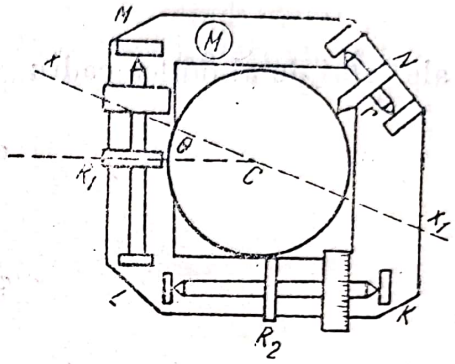

Fig. 62

Aparatul se reglează în așa fel, încît atunci cînd carul W se află în poziția extremă corespunzătoare lui $x = 0$, axele rolelor R_2 sînt paralele cu axa x, în timp ce axele rolelor R_1 sînt perpendiculare pe această direcție. Evident că dacă deplasăm carul cu lungimea x, primul cadru cu rolele sale se rotește cu unghiul $\theta_1 = \frac{2\pi x}{l}$, al doilea cadru se rotește cu unghiul $\theta_2 = 2\cdot\frac{2\pi x}{l}$ etc.

Să presupunem acum că, în această poziție a carului W, vîrful F va fi deplasat paralel cu axa y cu mărimea dy; întregul aparat se va deplasa atunci cu aceeași distanță, iar rotițele E și E_1 se vor roti de un anumit unghi $d\varphi = \frac{dy}{\rho}$, unde ρ este raza rotițelor E și E_1; cu același unghi se vor roti și cilindrii C, fixați de axa EE_1, și cu același unghi se vor roti toate bilele de sticlă așezate pe cilindrii C, deoarece diametrii acestor bile sînt egali cu diametrii cilindrilor C; rotația fiecărei bile se produce în jurul axei nd paralelă cu axa EE_1, adică paralelă cu axa x a figurii.

Se observă din fig. 62, că rola R_1 a primului cadru, fiind pusă în mișcare de către bilă, se va roti cu unghiul $d\omega_1 = \frac{\lambda}{\rho}\sin\theta\cdot dy$, în timp ce rola R_2 a acestui cadru se va roti cu unghiul $d\varphi = \frac{\lambda}{\rho}\cos\theta\cdot dy$, unde coeficientul de proporționalitate λ va fi egal cu raportul dintre raza bilei și raza rolei.

Al doilea cadru va avea o poziție în care $xGR_1 = 2\theta = \frac{4\pi x}{l}$ și, prin urmare, rolele lui se vor roti cu unghiurile

$$d\omega_2 = \frac{\lambda}{\rho}\sin 2\theta\cdot dy,$$

$$d\varphi_2 = \frac{\lambda}{\rho}\cos 2\theta\cdot dy$$

etc.

Se observă, astfel, că atunci cînd vîrful F descrie curba, unghiurile de rotație ale rolelor primului cadru vor fi

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{\rho}\int_0^l \sin\frac{2\pi x}{l}\,dy,$$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{\rho}\int_0^l \cos\frac{2\pi x}{l}\,dy,$$

ale celui de al doilea cadru

$$\omega_2 = \frac{\lambda}{\rho}\int_0^l \sin 2\,\frac{2\pi x}{l}\,dy,$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{\rho}\int_0^l \cos 2\,\frac{2\pi x}{l}\,dy$$

etc., ceea ce înseamnă că aceste unghiuri vor fi proporționale cu coeficienții A_1 și B_1, A_2 și B_2 etc. ai dezvoltării căutate, unde coeficientul de proporționalitate depinde numai de dimensiunile diferitelor piese ale aparatului și se determină o dată pentru totdeauna, fiind indicat în certificatul anexat aparatului.

Dimensiunile obișnuite ale analizatorului lui Henrici sînt, de obicei, astfel încît $l = 400$ mm.

După cum se vede din descrierea precedentă, aparatul lui Henrici necesită o reducere prealabilă a lungimii bazei (a perioadei) curbei analizate la o anumită lungime; acest aparat este pe lîngă aceasta, destul de scump.

§ 61. Analizatorul lui Mader. În caietul nr. 36 al revistei „Electrotechnische Zeitschrift" din anul 1909 se află descrierea și teoria unui analizator armonic extrem de simplu și foarte ingenios, aplicabil la orice bază, și care a fost inventat de O. Mader din München.

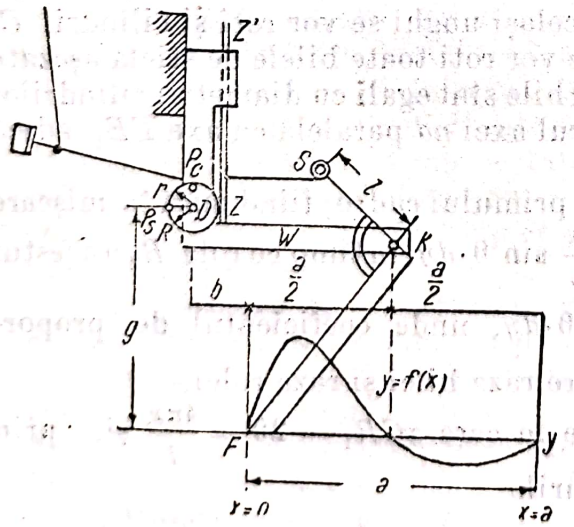

Fig. 63

Principiul acestui aparat constă în următoarele (fig. 63): carul W, care se poate deplasa numai în direcția axei y, poartă următoarele piese:

1) un braț cotit FKS, care se rotește în jurul punctului K, la care unul din capete este prevăzut cu rola S, în timp ce celălalt capăt este prevăzut cu vîrful F, cu ajutorul căruia se descrie curba analizată;

2) cremaliera ZZ', care poate fi deplasată la rîndul ei pe carul W, de asemenea în direcția axei y; această deplasare fiind comandată de rola S, care apasă asupra unui braț fixat perpendicular pe cremalieră și care este, prin urmare, paralel cu axa Ox;

3) pinionul cu raza R, care se rotește în jurul centrului D fixat pe car. Acest pinion este angrenat de cremaliera susmenționată ZZ'; astfel, rotațiile brațului FKS sînt transmise pinionului, care se rotește cu un unghi corespunzător în jurul punctului D. Acest pinion este prevăzut cu două orificii conice mici P_c și P_s, deplasate cu un unghi de 90° unul față de celălalt și la distanța r de la centrul D. În aceste orificii se introduce vîrful conducător al unui planimetru obișnuit al lui Amsler.

Să presupunem acum că introducem vîrful conducător al planimetrului în orificiul P și că aranjăm aparatul astfel, încît atunci cînd vîrful lui F este fixat în punctul O al curbei analizate, raza DP_s să fie paralelă cu axa x și îndreptată în sensul ei negativ; coordonatele punctului P_s vor fi atunci (notațiile din figură);

$$x_s = -(b + r),$$

$$y_s = g,$$

iar coordonatele punctului P_c vor fi

$$x_c = -b,$$

$$y_c = g + r.$$

Cînd vîrful F se deplasează de-a lungul curbei $y = f(x)$, de la poziția inițială $x = 0$, $y = 0$ la o altă poziție oarecare (x, y) (fig. 64), carul W se deplasează cu distanța $y + \varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este o mărime ce depinde de x. La această deplasare, brațul cotit FKS se rotește cu unghiul $\alpha - \alpha_0$, astfel încît proiecția deplasării punctului F pe axa x este egală cu x; prin urmare centrul rolei S se deplasează cu o mărime, a cărei proiecție pe axa y este $\frac{x \cdot l}{m}$, unde $l = KS$ și $m = FK$. Tot atît se deplasează și cremaliera, de unde rezultă că pinionul se rotește cu unghiul $\beta = \frac{x \cdot l}{R \cdot m}$. Centrul D al acestui pinion se deplasează însă, în urma mișcării carului, cu mărimea $y + \varphi(x)$. Astfel, noile coordonate ale punctelor P_s și P_c vor fi

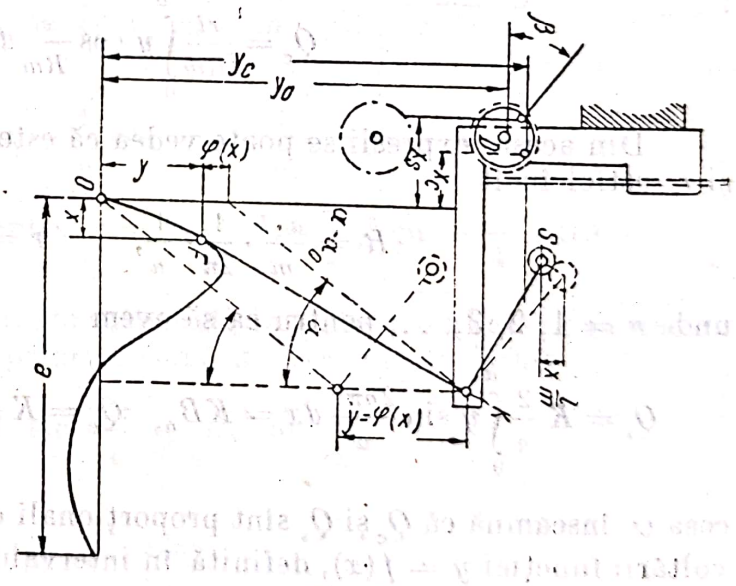

Fig. 64

$$x_s = -(b + r\cos\beta),\ y_s = g + y + \varphi(x) + r\sin\beta \qquad (1)$$

și

$$x_c = -b + r\sin\beta,\ y_c = g + y + \varphi(x) + r\cos\beta. \qquad (2)$$

Evident că, atunci cînd vîrful F descrie curba dată $y = f(x)$ de la $x = 0$ la $x = a$ și se întoarce apoi din nou de-a lungul axei x de la $x = a$ la $x = 0$, se descrie un anumit contur închis, de unde rezultă că și punctele P_s și P_c vor descrie contururi închise care mărginesc ariile Q_s și Q_c.

Avem:

$$Q_s = \int_0^a y_s\,dx_s + \int_a^0 y_0\,dx_s = \int_0^a (y_s - y_0)\,dx_s,$$

unde y_0 reprezintă valoarea coordonatei y_s, corespunzătoare revenirii pe axa x, adică

$$y_0 = g + \varphi(x) + r \sin \beta.$$

În virtutea formulelor (1) și (2), obținem:

$$Q_s = \frac{rl}{Rm}\int_0^a y \sin \frac{xl}{Rm}\,dx. \tag{3}$$

Tot astfel, pentru aria mărginită de conturul descris de punctul P_c, găsim:

$$Q_c = \frac{rl}{Rm}\int_0^a y \cos \frac{xl}{Rm}\,dx. \tag{4}$$

Din aceste expresii se poate vedea că este destul să se aleagă numai R și r, astfel încît

$$R = \frac{a \cdot l}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n}, \qquad r = \frac{1}{n\pi} K,$$

unde $n = 1, 2, 3, \ldots$, pentru ca să avem

$$Q_s = K\frac{2}{a}\int_0^a y \sin \frac{2n\pi x}{a}\,dx = KB_n, \quad Q_c = K\frac{2}{a}\int_0^a y \cos \frac{2n\pi x}{a}\,dx = KA_n,$$

ceea ce înseamnă că Q_c și Q_s sînt proporționali cu coeficienții A_n și B_n ai dezvoltării funcției $y = f(x)$, definită în intervalul $(0, a)$ printr-o serie trigonometrică de tipul

$$y = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_2 \cos 2\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos 3\frac{2\pi x}{a} + \cdots +$$
$$+ B_1 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_2 \sin 2\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin 3\frac{2\pi x}{a} + \cdots$$

Astfel, nu rămîne decît să fixăm în punctul P_s, și apoi în punctul P_c, vîrful conducător al unui planimetru Amsler obișnuit și să descriem curba dată, așa cum s-a arătat mai sus, pentru a obține valorile coeficienților acestei serii.

Scanned with OKEN Scanner

Aparatul lui Mader se construiește în diferite mărimi, astfel încît lungimea a poate să varieze între 20 și 360 mm; i se mai adaugă o serie de pinioane care permit să se obțină primii 12 coeficienți A și B ai dezvoltării, iar dimensiunile celorlalte piese sînt alese în așa fel, încît K este egal cu 10, adică unei arii Q_s sau O_c de 1 cm² îi corespunde o amplitudine de 0,1 cm.

Amintim încă analizatorul armonic al lui Michelzon și Stratton, a cărui descriere poate fi găsită în „Philosophical Magazine" din anul 1898.

Acest analizator este bazat pe un principiu complet diferit de cel al analizatorilor lui Henrici și Mader și ne dă primii 80 de termeni ai dezvoltării. El servește, pe lîngă aceasta, la desenarea automată a graficului funcției reprezentată de o serie trigonometrică dată, putîndu-se lua pentru această operație pînă la 80 de termeni ai seriei respective. Acest articol mai cuprinde o serie de fotografii ale unor grafice de acest fel, care ne dau o idee despre felul cum se îmbunătățește aproximația funcției dezvoltate, pe măsură ce se iau mai mulți termeni ai seriei prin care aceasta este reprezentată.

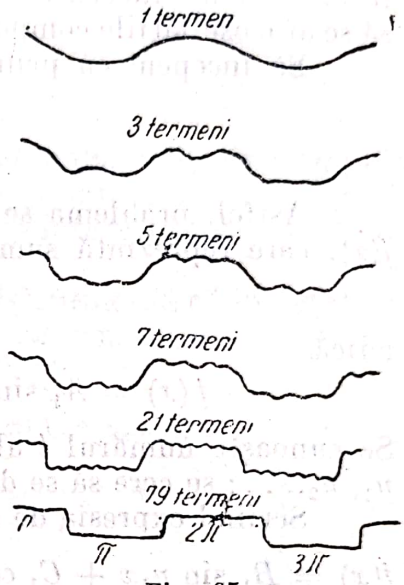

Fig. 65

Ca exemplu am reprodus în fig. 65 unul din aceste grafice, unde este reprezentată funcția

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots,$$

egală cu $\frac{\pi}{4}$ în intervalul dintre $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$ și cu $-\frac{\pi}{4}$ între $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \pi$.

§ 62. În unele aplicații ale matematicii apare necesitatea de a dezvolta o curbă înregistrată grafic printr-o sumă de termeni de forma

$$B_k \sin \frac{2\pi x}{\lambda_k} + C_k \cos \frac{2\pi x}{\lambda_k},$$

sau altfel, de forma

$$A_k \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda_k} + \alpha_k\right).$$

Evident că ambele dezvoltări sînt echivalente, dacă se ia

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$$

și

$$\alpha_k = \operatorname{arctg} \frac{C_k}{B_k}.$$

Aceste dezvoltări sînt, de obicei, necesare la studiul înregistrărilor diferitelor mișcări oscilatorii; fiecare termen de forma $A_k \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda_k} + \alpha_k\right)$

reprezintă atunci una din componentele mișcării (a oscilației sau undei), coeficientul A_k este *amplitudinea* acestei oscilații, λ_k este *lungimea de undă* (sau perioada, dacă x reprezintă timpul), iar α_k este *faza inițială*.

La rezolvarea acestei probleme trebuie să se deosebească două cazuri: 1) perioadele (sau lungimile de undă) ale oscilațiilor componente sînt cunoscute, astfel încît trebuie să se găsească, după înregistrarea dată, numai amplitudinile și fazele inițiale; 2) atît perioadele, cît și amplitudinile și fazele sînt necunoscute, și este dată numai reprezentarea grafică cerîndu-se să se afle oscilațiile componente.

Să începem cu primul caz, introducînd pentru prescurtare notația

$$\frac{2\pi}{\lambda_k} = n_k.$$

Astfel, problema se formulează în felul următor. Este dată o funcție $f(x)$, care reprezintă suma unor termeni de forma

$$A_k \sin (n_k x + \alpha_k),$$

adică

$$f(x) = A_1 \sin (n_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin (n_2 x + \alpha_2) + \cdots$$

Se cunoaște numărul l al termenilor acestei sume și se cunosc și numerile $n_1, n_2, \ldots$; se cere să se determine valorile lui $A_1, A_2, \ldots$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Scriind expresia de mai sus în forma

$$f(x) = B_1 \sin n_1 x + C_1 \cos n_1 x + B_2 \sin n_2 x + C_2 \cos n_2 x + \\ + \cdots + B_l \sin n_l x + C_l \cos n_l x,$$

observăm că este de ajuns să se determine după figură valorile funcției $f(x)$ corespunzătoare cu $2l$ valori ale variabilei independente x:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2l},$$

de unde vom obține $2l$ ecuații de gradul întîi în raport cu coeficienții căutați B_k și C_k; de aici rezultă că problema se reduce la rezolvarea acestor ecuații.

Se înțelege de la sine că se poate lua un număr mai mare de valori ale funcției $f(x)$ decît numărul absolut necesar $2l$, astfel încît rezolvarea sistemului se va putea efectua prin metoda celor mai mici pătrate (v. cap. VIII).

Cînd perioadele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ sînt comensurabile între ele, se vede ușor că trebuie să se ia o lungime L, ce reprezintă cel mai mic multiplu comun al tuturor valorilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ și repartizînd pe această lungime n abscise echidistante

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

vom simplifica rezolvarea sistemului de ecuații obținut, folosind o metodă analogă celei descrise în § 53.

În cazul general, perioadele nu vor fi comensurabile între ele, astfel încît aceste simplificări nu se vor putea realiza; în acest caz, calculele devin foarte dificile, dacă ele se efectuează după regulile generale.

Următoarea observație permite să se determine valoarea aproximativă a coeficienților, fără ca să se rezolve prin metodele obișnuite sistemul de mai multe ecuații cu mai multe necunoscute, deoarece tocmai această rezolvare constituie una din dificultățile principale.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm egalitatea

$$f(x) = B_1 \sin n_1 x + C_1 \cos n_1 x + B_2 \sin n_2 x + C_2 \cos n_2 x + \cdots \qquad (*)$$

în care funcția $f(x)$ este dată, iar mărimile

$$n_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}; \quad n_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}; \cdots$$

sînt cunoscute, și este dat numărul termenilor; se cere să se determine numai valorile coeficienților.

Să presupunem că

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots;$$

alegem o lungime L_1, care să fie un multiplu întreg al lungimii λ_1, de exemplu $L_1 = 10\lambda_1$ sau, în general, $L_1 = \lambda_1 p_1$, și înmulțind ambii membri ai egalității (*) mai întîi cu $\sin n_1 x\, dx$, apoi cu $\cos n_1 x\, dx$, o integrăm între limitele 0 și L_1.

Deoarece funcția $f(x)$ este dată (eventual grafic), urmează că integralele din membrul întîi pot fi calculate. Să presupunem că vom avea:

$$N_1 = \int_0^{L_1} f(x) \sin n_1 x\, dx, \qquad M_1 = \int_0^{L_1} f(x) \cos n_1 x\, dx,$$

și vom obține egalități de următoarele forme:

$$N_1 = B_1 \int_0^{L_1} \sin^2 n_1 x\, dx + C_1 \int_0^{L_1} \cos n_1 x \sin n_1 x\, dx +$$

$$+ \sum \int_0^{L_1} B_k \sin n_k x \sin n_1 x\, dx + \sum \int_0^{L_1} C_k \cos n_k x \sin n_1 x\, dx,$$

$$M_1 = B_1 \int_0^{L_1} \sin n_1 x \cos n_1 x\, dx + C_1 \int_0^{L_1} \cos^2 n_1 x\, dx +$$

$$+ \sum \int_0^{L_1} B_k \sin n_k x \cos n_1 x\, dx + \sum \int_0^{L_1} C_k \cos n_k x \cos n_1 x\, dx$$

și deoarece, prin ipoteză,

$$L_1 = p_1 \lambda_1 \text{ și } n_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \cdots, n_k = \frac{2\pi}{\lambda_k},$$

unde p_1 este un număr întreg, vom avea:

$$\int_0^{L_1} \sin^2 n_1 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (1 - \cos 2n_1 x)\, dx = \frac{1}{2} L_1 = \frac{p_1 \lambda_1}{2},$$

$$\int_0^{L_1} \cos^2 n_1 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (1 + \cos 2n_1 x)\, dx = \frac{1}{2} L_1 = \frac{p_1 \lambda_1}{2},$$

$$\int_0^{L_1} \cos n_1 x \sin n_1 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} \sin 2n_1 x\, dx = 0,$$

$$\int_0^{L_1} \sin n_k x \sin n_1 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} [\cos (n_k - n_1)\, x - \cos (n_k + n_1)\, x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (n_k - n_1)\, L_1}{n_k - n_1} - \frac{\sin (n_k + n_1)\, L_1}{n_k + n_1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_k - n_1} - \frac{1}{n_k + n_1}\right) \sin \frac{2p_1\pi\lambda_1}{\lambda_k} = \frac{n_1}{n_k^2 - n_1^2} \sin 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k^2 \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} \sin 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k},$$

$$\int_0^{L_1} \cos n_k x \cos n_1 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} [\cos (n_k - n_1)\, x + \cos (n_k + n_1)\, x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n_k - n_1} + \frac{1}{n_k + n_1}\right] \sin 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k} = \frac{n_k}{n_k^2 - n_1^2} \sin 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} \sin 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k},$$

$$\int_0^{L_1} \cos n_k x \sin n_1 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} [\sin (n_k + n_1)\, x - \sin (n_k - n_1)\, x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n_k - n_1} \cos (n_k - n_1)\, x - \frac{1}{n_k + n_1} \cos (n_k + n_1)\, x\right]_0^{L_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_k - n_1} - \frac{1}{n_k + n_1}\right) \cos 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_k - n_1} - \frac{1}{n_k + n_1}\right) =$$

$$= -\frac{n_1}{n_k^2 - n_1^2}\left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k}\right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k^2 \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2}\left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k}\right)$$

și, în sfîrșit,

$$\int_0^{L_1} \sin n_k x \cos n_1 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} [\sin (n_k + n_1)\, x + \sin (n_k - n_1)\, x]\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n_k + n_1} \cos (n_k + n_1)\, x + \frac{1}{n_k - n_1} \cos (n_k - n_1)\, x\right]_0^{L_1} =$$

$$= \frac{n_k}{n_k^2 - n_1^2}\left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2}\left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_k}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, după împărțirea cu $\frac{\lambda_1}{2}$, obținem egalitățile

$$\frac{2}{\lambda_1} N_1 = p_1 B_1 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} B_k \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} C_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}\right)$$

și

$$\frac{2}{\lambda_1} M_1 = p_1 C_1 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} B_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} C_k \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k},$$

unde la sumare se include valoarea $k = 1$.

Luînd apoi mărimea L_2 astfel încît să fie egală cu un multiplu întreg al lungimii λ_2, adică $L_2 = p_2 \lambda_2$, unde p_2 este un număr întreg, alcătuim integralele

$$M_2 = \int_0^{L_2} f(x) \cos n_2 x \, dx$$

și

$$N_2 = \int_0^{L_2} f(x) \sin n_2 x \, dx,$$

de unde obținem două ecuații de forma

$$\frac{2}{\lambda_2} N_2 = p_2 B_2 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} B_k \sin 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k} - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} C_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k}\right),$$

$$\frac{2}{\lambda_2} M_2 = p_2 C_2 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} B_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k}\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} C_k \sin 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k},$$

unde se exclude de la sumare $k = 2$.

Sumarea din toate aceste formule și ecuații se extinde asupra valorilor lui k egale cu

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n.$$

În același fel vom proceda și cu ceilalți coeficienți.

Sistemul de ecuații obținut cuprinde aceleași necunoscute, dar prezintă particularitatea că în fiecare din ele una din necunoscute are un coeficient

foarte mare, în timp ce celelalte necunoscute au coeficienți foarte mici. Acest sistem de ecuații poate fi rezolvat după metoda aproximațiilor succesive, unde se poate lua ca primă aproximație sistemul

$$\frac{2}{\lambda_1} N_1 = p_1 B_1, \qquad \frac{2}{\lambda_1} M_1 = p_1 C_1,$$
$$\frac{2}{\lambda_2} N_2 = p_2 B_2, \qquad \frac{2}{\lambda_2} M_2 = p_2 C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

de unde rezultă

$$B_1' = \frac{2N_1}{p_1\lambda_1}, \qquad C_1' = \frac{2M_1}{p_1\lambda_1},$$
$$B_2' = \frac{2N_2}{p_2\lambda_2}, \qquad C_2' = \frac{2M_2}{p_2\lambda_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pentru a obține a doua aproximație, substituim sub semnele sumelor, în locul mărimilor $B_1, C_1, \ldots$, valorile găsite $B_1', C_1', \ldots$; să presupunem că valorile acestor sume vor fi respectiv

$$S_1 \text{ și } T_1,\ S_2 \text{ și } T_2, \cdots$$

Alcătuim sistemul

$$\frac{2}{\lambda_1} N_1 = p_1 B_1 + \frac{1}{2\pi} S_1,$$
$$\frac{2}{\lambda_1} M_1 = p_1 C_1 + \frac{1}{2\pi} T_1,$$
$$\frac{2}{\lambda_2} N_2 = p_2 B_2 + \frac{1}{2\pi} S_2,$$
$$\frac{2}{\lambda_2} M_2 = p_2 C_2 + \frac{1}{2\pi} T_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

de unde aflăm a doua aproximație. Apoi determinăm în același fel a treia aproximație etc., pînă ce două aproximații succesive vor da pentru necunoscute valori a căror diferență se află în limitele erorii admise a rezultatului.

Calculele de acest fel trebuie efectuate la studiul mareelor într-un port dat; nu putem intra aici în amănuntele acestui calcul și trimitem cititorii la articolul căpitanului de rangul 1 A. M. Buhteev, «Наблюдения приливов на Мурмане и обработка этих наблюдений» (Зап. по гидр., вып. XXXII, 1910).

§ 63. În cazul cînd mărimile perioadelor sînt și ele necunoscute și nu este dată decît curba $f(x)$, care prin caracterul ei arată că este formată din suprapunerea cîtorva sinusoide, aflarea acestor componente devine și mai complicată decît în cazul precedent, iar calculele pot fi efectuate prin metoda aproximațiilor succesive, sau, mai precis, așa cum se arată în § 64.

Se înțelege că, în acest caz, alcătuirea ecuațiilor de forma

$$f(x_k) = A_0 + B_1 \sin n_1 x_k + C_1 \cos n_1 x_k + B_2 \sin n_2 x_k + C_2 \cos n_2 x_k + \cdots, \quad (*)$$

pe care le-am obținut dînd abscisei x anumite valori particulare $x = x_k$ și aflînd din grafic valorile corespunzătoare $f(x_k)$ ale funcției, nu duce direct la scop, căci în aceste ecuații nu sînt necunoscuți numai coeficienții A_0, B_1, $C_1, \cdots$, dar și mărimile n_1, $n_2, \cdots$, iar ecuațiile sînt transcendente în raport cu aceste mărimi.

Esența metodei de aproximație, care este cea mai avantajoasă în cazul de față, constă în următoarele: să presupunem că $y = f(x)$ este curba dată grafic, ale cărei ordonate reprezintă suma ordonatelor corespunzătoare ale cîtorva sinusoide, sau, după cum se spune, care reprezintă suma cîtorva curbe sinusoidale suprapuse, astfel încît

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2) + \cdots,$$

unde presupunem că

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

Să luăm o lungime oarecare L_1, cît se poate de mare, și să calculăm integrala

$$\int_0^{L_1} f(x)\, dx.$$

Valoarea aproximativă a lui A_0 va fi atunci:

$$A_0 = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} f(x)\, dx.$$

Efectuăm acum o translație de-a lungul axei Oy, de mărimea A_0, și alcătuim funcția

$$f_1(x) = f(x) - A_0 = A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2) + \cdots$$

Folosindu-ne apoi de integraful lui Abdank — Abakanovici sau, în general, de una din metodele expuse în capitolele precedente, alcătuim funcția

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(x)\, dx.$$

Evident că această funcție va fi

$$F_1(x) = -\left[\frac{A_1}{n_1} \cos(n_1 x + \alpha_1) + \frac{A_2}{n_2} \cos(n_2 x + \alpha_2) + \cdots\right] + \left(\frac{A_1}{n_1} \cos \alpha_1 + \frac{A_2}{n_2} \cos \alpha_2 + \cdots\right) x.$$

Luăm din nou aceeași lungime L_1 și calculăm integrala

$$\int_0^{L_1} F_1(x)\, dx.$$

Avem atunci din nou egalitatea aproximativă

$$\left(\frac{A_1}{n_1}\cos\alpha_1+\frac{A_2}{n_2}\cos\alpha_2+\cdots\right)=\frac{1}{L_1}\int_0^{L_1}F_1(x)\,dx=K_1.$$

Efectuăm din nou o translație de-a lungul axei Oy, de lungime K_1, alcătuind funcția

$$f_2(x)=F_1(x)-K_1,$$

și obținem prin integrare:

$$F_2(x)=\int_0^x f_2(x)\,dx.$$

Evident că vom avea

$$F_2(x)=-\left[\frac{A_1}{n_1^2}\sin(n_1x+\alpha_1)+\frac{A_2}{n_2^2}\sin(n_2x+\alpha_2)+\cdots\right]+$$
$$+\left(\frac{A_1}{n_1^2}\sin\alpha_1+\frac{A_2}{n_2^2}\sin\alpha_2+\cdots\right).$$

Dacă calculăm apoi integrala

$$\int_0^{L_1}F_2(x)\,dx,$$

obținem valoarea aproximativă a constantei

$$\frac{A_1}{n_1^2}\sin\alpha_1+\frac{A_2}{n_2^2}\sin\alpha_2+\cdots=K_2$$

și continuăm acest proces mai departe.

Se observă ușor că în urma acestui proces se produc următoarele: la curba inițială, amplitudinile undelor componente erau proporționale cu numerele

$$A_1:A_2:A_3\cdots$$

După prima integrare ele sînt proporționale cu numerele

$$\frac{A_1}{n_1}:\frac{A_2}{n_2}:\frac{A_3}{n_3}:\cdots$$

După a doua integrare, cu numerele

$$\frac{A_1}{n_1^2}:\frac{A_2}{n_2^2}:\frac{A_3}{n_3^2}:\cdots,$$

și, în general, după a k-a transformare a amplitudinilor componentelor curbei $f_k(x)$, ele sînt proporționale cu

$$\frac{A_1}{n_1^k}:\frac{A_2}{n_2^k}:\frac{A_3}{n_3^k}:\cdots$$

Dacă vom alege la construcția curbelor $f_1(x), f_2(x),\cdots, f_k(x)$ o astfel de scară, încît ordonata cea mai mare a curbei transformate să rămînă

aproximativ aceeași ca cea a curbei inițiale, vom vedea cum curba se netezește treptat și că dispar succesiv undele cu perioadele mai scurte; evident că atunci cînd efectuăm atît de multe transformări încît mărimea $\left(\frac{n_1}{n}\right) A_2$ să fie mică în comparație cu A_1 (ceea ce putem totdeauna obține, căci prin ipoteză $n_1 < n_2$), și aceasta să nu mai fie observabilă pe desen, curba $f_k(x)$ va reprezenta o sinusoidă pură de forma

$$f_k(x) = \frac{A_1}{n_1^k} \sin(n_1 x + \alpha_1),$$

desenată numai cu o altă scară a ordonatelor decît curba propusă $f(x)$. Din această sinusoidă aflăm lungimea λ_1 a perioadei ei și deci și mărimea $n_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$.

Luînd apoi în considerare scara ordonatelor, aflăm imediat amplitudinea A_1, deoarece cunoaștem pe n_1 și ordonata cea mai mare în valoare absolută a curbei $f_k(x)$, iar după locul intersecției acestei curbe cu axa Ox deplasată, aflăm și faza inițială α_1.

În acest fel, obținem unda

$$A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1} + \alpha_1\right),$$

a cărei lungime λ_1 este cea mai mare.

Desenînd această undă, alcătuim apoi funcția

$$\varphi(x) = f(x) - A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1),$$

pe care o supunem apoi aceluiași proces, modificînd în caz de nevoie și scara întregului desen, adică și scara absciselor, ceea ce se face ușor, fie cu ajutorul unui pantograf, fie prin fotografiere; de aici obținem a doua undă, adică sinusoida

$$A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2)$$

etc., „triind" prin această metodă o undă sau componenta după cealaltă, începînd cu cele cu lungimea cea mai mare.

Desigur că aceste operații vor fi foarte dificile, dacă vor fi efectuate fără nici un fel de mijloace ajutătoare, adică fără integraf, planimetru, pantograf, aparat fotografic și de proiecție. În cazul însă în care prelucrarea și studiul curbei $f(x)$ se efectuează cu aparatura necesară, operațiile descrise nu sînt de loc complicate, în timp ce rezolvarea unui sistem de ecuații de tipul lui (*) necesită calcule foarte lungi, după cum se va vedea din paragraful următor. Se înțelege că, atunci cînd valorile aproximative

$$A_1, n_1, \alpha_1; A_2, n_2, \alpha_2; \ldots$$

au fost aflate, se pot găsi valori mai precise după regulile generale pentru determinarea corecțiilor, care sînt expuse în cap. VIII unde se tratează metoda celor mai mici pătrate.

§ 64. Seriile, dezvoltate după sinuși și cosinuși de argumente cu diferite perioade, reprezintă un caz particular al seriilor dezvoltate după funcții exponențiale.

Să presupunem că

$$F(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + a_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots \qquad (1)$$

este o serie de acest fel; evident că atunci cînd numerele

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

sînt pur imaginare, această serie se transformă imediat într-o serie trigonometrică; în cazul, însă, cînd aceste numere sînt complexe, termenii seriei vor fi de forma

$$ge^{ax}\cos bx \text{ și } ge^{ax}\sin bx.$$

Astfel, problema se reduce la determinarea coeficienților

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

și a exponenților

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

din seria (1), în cazul cînd se ia pentru reprezentarea funcției date sau a curbei

$$y = f(x)$$

un număr determinat, nu prea mare, de termeni.

Pentru a simplifica considerațiile noastre, vom presupune că am luat trei termeni și că vrem să reprezentăm curba dată prin formula

$$y = a_1e^{\alpha_1 x} + a_2e^{\alpha_2 x} + a_3e^{\alpha_3 x}. \tag{2}$$

Marcăm abscisele echidistante

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots, x_0 + nh \tag{3}$$

și aflăm de pe grafic sau calculăm ordonatele corespunzătoare

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n. \tag{4}$$

Introducem notațiile

$$p_1 = a_1e^{\alpha_1 x_0}, \quad p_2 = a_2e^{\alpha_2 x_0}, \quad p_3 = a_3e^{\alpha_3 x_0}, \tag{5}$$

$$z_1 = e^{\alpha_1 h}, \quad z_2 = e^{\alpha_2 h}, \quad z_3 = e^{\alpha_3 h}, \tag{6}$$

și substituind în formula (2) rînd pe rînd valorile lui x din șirul (3), obținem următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned}
y_0 &= p_1 + p_2 + p_3,\\
y_1 &= p_1z_1 + p_2z_2 + p_3z_3,\\
y_2 &= p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + p_3z_3^2,\\
y_3 &= p_1z_1^3 + p_2z_2^3 + p_3z_3^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_k &= p_1z_1^k + p_2z_2^k + p_3z_3^k,\\
y_{k+1} &= p_1z_1^{k+1} + p_2z_2^{k+1} + p_3z_3^{k+1},\\
y_{k+2} &= p_1z_1^{k+2} + p_2z_2^{k+2} + p_3z_3^{k+2},\\
y_{k+3} &= p_1z_1^{k+3} + p_2z_2^{k+3} + p_3z_3^{k+3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= p_1z_1^n + p_2z_2^n + p_3z_3^n.
\end{aligned} \tag{*}$$

Din acest sistem trebuie să fie determinate necunoscutele

$$p_1, p_2, p_3 \text{ și } z_1, z_2, z_3.$$

Să presupunem că mărimile z_1, z_2, z_3 sînt rădăcinile ecuației

$$z^3 + Cz^2 + Bz + A = 0. \tag{7}$$

Luăm din sistemul nostru un grup oarecare de patru ecuații consecutive, de exemplu grupul (*); înmulțim prima ecuație din acest grup cu A, a doua cu B, a treia cu C și adunăm rezultatele la a patra; obținem:

$$\begin{aligned} Ay_k + By_{k+1} + Cy_{k+2} + y_{k+3} = {} & p_1 z_1^k (A + Bz_1 + Cz_1^2 + z_1^3) + \\ & + p_2 z_2^k (A + Bz_2 + Cz_2^2 + z_2^3) + \\ & + p_3 z_3^k (A + Bz_3 + Cz_3^2 + z_3^3). \end{aligned}$$

Deoarece prin ipoteză z_1, z_2, z_3 sînt rădăcinile ecuației (7), înseamnă că

$$A + Bz_1 + Cz_1^2 + z_1^3 = 0, \quad A + Bz_2 + Cz_2^2 + z_2^3 = 0,$$
$$A + Bz_3 + Cz_3^2 + z_3^3 = 0$$

de unde rezultă

$$Ay_k + By_{k+1} + Cy_{k+2} + y_{k+3} = 0. \tag{8}$$

Astfel, egalînd succesiv pe k cu

$$0, 1, 2, \cdots, n - 3,$$

obținem un sistem de ecuații liniare cu necunoscutele A, B, C:

$$\left.\begin{aligned} Ay_0 + By_1 + Cy_2 + y_3 &= 0, \\ Ay_1 + By_2 + Cy_3 + y_4 &= 0, \\ Ay_2 + By_3 + Cy_4 + y_5 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ Ay_{n-3} + By_{n-2} + Cy_{n-1} + y_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Rezolvînd acest sistem după metoda celor mai mici pătrate (v. cap. VIII) și obținînd valorile cele mai probabile ale mărimilor

$$A, B, C,$$

alcătuim ecuația

$$z^3 + Cz^2 + Bz + A = 0$$

și calculăm rădăcinile ei

$$z_1, z_2, z_3.$$

Valorile aflate le substituim în sistemul inițial, pe care îl rezolvăm acum tot prin metoda celor mai mici pătrate, și determinăm necunoscutele

$$p_1, p_2, p_3.$$

După aceea, găsim din ecuațiile (6)

$$\alpha_1 = \frac{1}{h} \ln z_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{h} \ln z_2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{h} \ln z_3, \tag{10}$$

apoi

$$a_1 = p_1 e^{-\alpha_1 x_0}, \quad a_2 = p_2 e^{-\alpha_2 x_0}, \quad a_3 = p_3 e^{-\alpha_3 x_0}, \tag{11}$$

după care vor fi cunoscute toate mărimile din formula

$$y = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + a_3 e^{\alpha_3 x}.$$

Evident că acest raționament se extinde la fel și la cazul cînd se iau în formula (1) nu numai trei, ci și mai mulți termeni.

CAPITOLUL VI

FORMULE CARE EXPRIMĂ LEGĂTURA ÎNTRE SUMĂ ŞI INTEGRALĂ, ÎNTRE DIFERENŢE ŞI DERIVATE. FORMULE DE INTERPOLARE

§ 65. Reprezentarea unei funcţii sub forma unei serii trigonometrice dă posibilitatea să se deducă renumita formulă a lui Euler, care exprimă legătura dintre suma unei serii şi o integrală. Această formulă este importantă prin faptul că permite să se calculeze cu aproximaţie atît sumele seriilor cît şi integralele respective.

În § 48 s-a arătat că, atunci cînd o funcţie este definită în intervalul dintre a şi $a + 2l$, ea poate fi reprezentată prin seria

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi(x-a)}{l} + A_2 \cos\frac{2\pi(x-a)}{l} + \cdots + A_n \cos\frac{n\pi(x-a)}{l} + \cdots +$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi(x-a)}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi(x-a)}{l} + \cdots + B_n \sin\frac{n\pi(x-a)}{l} + \cdots, \qquad (1)$$

unde

$$A_0 = \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f(\xi)\, d\xi,$$

$$A_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(\xi) \cos\frac{n\pi(\xi-a)}{l}\, d\xi, \qquad B_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(\xi) \sin\frac{n\pi(\xi-a)}{l}\, d\xi.$$

Pe lîngă aceasta s-a mai demonstrat, în cap. V, că dacă se substituie în formula (1) $x = a$, se obţine o sumă egală cu

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(a+2l)],$$

adică

$$\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(a+2l) = \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{a+2l} f(\xi) \cos\frac{n\pi(\xi-a)}{l}\, d\xi. \qquad (2)$$

Punînd $2l = h$, putem scrie formula (2) în felul următor:

$$\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(a+h) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(\xi)\,d\xi + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{a+h} f(\xi)\cos\frac{2n\pi(\xi-a)}{h}\,d\xi.$$

Înmulţind cu h şi scriind sub semnul integralei în locul lui ξ litera x, obţinem:

$$\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)] = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{a+h} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx. \qquad (3)$$

Să presupunem acum că este dată o funcţie oarecare $f(x)$ în intervalul $[a, b]$ (fig. 66).

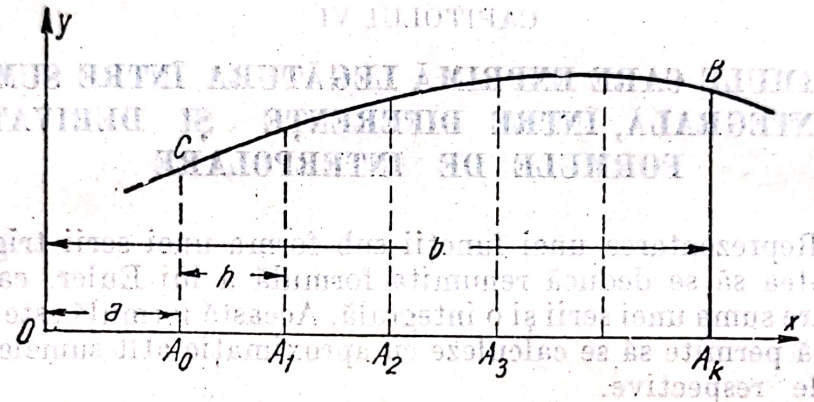

Fig. 66

Împărţim intervalul $b - a$ într-un număr arbitrar k de părţi egale şi fie

$$\frac{b-a}{k} = h;$$

abscisele punctelor intermediare $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ vor fi atunci

$$a + h,\ a + 2h, \cdots,\ a + (k-1)\,h.$$

Aplicînd la fiecare din aceste intervale formula (3) şi obsevînd că

$$\cos\frac{2n\pi(x-a-ph)}{h} = \cos\frac{2n\pi(x-a)}{h},$$

obţinem următoarea serie de formule:

$$\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)] = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{a+h} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx,$$

$$\frac{h}{2}[f(a+h)+f(a+2h)] = \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx,$$

. . . . . .

$$\frac{h}{2}[f(a+(p-1)h)+f(a+ph)] =$$

$$= \int_{a+(p-1)h}^{a+ph} f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a+(p-1)h}^{a+ph} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx,$$

. . . . . .

$$\frac{h}{2}[f(a+(k-1)h)+f(b)] =$$

$$= \int_{a+(k-1)h}^{b} f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a+(k-1)h}^{b} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

Adunînd toate aceste egalităţi, găsim în membrul întîi următoarea sumă:

$$T = \frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(k-1)h)+\frac{1}{2}f(b),$$

adică suma care la calculul după regula trapezelor, fiind înmulţită cu h, reprezintă valoarea aproximativă a ariei A_0CBA_k; în membrul al doilea se obţine:

$$\int_a^b f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

Astfel, avem egalitatea

$$T\cdot h = \int_a^b f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx. \qquad (4)$$

Observînd că $b = a + kh$ şi integrînd prin părţi succesiv de $2p$ ori, transformăm integralele care intervin sub semnul sumei. Obţinem:

$$\int f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}f(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h} - \frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}\int f'(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx;$$

$$-\frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}\int f'(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\int f''(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx;$$

$$-\frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\int f''(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n^3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3 f''(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3\int f'''(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx;$$

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3\int f'''(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n^4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 f'''(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h} + \frac{1}{n^4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4\int f^{IV}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx;$$

. . . . . .

legea succesiunii termenilor fiind evidentă; substituind limitele de integrare a şi $b = a + kh$, observăm că toţi termenii ce conţin sinuşi se anulează, iar toţi cosinuşii din afara integralelor sînt pentru ambele limite egali cu 1, astfel încît, adunînd egalităţile obţinute, vom avea:

$$\ldots \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi(x-a)}{h}\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 [f'(b) - f'(a)] - \frac{1}{n^4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)] + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n^6}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^6 [f^{V}(b) - f^{V}(a)] + \cdots + (-1)^{p-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p} \frac{1}{n^{2p}} [f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)] +$$

$$+ (-1)^p \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p} \frac{1}{n^{2p}} \int_a^b f^{(2p)}(x) \cos \frac{2n\pi(x-a)}{h}\, dx.$$

Făcînd aici pe rînd $n = 1, 2, 3, \cdots$, înlocuind în formula (4) şi scoţînd mărimile constante de sub semnul integralei, obţinem:

$$Th = \int_a^b f(x)\, dx + 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 [f'(b) - f'(a)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} -$$

$$- 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^6 [f^{V}(b) - f^{V}(a)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} + \cdots +$$

$$+ 2(-1)^{p-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p} [f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} + R_{2p}, \qquad (5)$$

unde

$$R_{2p} = 2(-1)^p \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} \int_a^b f^{(2p)}(x) \cos \frac{2n\pi(x-a)}{h}\, dx.$$

Se cunoaşte următoarea formulă generală

$$S_{2p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{\pi^{2p} \cdot B_p\, 2^{2p-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2p} = \frac{\pi^{2p} B_p\, 2^{2p-1}}{(2p)!},$$

unde B_p este aşa-numitul număr al lui Bernoulli de ordinul p.

Primele din sumele de mai sus sînt, după această formulă, următoarele:

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449341, \quad S_4 = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}0823232,$$

$$S_6 = \frac{\pi^6}{945} = 1{,}0173431, \quad S_8 = \frac{\pi^8}{9450} = 1{,}0040773,$$

$$S_{10} = \frac{\pi^{10}}{93\,555} = 1{,}0009946.$$

. . . . . .

Substituind aceste valori în formula precedentă, găsim:

$$Th = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{12}h^2[f'(b) - f'(a)] - \frac{1}{720}h^4[f'''(b) - f'''(a)] +$$

$$+ \frac{1}{30\,240}h^6[f^{V}(b) - f^{V}(a)] - \frac{1}{1\,209\,600}h^8[f^{VII}(b) - f^{VII}(a)] +$$

$$+ \frac{1}{47\,900\,160}h^{10}[f^{IX}(b) - f^{IX}(a)] - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p}[f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)] + R_{2p}, \qquad (6)$$

unde

$$T = \frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(k-1)h) + \frac{1}{2}f(b)$$

iar restul este

$$R_{2p} = 2(-1)^p\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}\int_a^b f^{(2p)}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

Aceasta este celebra formulă a lui Euler, care exprimă legătura dintre sumă și integrală.

În privința expresiei restului, observăm, în primul rînd, că integrînd o singură dată prin părți, obținem:

$$\int_a^b f^{(2p)}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= \left[\frac{h}{2\pi}\frac{1}{n}f^{(2p)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\right]_a^b - \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

Se poate scrie, prin urmare:

$$R_{2p} = (-1)^{p+1}\,2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

Introducînd funcția

$$P_{2p+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi(x-a)}{2^{2p}\pi^{2p+1}n^{2p+1}},$$

putem scrie restul sub forma

$$R_{2p} = (-1)^{p+1}h^{2p+1}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\,P_{2p+1}(x)\,dx.$$

Formula (6) poate servi atît pentru calculul sumei

$$S = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(k-1)h) + f(b),$$

cît şi pentru calculul integralei

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

În adevăr, este evident că

$$S = T + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)],$$

şi formula (6) ne dă pentru calculul sumei următoarea expresie:

$$S = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{1}{12}h[f'(b) - f'(a)] -$$
$$- \frac{1}{720}h^3[f'''(b) - f'''(a)] + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p-1}[f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)] + R_{2p}. \qquad (7)$$

Invers, pentru calculul integralei avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = hT - \frac{1}{12}h^2[f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{720}h^4[f'''(b) - f'''(a)] - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p}[f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)]. \qquad (8)$$

§ 66. Să dăm acum cîteva exemple de aplicare a formulei lui Euler la calculul sumelor.

Exemplul 1. Să se calculeze, pentru valori mari ale lui k, suma

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}.$$

Evident că dacă k este un număr mare, de exemplu 1 000 000, calculul direct al acestei sume nu este posibil. Să ne folosim de formula (7). În acest scop, trebuie să punem numai:

$$f(x) = \frac{1}{x};\ a = 1;\ b = k \text{ şi } h = 1,$$

de unde obţinem

$$S = f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = S_k,$$

și, observînd că

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^k \frac{1}{x}\,dx = \ln k,$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\quad f'(b) - f'(a) = 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$f'''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)''' = -1\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{x^4},\quad f'''(b) - f'''(a) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\left(1 - \frac{1}{k^4}\right),$$

$$f^{V}(x) = \frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6},$$

obținem după formula (7)

$$S_k = \ln k + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{720}\left(1 - \frac{1}{k^4}\right) + \int_1^k \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6} P_5(x)\,dx,$$

unde

$$P_5(x) = \frac{1}{2^4\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n^5}$$

este o funcție periodică continuă cu perioada egală cu 1.

La creșterea nemărginită a numărului întreg pozitiv k, integrala

$$\int_1^k \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6} P_5(x)\,dx$$

tinde către o limită finită, și din formula precedentă pentru S_k vedem că diferența $S_k - \ln k$ are o limită finită pentru $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}(S_k - \ln k) = C.$$

Această limită C se numește constanta lui Euler. Putem deci scrie

$$S_k = \ln k + C + \varepsilon_k,$$

unde ε_k tinde către zero pentru $k \to \infty$. Revenind la formula de mai sus pentru S_k și admițînd că am pus în expresia restului $k = \infty$, obținem următoarea formulă aproximativă pentru calculul lui C:

$$C \approx S_k - \ln k - \varphi\left(\frac{1}{k}\right),$$

unde

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{720}\frac{1}{k^4} - \cdots$$

Să aplicăm formula aproximativă de mai sus pentru C în cazul cînd $k = 10$.

Pentru a calcula pe S_{10}, procedăm în felul următor

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} =$$

$$= 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9};$$

$$2 = 2{,}0000000$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}3750000$$

$$\frac{3}{10} = 0{,}3000000$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$$

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111$$

$$S_{10} = 2{,}9289682$$

$$\ln 10 = 2{,}3025851$$

$$S_{10} - \ln 10 = 0{,}6263831.$$

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{k^2} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{k^4} - \cdots,$$

şi deci

$$-\varphi\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{20} + \frac{1}{1200} - \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{10^4} - \cdots,$$

$$\frac{1}{20} = 0{,}0500000$$

$$\frac{1}{120\cdot 10^4} = 0{,}0000008$$

$$-0{,}0500008$$

$$\frac{1}{1200} = +0{,}0008333$$

$$-\varphi\left(\frac{1}{10}\right) = -0{,}0491675$$

$$S_{10} - \ln 10 = 0{,}6263831$$

$$S = 0{,}5772156,$$

unde toate cifrele semnificative sînt aici corecte, deoarece calculul mai exact ne dă

$$C = 0{,}5772156649015328\cdots$$

Exemplul 2. Să se calculeze valoarea lui

$$\ln (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k),$$

adică a sumei

$$S_k = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln k$$

Calculul direct al acestei sume, cînd k are o valoare mare, este dificil. Acest exemplu ne va conduce la deducerea celebrei formule a lui Stirling, care dă valoarea sumei S_k pentru valori mari ale numărului k

Să punem în formula (7)

$$f(x) = \ln x,\ a = 1,\ b = k,\ h = 1.$$

Avem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^k \ln x\,dx = [x \ln x - x]_{x=1}^{x=k} = k \ln k - k + 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x},\quad f'(b) - f'(a) = \frac{1}{k} - 1,$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3},\quad f'''(b) - f'''(a) = 1 \cdot 2\left(\frac{1}{k^3} - 1\right),$$

$$f^{V}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}.$$

Putem, deci, scrie:

$$S_k = k \ln k - k + \frac{1}{2} \ln k + 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k} - 1\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{k^3} - 1\right) - \int_1^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} P_5(x)\,dx,$$

unde $P_5(x)$ are expresia arătată mai sus. Formula precedentă o putem transcrie sub forma

$$S_k = k \ln k - k + \frac{1}{2} \ln k + C_1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{k^3} + \int_k^\infty \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} P_5(x)\,dx,$$

unde

$$C_1 = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \int_1^\infty \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} P_5(x)\,dx.$$

Notăm:

$$P_k = \int_k^\infty \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} P_5(x)\,dx.$$

Punînd $x = kt$, obținem:

$$P_k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{k^4} \int_1^\infty \frac{P_5(kt)}{t^5}\,dt.$$

Din expresia pentru $P_5(x)$ găsim:

$$|P_5(x)| \leqslant \frac{1}{2^4 \pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} < \frac{1}{\pi^5},$$

şi introducînd notaţia $m = \frac{1}{8\pi^5}$, rezultă:

$$|P_k| \leqslant \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m}{k^4} \int_1^\infty \frac{dt}{t^5} = \frac{6m}{k^4},$$

de unde se poate vedea că P_k tinde către zero la creşterea lui k, în timp ce produsul $k^4 P_k$ rămîne mărginit.

Se poate arăta că şi produsul $k^5 P_k$ rămîne mărginit. Luînd în considerare notaţiile introduse, putem transcrie formula pentru S_k în forma

$$S_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + C_1 + \eta_k$$

unde

$$\eta_k = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{k^3} + P_k.$$

Pentru determinarea constantei C_1 ne vom folosi de formula lui Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Această formulă poate fi scrisă în felul următor:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Luînd logaritmii şi notînd ca şi mai înainte

$$S_n = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n,$$

$$S_{2n} = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln (2n),$$

obţinem, în virtutea formulei (*),

$$\frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \ln 2 = \lim_{n \to \infty} \left[2n \ln 2 + 2S_n - S_{2n} - \frac{1}{2} \ln (2n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{2n \ln 2 + 2\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + C_1 + \eta_n\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\left(2n + \frac{1}{2}\right) \ln (2n) - 2n + C_1 + \eta_{2n}\right] - \frac{1}{2} \ln (2n+1)\right\} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{2n+1}{n} + C_1 + 2\eta_n - \eta_{2n}\right].$$

La creşterea nemărginită a numărului n, valoarea lui $\ln \frac{2n+1}{n}$ are ca limită $\ln 2$; mărimile η_n şi η_{2n} au ca limită 0, iar ecuaţia precedentă ne dă:

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel avem formula

$$S_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + \ln \sqrt{2\pi} + \eta_k, \tag{1}$$

unde

$$\eta_k = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{320} \cdot \frac{1}{k^3} + P_k.$$

Din formula de mai sus rezultă

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k} \cdot e^{\left(\frac{1}{12}\frac{1}{k} - \frac{1}{360}\frac{1}{k^3} + P_k\right)}. \tag{2}$$

În această formulă, ultimul factor tinde către 1 cînd numărul k crește, prin urmare egalitatea precedentă exprimă următoarea teoremă: *limita raportului* $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}{\sqrt{2\pi k}\, k^k \cdot e^{-k}}$, *cînd numărul* k *tinde către infinit, este egală cu* 1.

Pentru a arăta gradul de aproximație al acestor formule, vom pune $k = 10$ și în locul logaritmilor naturali vom lua logaritmii zecimali; formula (2) ne dă atunci

$$\lg (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10) = \lg \sqrt{2\pi} + \left(10 + \frac{1}{2}\right) - 10\,M + M\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{1000} + P_k\right),$$

unde

$$M = 0{,}43429448.$$

Astfel, găsim pentru membrul al doilea al egalității:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\lg 2 = 0{,}1505150 \\ \frac{1}{2}\lg \pi = 0{,}2485749 \\ \hline \frac{1}{2}\lg 2\pi = 0{,}3990899 \\ 10 + \frac{1}{2} = 10{,}5000000 \\ \frac{1}{120} M = 0{,}0036191 \\ \hline 10{,}9027090 \\ -\ 4{,}3429460 \\ \hline \lg N = 6{,}5597630 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10M = 4{,}3429448 \\ \frac{1}{360\,000} M = 0{,}0000012 \\ \hline 4{,}3429460. \end{array}$$

Pe de altă parte, avem:

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 10 = 720 \cdot 5040 = 3\,628\,800,$$

$$\lg N = 6{,}5597630,$$

ceea ce înseamnă că rezultatul este corect pînă la ultima cifră; prin urmare, dacă ne-am folosi de acest rezultat la determinarea lui $\lg C_1$, cu

toate că am obţine $\lg C_1 = 0{,}3990899$, formula nu ar avea eleganţa care i-a fost dată de Stirling.

Exemplul 3. Să calculăm după formula lui Euler integrala

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln 2 = 0{,}69314718,$$

pe care am avut-o în § 32 şi pentru care

$$hT = 0{,}69377$$

în cazul cînd

$$h = \frac{1}{10}.$$

Avem:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\ f'(x) &= -(1+x)^{-2}, \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-3}, \\ f'''(x) &= -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1+x)^{-4}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

şi, prin urmare:

$$f'(1) = -\frac{1}{4}, \quad f'(0) = -1,$$

$$f'''(1) = -\frac{3}{8}, \quad f'''(0) = -6,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

apoi

$$\begin{aligned} hT &= = 0{,}69377 \\ -\frac{1}{12} \cdot h^2 [f'(1) - f'(0)] &= -\frac{1}{1600} = -0{,}00062 \\ +\frac{h^4}{720} [f'''(1) - f'''(0)] &= +\frac{1}{1\,230\,000} = +0{,}00000 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}69315 \end{aligned}$$

de unde obţinem în sfîrşit

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}69315.$$

§ 67. Interpolarea. Formula lui Euler ne dă legătura dintre suma şi integrala acelor funcţii, a căror expresie analitică este dată şi la care se poate alcătui expresia derivatelor de ordinul întîi, al treilea, al cincilea etc. Însă, în multe cazuri trebuie să avem posibilitatea de a se calcula integrala, cunoscînd numai anumite valori particulare ale funcţiei, corespunzătoare unor valori consecutive şi echidistante ale argumentului, iar în alte cazuri trebuie să se găsească, cu ajutorul aceloraşi valori particulare ale funcţiei, valori particulare ale derivatei de ordinul întîi, ale derivatei de ordinul al doilea

etc. pentru anumite valori particulare ale argumentului. Ultimul caz se întîlnește, de exemplu, atunci cînd, cunoscîndu-se înregistrarea grafică a mișcării centrului de greutate al unui corp solid, trebuie să se găsească valoarea rezultantei forțelor aplicate acestuia.

Atît rezolvarea primei probleme cît și a problemei a doua depinde de așa-numita *interpolare*, pentru a cărei efectuare există o mulțime de formule și procedee variate. Ne vom mulțumi, în cele ce urmează, să tratăm cele mai simple dintre ele.

Să presupunem că am alcătuit pentru funcția

$$y = f(x),$$

definită analitic sau nu, șirul de valori particulare

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n,$$

corespunzătoare valorilor

$$a, a + h, a + 2h, a + 3h, \cdots, a + nh$$

ale argumentului.

Cu ajutorul acestor valori ale funcției se calculează valorile primelor diferențe, și anume:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \Delta y_1 = y_2 - y_1; \Delta y_2 = y_3 - y_2; \ldots \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}. \quad (1)$$

Cu ajutorul primelor diferențe se calculează valorile diferențelor de ordinul al doilea, scăzînd din fiecare diferență pe cea precedentă, adică punînd

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \ldots \quad (2)$$

Cu ajutorul diferențelor de ordinul al doilea calculăm diferențele de ordinul al treilea, punînd

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2, \ldots \quad (3)$$

etc.; în general vom avea:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0, \Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1, \Delta^k y_2 = \Delta^{k-1} y_3 - \Delta^{k-1} y_2 \cdots$$

Astfel, putem alcătui tabela 12.

Tabela 12

Argumentele	Funcțiile	Primele diferențe	Diferențele de ordinul al doilea	Diferențele de ordinul al treilea	Diferențele de ordinul al patrulea	Diferențele de ordinul al cincilea
a	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
$a + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$
$a + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$	⋮
$a + 3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	⋮	⋮
$a + 4h$	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	⋮	⋮	
$a + 5h$	y_5	Δy_5	⋮	⋮		
$a + 6h$	y_6	⋮	⋮			
⋮	⋮	⋮				

Această tabelă se aranjează de obicei într-un alt fel, scriindu-se diferenţele între cele două numere din care se formează aceste diferenţe, şi atunci obţinem forma arătată în tabela 13.

Tabela 13

k	Argumentele x_k	Funcţiile y_k	Primele diferenţe Δy_k	Diferenţele de ordinul al doilea $\Delta^2 y_k$	Diferenţele de ordinul al treilee $\Delta^3 y_k$	Diferenţele de ordinul al patrulea $\Delta^4 y_k$	Diferenţele de ordinul al cincilea $\Delta^5 y_k$
0	a	y_0					
			Δy_0				
1	$a+h$	y_1		$\Delta^2 y_0$			
			Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
2	$a+2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
			Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
3	$a+3h$	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
			Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$
4	$a+4h$	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$	
			Δy_4		$\Delta^3 y_3$		
5	$a+5h$	y_5		$\Delta^2 y_4$			
			Δy_5				
6	$a+6h$	y_6					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Din formulele (1), (2), (3) etc. rezultă următoarele relaţii:

În primul rînd:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$
$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1) - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) =$$
$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2} y_{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3} y_{k-3} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{k-1} k y_1 + (-1)^k y_0, \quad \text{(I)}$$

unde în ultima expresie coeficienţii sînt coeficienţi binomiali, adică aceeaşi ca şi la ridicarea expresiei $(\alpha - 1)$ la puterea k, iar în locul puterilor literei α stă litera y cu acelaşi indice ca şi exponentul lui α.

Această formulă se verifică direct prin trecere de la k la $k+1$.

În al doilea rînd:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0) =$$
$$= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

şi în general

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \cdots + \Delta^k y_0. \quad \text{(II)}$$

Și această formulă se verifică prin trecere de la k la $k+1$, observînd că se poate scrie simbolic:

$$y_1 = (1+\Delta)\, y_0,\ y_2 = (1+\Delta)^2\, y_0,\ y_3 = (1+\Delta)^3 y_0, \ldots,$$

și, în general, se admite formula simbolică

$$y_k = (1+\Delta)^k y_0,$$

de unde rezultă apoi tot în mod simbolic:

$$y_{k+1} = (1+\Delta)\, y_k = (1+\Delta)\,(1+\Delta)^k\, y_0 = (1+\Delta)^{k+1}\, y_0,$$

adică admițînd valabilitatea acestei formule simbolice pentru k, se observă că ea este valabilă și în general, de unde rezultă că este valabilă și formula echivalentă (II), care nu este simbolică.

După cum vedem, formula (II) este valabilă pentru valori *întregi și pozitive* ale lui k; această formulă se poate extinde asupra oricăror valori ale lui k, și atunci, în locul lui k scriind t, obținem expresia

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad \text{(III)}$$

În membrul al doilea al formulei (III) am obținut o serie infinită în variabila t. Păstrînd în această serie numai n termeni, comitem o eroare pe care o putem evalua examinînd restul acestei serii. Nu vom aprofunda însă această problemă, trimițînd cititorul la lucrarea academicianului A. A. Markov, Исчисление конечных разностей (p. 20).

Evident că expresia (III) reprezintă o funcție întreagă de t, care ia următoarele valori:

$$\begin{aligned} &\text{pentru } t = 0 : y_0, \\ &\text{pentru } t = 1 : y_1, \\ &\text{pentru } t = 2 : y_2 \end{aligned}$$

etc.

Se vede că în formulele (II) și (III) figurează valorile funcției și ale diferențelor ei, care se află într-un rînd orizontal al tabelei 12 sau, la al doilea aranjament (tabela 13), valorile funcției și ale diferențelor ei sînt situate într-un rînd oblic de sus pînă jos.

Evident că ambele formule menționate pot fi scrise începînd cu orice indice n, adică cu orice valoare a argumentului $x_n = a + nh$, de unde rezultă:

$$y_{n+k} = y_n + k\Delta y_n + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_n + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_n + \cdots + \Delta^k y_n, \qquad \text{(II')}$$

$$y_{n+t} = y_n + t\,\Delta y_n + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_n + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_n + \cdots, \qquad \text{(III')}$$

unde

$$y_{n+t} = f\,[a + (n+t)\,h].$$

Formula (III), denumită formula de interpolare a lui Newton se folosește de obicei pentru aflarea valorilor funcției y, corespunzătoare unor valori intermediare ale argumentului, situate între a și $a+h$.

Să presupunem, de exemplu, că sînt date valorile $a = 1\,000$, $h = 10$ şi că sînt cunoscute valorile funcţiei y pentru o serie de argumente în progresie aritmetică; se cere să se afle valorile lui y pentru argumentele intermediare la intervale de $h = 1$.

Să presupunem că valorile funcţiei y sînt date de tabela 14.

Tabela 14

x	y	x	y
1000	3,0000000	1030	3,0128372
1010	3,0043214	1040	3,0170333
1020	3,0086002	1050	3,0211893

Cu ajutorul acestor valori alcătuim tabela diferenţelor 15:

Tabela 15

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	0,0043214	—0,0000426	0,0000008
1010	3,0043214	0,0042788	—0,0000418	0,0000009
1020	3,0086002	0,0042370	—0,0000409	0,0000008
1030	3,0128372	0,0041961	—0,0000401	
1040	3,0170333	0,0041560		
1050	3,0211893			

Din această tabelă se poate vedea că valorile celei de a treia diferenţe $\Delta^3 y$ pot fi privite ca fiind constante, în limitele considerate ale argumentului; ele sînt egale cu + 0,00000085, astfel încît se poate scrie

$$y_t = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\Delta^3 y_0,$$

unde

$$y_0 = 3{,}0000000,\ \Delta y_0 = 0{,}0043214,\ \Delta^2 y_0 = -\,0{,}0000426$$

şi

$$\Delta^3 y_0 = +\,0{,}00000085.$$

Dînd mărimii t succesiv valorile $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ etc. şi efectuînd calculele după schema de mai jos (tabela 16), obţinem valorile cerute ale lui y.

La obţinerea valorilor lui y am neglijat zecimala a opta, adăugînd la zecimala a şaptea o unitate, în cazul cînd cifra neglijată din zecimala a opta era mai mare decît 5.

Tabela 16

I	II	III	IV	V	VI
t	x	$t\Delta y_0$	$\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0$	$y_0+(\mathrm{III})+(\mathrm{IV})+(\mathrm{V})=y$
0	1000	0	0	0	3,0000000
0,1	1001	0,00043214	0,00000192	0,00000002	3,0004341
0,2	1002	0,00086428	0,00000343	0,00000004	3,0008577
0,3	1003	0,00129642	0,00000447	0,00000005	3,0013009
0,4	1004	0,00172856	0,00000511	0,00000005	3,0017337
0,5	1005	0,00216070	0,00000532	0,00000005	3,0021661
0,6	1006	0,00259284	0,00000511	0,00000005	3,0025930
0,7	1007	0,00302498	0,00000447	0,00000004	3,0030295
0,8	1008	0,00345712	0,00000343	0,00000002	3,0031606
0,9	1009	0,00388926	0,00000192	0,00000001	3,0038912
1,0	1010	0,00432140	0,00000000	0,00000000	3,0043214

Luînd orice tabelă de logaritmi cu șapte zecimale, ne convingem că funcția y nu este altceva decît $\lg x$ și observăm că toate valorile obținute de noi sînt corecte pînă la ultima zecimală.

Observînd că în cazul nostru

$$x = a + th$$

și

$$t = \frac{x-a}{h},$$

putem scrie formula (III) în felul următor:

$$y = y_0 + \frac{x-a}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} + \\ + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 y_0}{h^3} + \cdots \qquad (\mathrm{IV})$$

Se înțelege de la sine că luînd ca valoare inițială aceea care corespunde indicelui n, vom avea formula:

$$y = y_n + \frac{x-a_n}{1}\cdot\frac{\Delta y_n}{h} + \frac{(x-a_n)(x-a_n-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_n}{h^2} + \\ + \frac{(x-a_n)(x-a_n-h)(x-a_n-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\Delta^3 y_n}{h^3} + \cdots, \qquad (\mathrm{IV}')$$

unde

$$a_n = a + nh$$

este valoarea argumentului pentru indicele n.

La interpolare, după formulele (III) și (III'), i se atribuie mărimii t de obicei valori cuprinse între 0 și 1, și dacă pornim de la argumentul cel mai

apropiat indicat în tabelă, i se atribuie mărimii t numai valori cuprinse între $-\frac{1}{2}$ și $+\frac{1}{2}$; același lucru va fi valabil și pentru valorile $\frac{x-a}{h}$ și $\frac{x-a_n}{h}$, în cazul folosirii formulelor (IV) și (IV'); în acest caz, toți coeficienții diferențelor vor fi în valoare absolută mai mici de 1, datorită cărui fapt aceste formule dau rezultate suficient de precise.

Uneori trebuie să se afle valoarea unei funcții date printr-o tabelă, pentru o valoare a argumentului care iese din cadrul tabelei; în acest caz, se recurge la așa-numita *extrapolare*, pentru care se folosește aceeași formulă a lui Newton, însă se pornește de la argumentul extrem arătat în tabelă. În acest caz, trebuie să i se atribuie mărimii t sau mărimii $\frac{x-a_n}{h}$ valori absolute mai mari de 1.

Să presupunem, de exemplu, că, avînd tabela de mai sus a valorilor funcției y pentru argumentele x cuprinse între 1000 și 1050, care cresc din 10 în 10, dorim să cunoaștem valoarea lui y pentru $x = 960$; atunci va trebui să punem în formula (IV):

$$y_0 = 3{,}0000000,\ h = 10,\ x - a = -40,$$

$$\Delta y_0 = 0{,}0043214,\ \Delta^2 y_0 = -0{,}0000426,\ \Delta^3 y_0 = +0{,}0000008,$$

considerînd nule toate diferențele de ordin mai mare decît 3.

Substituind în formula (IV), obținem:

$$y_0 = 3{,}0000000 \qquad = 3{,}0000000$$

$$\frac{x-a}{1}\frac{\Delta y_0}{h} = -40 \cdot \frac{0{,}0043214}{10} \qquad = -0{,}0172856$$

$$\frac{x-a}{1}\frac{x-a-h}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} = \frac{(-40)(-50)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{-0{,}0000426}{100}\right) = -0{,}0004260$$

$$\frac{x-a}{1}\frac{x-a-h}{2}\frac{x-a-2h}{3}\frac{\Delta^3 y_0}{h^3} = \frac{(-40)(-50)(-60)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{0{,}0000008}{1000} = -0{,}0000160$$

$$y = \qquad = 2{,}9822724$$

Valorile coeficienților de pe lîngă Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ sînt: 4, 10, 20; de aceea, nu avem voie să ne bizuim în produsul $-0{,}0172856$ pe ultima zecimală, iar în produsele $-0{,}0004260$ și $-0{,}0000160$ nu avem voie să ne bizuim nici pe ultimele două zecimale, ceea ce înseamnă că în sumă ultimele două zecimale ar putea să nu fie exacte: în adevăr, valoarea adevărată este

$$y = \lg 960 = 2{,}9822712.$$

Dar, dacă am vrea să obținem o valoare a lui y pentru valori care diferă mult de cele date în tabelă, de exemplu pentru $x = 500$, am avea:

$$x - a = -500$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$y_0 = \qquad\qquad = 3{,}0000000,$$

$$\frac{x-a}{1}\frac{\Delta y_0}{h} = -500\,\frac{0{,}0043214}{10} = -50\cdot 0{,}0043214 = -0{,}2161070,$$

$$\frac{x-a}{1}\frac{x-a-h}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} = \frac{(-500)(-510)}{2}\,\frac{0{,}0000426}{100} = -1275\cdot 0{,}0000426 = -0{,}0533150,$$

$$\frac{x-a}{1}\,\frac{x-a-h}{2}\,\frac{x-a-2h}{3}\,\frac{\Delta^3 y_0}{h^3} =$$

$$= \frac{(-500)(-510)(-520)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{0{,}0000008}{1000} = -2210\cdot 0{,}0000008 = -0{,}0176800$$

$$y = \qquad\qquad = 2{,}7128980$$

în loc de

$$y = \lg 500 = 2{,}6989700.$$

Acumularea erorilor s-a produs aici nu numai din cauza zecimalelor neglijate în mărimile Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, înmulțite apoi cu 50, 1275, 2210, ci în special în urma ipotezei că diferențele de ordinul al treilea sînt constante și egale cu 0,0000008 în întregul interval dintre $x = 500$ și $x = 1000$ și că diferențele de ordinul al patrulea și cele următoare sînt chiar nule, ceea ce înseamnă că, deși factorii cu care se înmulțesc sînt mari, termenii corespunzători acestor diferențe se anulează. Evident că aceste ipoteze nu sînt juste.

De aici se poate vedea că extrapolarea poate să dea rezultate sigure numai pentru valori apropiate de cele din tabelă, adică valori mici ale raportului $\frac{x-a}{h}$.

Evident că membrul al doilea al formulei (IV) reprezintă un polinom întreg în raport cu litera x, al cărui grad este egal cu ordinul ultimei din diferențele menținute. Acest polinom ia pentru valorile variabilei x egale cu

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \cdots,\ a+kh$$

valorile corespunzătoare

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k.$$

Polinomul poate fi alcătuit și fără a ne folosi de diferențe, de exemplu, după formula lui Lagrange (§ 28) sau după metoda coeficienților nedeterminați: oricare ar fi însă metoda folosită, rezultatele vor fi identice.

În multe cazuri de prelucrare a experiențelor sau a observațiilor se alcătuiesc așa-numitele formule empirice de forma

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k,$$

fără a recurge la metoda diferențelor, folosindu-se apoi această formulă nu numai pentru valorile lui x care se află în intervalul observațiilor, ceea ce ar corespunde interpolării, dar și pentru valorile lui x care se află în afara acestui interval, ceea ce corespunde extrapolării. Exemplul precedent arată cît de atenți trebuie să fim în cazul extrapolării și cît de puțin precise sînt rezultatele obținute pentru valorile argumentului aflate departe de limitele observațiilor.

Scanned with OKEN Scanner

La alcătuirea tabelelor 12 şi 13 s-a presupus că indicii încep cu valoarea zero şi continuă într-o ordine crescătoare. Evident că adeseori este necesar să folosim partea de mijloc a tabelei; în acest caz, putem considera pe y_0 ca valoare iniţială a funcţiei y, atribuindu-i indicele 0, calculînd apoi indicii în ambele sensuri, aşa cum se arată în tabela 17, unde diferenţele vor fi ca şi mai înainte:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\quad \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \ldots$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1,\quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1\quad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \ldots$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2,\quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,\quad \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tabela 17

Indicele n	Argumentul x_n	Funcţia y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
—4	$a-4h$	y_{-4}	Δy_{-4}	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$	$\Delta^4 y_{-4}$
—3	$a-3h$	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-3}$
—2	$a-2h$	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-2}$
—1	$a-h$	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-1}$
0	a	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	$a+h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	⋮
2	$a+2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	⋮	
3	$a+3h$	y_3	Δy_3	⋮		
4	$a+4h$	y_4	⋮			
⋮	⋮	⋮				

Şi în acest caz vom avea, ca şi mai înainte, formulele (II), (III), (IV).

Să ne închipuim că aceeaşi tabelă de diferenţe este aşezată după indici sau argumente în ordine descrescătoare, după cum este arătat în tabela 18 şi unde diferenţele au fost notate prin semnele δ, δ^2, δ^3, ... Evident că aceste diferenţe vor fi:

$$\delta y_0 = y_{-1} - y_0 = -\Delta y_{-1},\quad \delta^2 y_0 = \delta y_{-1} - \delta y_0 = \Delta y_{-1} - \Delta y_{-2} = \Delta^2 y_{-2},$$
$$\delta y_{-1} = y_{-2} - y_{-1} = -\Delta y_{-2},\quad \delta^2 y_{-1} = \delta y_{-2} - \delta y_{-1} = \Delta y_{-2} - \Delta y_{-3} = \Delta^2 y_{-3},$$
$$\delta y_{-2} = y_{-3} - y_{-2} = -\Delta y_{-3},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

astfel încît vom avea, în general,

$$\delta y_0 = -\Delta y_{-1},\quad \delta^2 y_0 = \Delta^2 y_{-2},\quad \delta^3 y_0 = -\Delta^3 y_{-3},\quad \delta^4 y_0 = \Delta^4 y_{-4}, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 18

Indicele n	Argumentul x_n	Funcția y_n	$\delta^1 y_n$	$\delta^2 y_n$	$\delta^3 y_n$	$\delta^4 y_n$
⋮	⋮	⋮	⋮			
4	$a+4h$	y_4	δy_4	⋮	⋮	⋮
3	$a+3h$	y_3	δy_3	$\delta^2 y_4$	$\delta^3 y_4$	$\delta^4 y_4$
2	$a+2h$	y_2	δy_2	$\delta^2 y_3$	$\delta^3 y_3$	$\delta^4 y^3$
1	$a+h$	y_1	δy_1	$\delta^2 y_2$	$\delta^3 y_2$	$\delta^4 y_2$
0	a	y_0	δy_0	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_1$	$\delta^4 y_1$
-1	$a-h$	y_{-1}	δy_{-1}	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_0$	$\delta^4 y_0$
-2	$a-2h$	y_{-2}	δy_{-2}	$\delta^2 y_{-1}$	$\delta^3 y_{-1}$	⋮
-3	$a-3h$	y_{-3}	δy_{-3}	$\delta^2 y_{-2}$	⋮	
-4	$a-4h$	y_{-4}	⋮	⋮		
⋮	⋮	⋮				

Pentru tabela 18, formula (II) va fi

$$y_{-k} = y_0 + k\delta y_0 + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 y_0 + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4 y_0 + \cdots$$

Înlocuind diferențele $\delta y_0, \delta^2 y_0, \ldots$ prin expresiile lor ce conțin diferențele Δ, obținem pentru tabela 17:

$$y_{-k} = y_0 - k\Delta y_{-1} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{-3} + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{-4} - \cdots, \qquad (IV'')$$

adică o formulă în care intră diferențele ce se află pe o linie oblică, înclinată de jos în sus.

Evident că luînd ca valoare inițială pe y_n, obținem următoarele formule:

$$y_{n-k} = y_n - k\Delta y_{n-1} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-4} - \cdots,$$

$$y_{n-t} = y_n - t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-2} - \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-4} - \cdots,$$

$$y = y_n - \frac{x-a_n}{1}\frac{\Delta y_{n-1}}{h} + \frac{(x-a_n)(x-a_n-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{h^2} - \\ - \frac{(x-a_n)(x-a_n-h)(x-a_n-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{h^3} + \cdots, \qquad (IV''')$$

de care va trebui să ne folosim la extrapolarea la sfîrșitul tabelei.

Scanned with OKEN Scanner

§ 68. Formulele de interpolare examinate mai sus sînt polinoame întregi în raport cu variabila x, care iau valori dinainte date pentru valorile date ale variabilei x, formînd în cazul nostru o progresie aritmetică.

Evident că un caz mai general va fi acela cînd aceste valori nu sînt echidistante; se pune deci problema de a alcătui un polinom întreg

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k, \qquad (*)$$

care pentru valorile lui x egale cu

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$$

să ia valorile corespunzătoare

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k.$$

În § 28 s-a indicat soluţia acestei probleme, obţinută de Lagrange, dîndu-se şi formula respectivă; vom prezenta aici soluţia dată de Newton cu aproape 120 de ani înaintea lui Lagrange.

Substituind în formula (*) pe rînd

$$x = a_0, \; x = a_1, \; x = a_2, \ldots, x = a_k$$

şi egalînd rezultatele obţinute cu

$$y_0, y_1, \ldots, y_k,$$

obţinem pentru determinarea coeficienţilor următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{aligned}
y_0 &= A_0 + A_1 a_0 + A_2 a_0^2 + A_3 a_0^3 + \ldots + A_k a_0^k, \\
y_1 &= A_0 + A_1 a_1 + A_2 a_1^2 + A_3 a_1^3 + \ldots + A_k a_1^k, \\
y_2 &= A_0 + A_1 a_2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_2^3 + \ldots + A_k a_2^k, \\
y_3 &= A_0 + A_1 a_3 + A_2 a_3^2 + A_3 a_3^3 + \ldots + A_k a_3^k,
\end{aligned}$$

Scăzînd prima ecuaţie din cea de a doua, a doua din a treia, a treia din a patra etc. şi observînd că membrul al doilea al primei din ecuaţiile obţinute se împarte la $a_1 - a_0$, că membrul al doilea al celei de a doua se împarte la $a_2 - a_1$, al celei de a treia la $a_3 - a_2$ etc., efectuăm împărţirea, şi notînd primii membri prin δy_0, δy_1, $\delta y_2, \ldots$, obţinem ecuaţiile

$$\begin{aligned}
\frac{y_1 - y_0}{a_1 - a_0} &= \delta y_0 = A_1 + A_2 (a_1 + a_0) + A_3 (a_1^2 + a_1 a_0 + a_0^2) + \ldots, \\
\frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1} &= \delta y_1 = A_1 + A_2 (a_2 + a_1) + A_3 (a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + \ldots, \\
\frac{y_3 - y_2}{a_3 - a_2} &= \delta y_2 = A_1 + A_2 (a_3 + a_2) + A_3 (a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + \ldots,
\end{aligned}$$

. . . . . .

Procedînd cu aceste ecuaţii în mod analog şi notînd primii membri respectiv cu $\delta^2 y_0$, $\delta^2 y_1$, $\delta^2 y_2, \ldots$, găsim:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta y_1 - \delta y_0}{a_2 - a_0} &= \delta^2 y_0 = A_2 + A_3 (a_2 + a_1 + a_0) + \ldots, \\
\frac{\delta y_2 - \delta y_1}{a_3 - a_1} &= \delta^2 y_1 = A_2 + A_3 (a_3 + a_2 + a_1) + \ldots,
\end{aligned}$$

. . . . . .

Procedînd cu aceste ecuații în același fel, obținem după împărțirea la $a_3 - a_0$, $a_4 - a_1$,...:

$$\frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{a_3 - a_0} = \delta^3 y_0 = A_3 + A_4(\ldots) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de unde se poate vedea ușor felul cum trebuie efectuate calculele. Dacă am fi dorit ca funcția y să fie reprezentată de un polinom de gradul al treilea, am obține din ecuațiile precedente:

$$A_3 = \delta^3 y_0,$$
$$A_2 = \delta^2 y_0 - (a_2 + a_1 + a_0)\,\delta^3 y_0,$$
$$A_1 = \delta y_0 - (a_1 + a_0)\,\delta^2 y_0 + (a_2 a_1 + a_1 a_0 + a_2 a_0)\,\delta^3 y_0,$$
$$A_0 = y_0 - a_0\,\delta y_0 + a_1 a_0\,\delta^2 y_0 - a_2 a_1 a_0\,\delta^3 y_0,$$

și substituind aceste mărimi, am găsi formula:

$$y = y_0 + (x - a_0)\,\delta y_0 + [x^2 - (a_1 + a_0)\,x + a_1 a_0]\,\delta^2 y_0 +$$
$$+ [x^3 - (a_2 + a_1 + a_0)\,x^2 + (a_2 a_1 + a_1 a_0 + a_2 a_0)\,x - a_2 a_1 a_0]\,\delta^3 y_0$$

sau, descompunînd expresiile din paranteză în factori, am obține:

$$y = y_0 + (x - a_0)\,\delta y_0 + (x - a_0)(x - a_1)\,\delta^2 y_0 + (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\,\delta^3 y_0.$$

Exact în același fel am proceda pentru un polinom de orice grad, găsind formula:

$$y = y_0 + (x - a_0)\,\delta y_0 + (x - a_0)(x - a_1)\,\delta^2 y_0 + (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\,\delta^3 y_0 +$$
$$+ \ldots + (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)\,\delta^{k+1} y_0. \qquad (V)$$

Repartizarea tabelară a mărimilor δy_0, $\delta^2 y_0$,... este arătată în tabela 19.

Tabela 19

Indicele n	Argumentul a_n	Funcția y_n	δy_n	$\delta^2 y_n$	$\delta^3 y_n$	$\delta^4 y_n$	...
0	a_0	y_0	δy_0	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_0$	$\delta^4 y_0$	...
1	a_1	y_1	δy_1	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_1$	$\delta^4 y_1$	
2	a_2	y_2	δy_2	$\delta^2 y_2$	$\delta^3 y_2$	⋮	
3	a_3	y_3	δy_3	$\delta^2 y_3$	⋮		
4	a_4	y_4	δy_4	⋮			
5	a_5	y_5	⋮				
⋮	⋮	⋮					

Tabela 19 se alcătuieşte după următoarea schemă:

$$\delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{a_1 - a_0}, \qquad \delta^2 y_0 = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{a_2 - a_0}, \qquad \delta_3 y_0 = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{a_3 - a_0},$$

$$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1}, \qquad \delta^2 y_1 = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{a_3 - a_1}, \qquad \delta^3 y_1 = \frac{\delta^2 y_2 - \delta^2 y_1}{a_4 - a_1},$$

$$\delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{a_3 - a_2}, \qquad \delta^2 y_2 = \frac{\delta y_3 - \delta y_2}{a_4 - a_2}, \qquad \delta^3 y_2 = \frac{\delta^2 y_3 - \delta^2 y_2}{a_5 - a_2},$$

$$\delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{a_4 - a_3}, \qquad \delta^2 y_3 = \frac{\delta y_4 - \delta y_3}{a_5 - a_3}, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

adică numărătorii se alcătuiesc la fel ca şi în cazul argumentelor echidistante, numitorii din prima coloană fiind însă diferenţele argumentelor învecinate, adică

$$a_1 - a_0,\ a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \ldots;$$

în a doua coloană numitorii vor fi diferenţele argumentelor ai căror indici diferă cu două unităţi, adică

$$a_2 - a_0,\ a_3 - a_1,\ a_4 - a_2,\ \ldots;$$

în coloana a treia numitorii vor fi diferenţele argumentelor ai căror indici se deosebesc cu trei unităţi, adică

$$a_3 - a_0,\ a_4 - a_1,\ a_5 - a_2,\ \ldots;$$

şi, în general, la coloana i, numitorii vor fi diferenţele argumentelor ai căror indici diferă cu i unităţi, adică

$$a_i - a_0,\ a_{i+1} - a_1,\ a_{i+2} - a_2,\ \ldots$$

Se observă uşor că, pentru argumentele echidistante, adică cele care se află într-o progresie aritmetică cu raţia h, vom avea

$$\delta y_0 = \frac{\Delta y_0}{h}, \qquad \delta^2 y_0 = \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2 \cdot h^2}, \qquad \delta^3 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h^3}, \ \ldots,$$

iar formula (V) se va transforma în formula (IV).

Funcţiile cuprinse în membrii ai doilea ai formulelor lui Lagrange şi Newton reprezintă polinoame de x, de acelaşi grad, dacă numărul abscişelor x şi al ordonatelor y care se dau este acelaşi. Aceste polinoame iau aceleaşi valori

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$$

pentru valorile argumentului x, egale cu

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,$$

care sînt în număr de $k+1$; prin urmare, aceste polinoame sînt identice; adică, la polinoamele respective coeficienţii puterilor egale ale lui x sînt egali între ei. Această proprietate reprezintă o teoremă cunoscută a algebrei

superioare, la a cărei demonstrație nu ne vom opri. Vom da în locul acesteia deducția remarcabilă a lui Gauss *), prin care acesta obține formula lui Newton din formula lui Lagrange.

Fie

$$y = y_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_k)} + y_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_k)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_k)} + \dots$$
$$\dots + y_k \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{k-1})}{(a_k-a_0)(a_k-a_1)\dots(a_k-a_{k-1})}$$

formula de interpolare a lui Lagrange. Să notăm membrul al doilea al acestei formule prin X_x și să alcătuim expresiile

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\dots$$

Găsim:

. . . . . .

$$X_1 = y_0,$$

$$X_2 = y_0 \frac{x-a_1}{a_0-a_1} + y_1 \frac{x-a_0}{a_1-a_0},$$

$$X_3 = y_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + y_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + y_2 \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},$$

$$X_4 = y_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + y_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} +$$
$$+ y_2 \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + y_3 \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

. . . . . .

Luînd diferențele acestor cantități, avem:

$$X_1 = y_0,$$

$$X_2 - X_1 = (x-a_0)\left[\frac{y_0}{a_0+a_1} + \frac{y_1}{a_1-a_0}\right],$$

$$X_3 - X_2 = (x-a_0)(x-a_1)\left[\frac{y_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{y_1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{y_2}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}\right].$$

$$X_4 - X_3 = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\left[\frac{y_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + \right.$$
$$+ \frac{y_1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + \frac{y_2}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} +$$
$$\left. + \frac{y_3}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\right],$$

. . . . . .

*) C. F. Gauss, Werke, Bd. III, S. 273 u. f.

Prin adunare, obţinem:

$$X = y_0 + (x - a_0)\,[a_0a_1] + (x - a_0)\,(x - a_1)\,[a_0a_1a_2] + \\ + (x - a_0)\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,[a_0a_1a_2a_3] + \ldots,$$

unde s-a pus

$$[a_0a_1] = \frac{y_0}{a_0 - a_1} + \frac{y_1}{a_1 - a_0},$$

$$[a_0a_1a_2] = \frac{y_0}{(a_0 - a_1)\,(a_0 - a_2)} + \frac{y_1}{(a_1 - a_0)\,(a_1 - a_2)} + \frac{y_2}{(a_2 - a_0)\,(a_2 - a_1)},$$

$$[a_0a_1a_2a_3] = \frac{y_0}{(a_0 - a_1)\,(a_0 - a_2)\,(a_0 - a_3)} + \frac{y_1}{(a_1 - a_0)\,(a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3)} + \\ + \frac{y_2}{(a_2 - a_0)\,(a_2 - a_1)\,(a_2 - a_3)} + \frac{y_3}{(a_3 - a_0)\,(a_3 - a_1)\,(a_3 - a_2)},$$

. . . . . .

Din aceste formule rezultă (notaţiile fiind acele folosite la deducerea formulei lui Newton):

$$[a_0a_1] = \frac{y_1 - y_0}{a_1 - a_0} = \delta y_0,$$

$$[a_0a_1a_2] = \frac{[a_1a_2] - [a_0a_1]}{a_2 - a_0} = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{a_2 - a_0} = \delta^2 y_0,$$

$$[a_0a_1a_2a_3] = \frac{[a_1a_2a_3] - [a_0a_1a_2]}{a_3 - a_0} = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{a_3 - a_0} = \delta^3 y_0,$$

. . . . . .

Aceasta înseamnă că şi cantităţile

$$[a_0a_1],\ [a_0a_1a_2],\ldots$$

se alcătuiesc după aceeaşi schemă ca şi diferenţele

$$\delta y_0,\ \delta y_1,\ \ldots,$$

putînd fi aranjate într-o tabelă de acelaşi fel ca şi în cazul diferenţelor δ (v. tabela 20).

Tabela 20

Indicele n	Argumentul x	Funcţia y_n	$[a_n a_{n+1}]$	$[a_n a_{n+1} a_{n+2}]$	$[a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}]$	. . .
0	a_0	y_0	$[a_0a_1]$	$[a_0a_1a_2]$	$[a_0a_1a_2a_3]$	.....
1	a_1	y_1	$[a_1a_2]$	$[a_1a_2a_3]$	$[a_1a_2a_3a_4]$	.....
2	a_2	y_2	$[a_2a_3]$	$[a_2a_3a_4]$	$[a_2a_3a_4a_5]$	⋮
3	a_3	y_3	$[a_3a_4]$	$[a_3a_4a_5]$	⋮	
4	a_4	y_4	$[a_4a_5]$	⋮		
5	a_5	y_5	⋮			
⋮	⋮	⋮				

De aici rezultă că polinomul X poate fi scris sau în forma

$$X = y_0 + (x - a_0)\,[a_0a_1] + (x - a_0)\,(x - a_1)\,[a_0a_1a_2] + \\ + (x - a_0)\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,[a_0a_1a_2a_3] + \ldots, \qquad \text{(VI)}$$

sau în forma lui Newton

$$X = y_0 + (x - a_0)\,\delta y_0 + (x - a_0)\,(x - a_1)\,\delta^2 y_0 + \\ + (x - a_0)\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,\delta^3 y_0 + \ldots, \qquad \text{(VI')}$$

astfel încît devine evidentă identitatea dintre formula lui Lagrange și cea a lui Newton.

Deoarece la alcătuirea acestor formule nu joacă nici un rol ordinea în care sînt aranjate argumentele și funcțiile, și sînt importante numai valorile acestora, urmează că putem renunța la indicii x, înlocuind argumentele

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_k$$

și valorile corespunzătoare ale funcției

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots,\ y_k$$

prin

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots.$$

și

$$y_a, y_b, y_c, y_d, \ldots,$$

astfel încît tabela 20 ia forma tabelei 21.

Tabela 21

Argumentele x	Funcțiile y	$[ab]$	$[abc]$	$[abcd]$	$[abcde]$	$[abcdef]$	. . .
a	y_a						
b	y_b	$[ab]$					
c	y_c	$[bc]$	$[abc]$				
d	y_d	$[cd]$	$[bcd]$	$[abcd]$			
e	y_e	$[de]$	$[cde]$	$[bcde]$	$[abcde]$		
f	y_f	$[ef]$	$[def]$	$[cdef]$	$[bcdef]$	$[abcdef]$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Se înțelege de la sine că, introducînd pentru notația diferențelor simbolul δ în locul parantezelor [ ], obținem în locul tabelei 21, tabela 22, iar formulele (VI) și (VI') iau forma:

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 22

Argumentele x	Funcţiile y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
a	y_a					
		δy_a				
b	y_b		$\delta^2 y_a$			
		δy_b		$\delta^3 y_a$		
c	y_c		$\delta^2 y_b$		$\delta^4 y_a$	
		δy_c		$\delta^3 y_b$		$\delta^5 y_a$
d	y_d		$\delta^2 y_c$		$\delta^4 y_b$	
		δy_d		$\delta^3 y_c$		
e	y_e		$\delta^2 y_d$			
		δy_e				
f	y_f					

$$X = y_a + (x-a)\,[ab] + (x-a)(x-b)\,[abc] + (x-a)(x-b)(x-c)\,[abcd] + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,[abcde] + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\,[abcdef] + \ldots \quad \text{(VI'')}$$

$$X = y_a + (x-a)\,\delta y_a + (x-a)(x-b)\,\delta^2 y_a + (x-a)(x-b)(x-c)\,\delta^3 y_a + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,\delta^4 y_a + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\,\delta^5 y_a + \ldots \quad \text{(VI''')}$$

Aceleaşi argumente pot fi dispuse şi într-o altă ordine, de exemplu:

$$d,\ c,\ e,\ b,\ f,\ a, \ldots$$
$$y_d,\ y_c,\ y_e,\ y_b,\ y_f,\ y_a,\ \ldots$$

căreia îi va corespunde tabela 23. Formula (VI'') ia forma:

Tabela 23

Argumentele x	Funcţiile y	$[ab]$	$[abc]$	$[abcd]$	$[abcde]$	$[abcdef]$
d	y_d					
		$[dc]$				
c	y_c		$[dce]$			
		$[ce]$		$[dceb]$		
e	y_e		$[ceb]$		$[dceb]$	
		$[eb]$		$[cebf]$		$[dcebfa]$
b	y_b		$[ebf]$		$[cebfa]$	
		$[bf]$		$[ebfa]$		
f	y_f		$[bfa]$			
		$[fa]$				
a	y_a					

$$X = y_d + (x-d)\,[dc] + (x-d)(x-c)\,[dce] + (x-d)(x-c)(x-e)\,[dceb] + (x-d)(x-c)(x-e)(x-b)\,[dcebf] + (x-d)(x-c)(x-e)(x-b)(x-f)\,[dcebfa] + \ldots;$$

însă mărimile $[dc]$, $[dce]$ etc. nu depind, prin însuşi modul de alcătuire a lor, de ordinea argumentelor, ci numai de valorile lor, din care cauză $[dc]=[cd]$, $[dce]=[cde]$, $[dceb]=[bcde]$, $[dcebf]=[bcdef]$, $[dcebfa]=[abcdef]$, iar formula precedentă poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned} X = y_d &+(x-d)\,[cd]+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,[cde]+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,(x-e)\,[bcde]+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,(x-e)\,(x-b)\,[bcdef]+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,(x-e)\,(x-b)\,(x-f)\,[abcdef]. \end{aligned} \qquad \text{(VII)}$$

Revenind la tabela 21, observăm că în formula (VII) figurează diferenţele situate în linia orizontală, al cărei argument este d, şi în linia orizontală, care se află între liniile ale căror argumente sînt c şi d. Tot astfel, dacă am lua în locul ordinei argumentelor

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ldots$$

ordinea

$$d,\ e,\ c,\ f,\ b,\ g,\ a,\ldots,$$

am obţine formula

$$\begin{aligned} X = y_d &+(x-d)\,[de]+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,[cde]+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,(x-c)\,[cdef]+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,(x-c)\,(x-f)\,[bcdef]+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,(x-c)\,(x-f)\,(x-b)\,[bcdefg]+\ldots, \end{aligned} \qquad \text{(VIII)}$$

care cuprinde diferenţele aflate în linia orizontală cu argumentul d şi în linia orizontală dintre liniile ale căror argumente sînt d şi e.

Se înţelege de la sine că introducînd, pentru notarea diferenţelor, în locul parantezelor [ ] simbolul δ, obţinem — pe baza tabelei 22 — în locul formulelor (VII) şi (VIII) următoarele formule:

$$\begin{aligned} X = y_d &+(x-d)\,\delta y_c+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,\delta^2 y_c+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,(x-e)\,\delta^3 y_b+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,(x-e)\,(x-b)\,\delta^4 y_b+ \\ &+(x-d)\,(x-c)\,(x-e)\,(x-b)\,(x-f)\,\delta^5 y_a+\ldots. \end{aligned} \qquad \text{(VII')}$$

şi

$$\begin{aligned} X = y_d &+(x-d)\,\delta y_d+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,\delta^2 y_c+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,(x-c)\,\delta^3 y_c+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,(x-c)\,(x-f)\,\delta^4 y_b+ \\ &+(x-d)\,(x-e)\,(x-c)\,(x-f)\,(x-b)\,\delta^5 y_b+\ldots, \end{aligned} \qquad \text{(VIII')}$$

dintre care prima cuprinde diferenţele situate, în tabela 22, în linia orizontală al cărei argument este d şi în linia orizontală cuprinsă între liniile cu argumentele d şi c; a doua formulă cuprinde diferenţele situate în linia orizontală cu argumentul d şi linia cuprinsă între liniile orizontale cu argumentele d şi e.

Scanned with OKEN Scanner

Factorii prezintă aceeași ordine ca și argumentele.
Să admitem acum că argumentele

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ldots$$

se află într-o progresie aritmetică, astfel încît

$$b-a=c-b=d-c=e-d=\ldots=h$$

și că argumentul d corespunde indicelui n și este egal cu a_n; vom avea atunci:

$$\begin{aligned} y_d &= y_n,\\ a &= a_n-3h=a_{n-3},\\ b &= a_n-2h=a_{n-2},\\ c &= a_n-\ h=a_{n-1},\\ d &= a_n,\\ e &= a_n+\ h=a_{n+1},\\ f &= a_n+2h=a_{n+2},\\ g &= a_n+3h=a_{n+3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

iar între diferențele δ și Δ vor avea loc relațiile de mai sus, și anume:

$$\delta y_d=\frac{\Delta y_n}{h},\quad \delta^2 y_d=\frac{\Delta^2 y_n}{1\cdot 2\cdot h^2},\quad \delta^3 y_d=\frac{\Delta^3 y_n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot h^3},\ \ldots$$

Punînd în general

$$x=a_n+kh,$$

obținem din formula (VII')

$$y_{n+k}=X(a_n+kh)=y_n+\frac{k}{1}\Delta y_{n-1}+\frac{(k+1)\,k}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-1}+$$
$$+\frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-2}+\frac{(k+2)\,(k+1)\,k\,(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-2}+$$
$$+\frac{(k+2)\,(k+1)\,k(k-1)\,(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^5 y_{n-3}+\ldots, \qquad \text{(VII'')}$$

iar din formula (VIII')

$$y_{n+k}=X(a_n+kh)=y_n+\frac{k}{1}\Delta y_n+\frac{k\,(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-1}+$$
$$+\frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-1}+\frac{(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-2}+$$
$$+\frac{(k+2)\,(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^5 y_{n-2}+\ldots \qquad \text{(VIII'')}$$

Luînd semisuma acestor expresii, obținem:

$$y_{n+k} = y_n + \frac{k}{1}\frac{\Delta y_{n-1}+\Delta y_n}{2} + \frac{k^2}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-1} +$$

$$+ \frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{\Delta^3 y_{n-2}+\Delta^3 y_{n-1}}{2} + \frac{(k+1)\,k\cdot k\,(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-2} +$$

$$+ \frac{(k+2)\,(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{\Delta^5 y_{n-3}+\Delta^5 y_{n-2}}{2} + \cdots \qquad \text{(IX)}$$

Această formulă se numește formula lui Stirling, iar cele două formule din care ea a fost obținută se numesc formulele lui Gauss.

§ 69. În vederea alcătuirii formulelor pentru calculul integralei $\int_a^{a+nh} y\,dx$, Laplace („Mécanique céleste", livre IX, § 5) calculează mai întîi integrala $\int_a^{a+h} y\,dx$; înmulțind ambii membri ai egalității (IV) cu dx și integrînd între limitele arătate, el obține:

$$\int_a^{a+h} y\,dx = h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{160}\Delta^5 y_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 y_0 + \cdots\right].$$

Pentru a calcula integrala $\int_{a+h}^{a+2h} y\,dx$, Laplace observă că, în virtutea formulei (IV), se poate înlocui în aceste limite valoarea lui y prin

$$Y_1 = y_1 + \frac{x-a_1}{h}\Delta y_1 + \frac{(x-a_1)\,(x-a_1-h)}{1\cdot 2}\,\frac{\Delta^2 y_1}{h^2} +$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_1-h)(x-a_1-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{\Delta^3 y_1}{h^3} + \cdots,$$

unde $a_1 = a + h$ și, prin urmare:

$$\int_{a+h}^{a+2h} y\,dx = \int_{a_1}^{a_1+h} Y_1\,dx = h\left[y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_1 - \cdots\right].$$

În același fel se poate scrie pentru integrala $\int_{a+2h}^{a+3h} y\,dx$:

$$\int_{a+2h}^{a+3h} y\,dx = \int_{a_2}^{a_2+h} Y_2\,dx = h\left[y_2 + \frac{1}{2}\Delta y_2 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_2 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_2 - \cdots\right],$$

unde

$$Y_2 = y_2 + \frac{x-a_2}{1}\frac{\Delta y_2}{h} + \frac{(x-a_2)(x-a_2-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_2}{h^2} + \cdots$$

şi

$$a_2 = a + 2h.$$

Continuînd în acest fel şi luînd apoi suma

$$\int_a^{a+nh} y\,dx = \int_a^{a+h} y\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} y\,dx + \int_{a+2h}^{a+3h} y\,dx + \cdots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} y\,dx,$$

avem:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} y\,dx = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}[\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{n-1}] -$$

$$- \frac{1}{12}[\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \cdots + \Delta^2 y_{n-1}] +$$

$$+ \frac{1}{24}[\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \cdots + \Delta^3 y_{n-1}] -$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Observînd însă că

$$\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{n-1} =$$
$$= (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 \cdots + \Delta^2 y_{n-1} =$$
$$= (\Delta y_1 - \Delta y_0) + (\Delta y_2 - \Delta y_1) + \cdots + (\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_0$$

etc., obţinem după substituire

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} y\,dx = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{1}{12}(\Delta y_n - \Delta y_0) +$$

$$+ \frac{1}{24}(\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 y_n - \Delta^3 y_0) + \frac{3}{160}(\Delta^4 y_n - \Delta^4 y_0) -$$

$$- \frac{863}{60\,480}(\Delta^5 y_n - \Delta^5 y_0) + \cdots \qquad (\alpha)$$

În această formă, formula de mai sus prezintă dezavantajul că diferenţele

$$\Delta y_n,\ \Delta^2 y_n,\ \Delta^3 y_n,\ \ldots$$

necesită cunoaşterea mărimilor

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3},\ \ldots,$$

care se află dincolo de limitele de integrare.

Fără ca să deducem formulele generale referitoare la cazul de față, ne vom mărgini numai la acelea de care vom avea nevoie. Din însăși metoda de alcătuire a tabelei diferențelor avem:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$
$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1},$$
$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-2},$$
$$\Delta^3 y_{n-2} = \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Adunînd aceste egalități și observînd că

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_n,$$

avem

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \cdots \quad (1)$$

Pe baza acestei egalități putem scrie următoarea formulă:

$$\Delta^k y_{n-1} = \Delta^k y_{n-l-1} + \Delta^{k+1} y_{n-l-2} + \Delta^{k+2} y_{n-l-3} + \Delta^{k+3} y_{n-l-4} + \cdots, \quad (*)$$

din care rezultă

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \cdots,$$
$$\Delta^3 y_{n-2} = \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \cdots,$$
$$\Delta^4 y_{n-3} = \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \cdots,$$
$$\Delta^5 y_{n-4} = \Delta^5 y_{n-5} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Adunînd aceste egalități, obținem, în virtutea formulei (1)

$$\Delta^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2} + 2\Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 4\Delta^5 y_{n-5} + \cdots \quad (2)$$

Tot așa obținem, în virtutea formulei (2), șirul de egalități

$$\Delta^3 y_{n-1} = \Delta^3 y_{n-3} + 2\Delta^4 y_{n-4} + 3\Delta^5 y_{n-5} + 4\Delta^6 y_{n-6} + \cdots,$$
$$\Delta^4 y_{n-2} = \Delta^4 y_{n-4} + 2\Delta^5 y_{n-5} + 3\Delta^6 y_{n-6} + \cdots,$$
$$\Delta^5 y_{n-3} = \Delta^5 y_{n-5} + 2\Delta^6 y_{n-6} + \cdots,$$
$$\Delta^6 y_{n-4} = \Delta^6 y_{n-6} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

pe care adunîndu-le, aflăm, în virtutea formulei (*)

$$\Delta^3 y_n = \Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 6\Delta^5 y_{n-5} + 10\Delta^6 y_{n-6} + \cdots \quad (3)$$

Observînd cum am obţinut formula (2) din formula (1) şi formula (3) din formula (2), vedem că:

$$\Delta^4 y_n = \Delta^4 y_{n-4} + (1+3)\,\Delta^5 y_{n-5} + (1+3+6)\,\Delta^6 y_{n-6} + \\ + (1+3+6+10)\,\Delta^7 y_{n-7} + \cdots = \\ = \Delta^4 y_{n-4} + 4\Delta^5 y_{n-5} + 10\Delta^6 y_{n-6} + 20\Delta^7 y_{n-7} + \cdots, \qquad (4)$$

$$\Delta^5 y_n = \Delta^5 y_{n-5} + (1+4)\,\Delta^6 y_{n-6} + (1+4+10)\,\Delta^7 y_{n-7} + \\ + (1+4+10+20)\,\Delta^8 y_{n-8} + \cdots = \\ = \Delta^5 y_{n-5} + 5\Delta^6 y_{n-6} + 15\Delta^7 y_{n-7} + \cdots \qquad (5)$$

Substituind în formula (α), în locul diferenţelor

$$\Delta y_n,\ \Delta^2 y_n,\ \Delta^3 y_n,\ \Delta^4 y_n,\ \Delta^5 y_n$$

valorile lor (1), (2), (3), (4), (5), obţinem, după reducerea termenilor asemenea, următoarea formulă a lui Laplace:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} y\,dx = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \\ - \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - \frac{3}{160}(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) - \\ - \frac{863}{60\,480}(\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0) - \cdots \qquad (X)$$

Comparînd această formulă cu cea dată în § 34, putem găsi valoarea corecţiei, care trebuie adăugată la formula din § 34, pentru a obţine un rezultat mai precis.

§ 70. Să trecem acum la rezolvarea problemelor inverse, adică la aflarea relaţiei dintre derivata unei funcţii şi diferenţele ei de diferite ordine.

În acest scop, vom reveni la formula (III),

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \cdots, \qquad (III)$$

comparînd-o cu dezvoltarea funcţiei $y = f(t)$, dată de seria lui Mac Laurin, adică

$$y = f(t) = f(0) + \frac{t}{1}f'(0) + \frac{t^2}{1\cdot 2}f''(0) + \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0) + \cdots$$

Dezvoltînd formula (III) după puterile literei t, obţinem:

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \cdots\right] + \\ + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right] + \\ + \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \cdots\right] + \\ + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}[\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \cdots] + \\ + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}[\Delta^5 y_0 - \cdots] + \cdots$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea, prin urmare,

$$f'(0) = \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \cdots,$$

$$f''(0) = \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots,$$

$$f'''(0) = \Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \cdots,$$

. . . . . .

Observînd că $t = \frac{x-a}{h}$ și, deci, $dt = \frac{dx}{h}$, rezultă

$$f'(0) = h \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}; \quad f''(0) = h^2 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}$$

etc.; convenind să notăm prin y_0', y_0'', y_0''' valorile

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}, \cdots,$$

obținem următoarele expresii

$$\left.\begin{aligned}
y_0' &= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \cdots\right],\\
y_0'' &= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right],\\
y_0''' &= \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \cdots\right],\\
y_0^{IV} &= \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \cdots\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (XI)$$

Exemplu. Să presupunem că la înregistrarea mișcării rectilinii a unui punct oarecare au fost obținute valorile distanței punctului de la poziția inițială, cuprinse în tabelă, fiind înregistrate la intervale de $\frac{1}{100}$ dintr-o secundă. Se cere să se găsească viteza și accelerația punctului în momentele respective.

Să presupunem că datele mișcării sînt reprezentate în tabela 24.

Tabela 24

Timpul t $\left(\frac{1}{100}\text{ s}\right)$	Drumul y (cm)	Timpul t $\left(\frac{1}{100}\text{ s}\right)$	Drumul y (cm)	Timpul t $\left(\frac{1}{100}\text{ s}\right)$	Drumul y (cm)	Timpul t $\left(\frac{1}{100}\text{ s}\right)$	Drumul y (cm)	Timpul t $\left(\frac{1}{100}\text{ s}\right)$	Drumul y (cm)
0	0,000	2	6,031	4	23,396	6	50,000	8	82,635
1	1,519	3	13,397	5	35,721	7	65,798	9	100,000

Alcătuim tabela diferenţelor (tabela 25). Pentru a calcula vitezele v, alcătuim tabela 26. În acelaşi fel se obţine, pentru acceleraţiile w, tabela 27.

După cum se observă, tabelele 26 şi 27 ne dau vitezele şi acceleraţiile pentru valorile lui t, care nu depăşesc 0,04, deoarece pentru celelalte nu există diferenţe de ordinul al cincilea, pînă la care efectuăm calculele.

Dacă funcţia y ar fi definită în aşa fel încît am putea obţine valorile ei şi pentru celelalte valori ale argumentului t, s-ar înţelege de la sine cum ar trebui continuate tabelele; în cazul însă, cînd nu se pot obţine alte valori ale lui y, în afară de cele existente, se poate proceda în felul următor: se înţelege că am fi putut lua ca valoare iniţială a lui t, 0,09 şi nu 0,00; aranjînd argumentele în ordinea descrescătoare şi răsturnînd astfel tabela, alcătuim diferenţele şi după ele şi prima şi a doua derivată, punînd $h = -0{,}01$ secunde. În acest fel obţinem tabela 28.

Tabela 25

t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0,000	1,519	2,993	—0,139	—0,082	—0,004
1	1,519	4,512	2,854	—0,221	—0,086	0,021
2	6,031	7,366	2,633	—0,307	—0,065	0,002
3	13,397	9,999	2,326	—0,372	—0,063	0,018
4	23,396	12,325	1,954	—0,435	—0,045	0,014
5	35,721	14,279	1,519	—0,480	—0,031	
6	50,000	15,798	1,039	—0,511		
7	65,798	16,837	0,528			
8	82,635	17,365				
9	100,000					

Tabela 26

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
t	Δy	$-\frac{1}{2}\Delta^2 y$	$\frac{1}{3}\Delta^3 y$	$-\frac{1}{4}\Delta^4 y$	$+\frac{1}{5}\Delta^5 y$	(VII) = (II) + (III) + (IV) + (V) + (VI)	$v = \frac{(\text{VII})}{h}$ $\left(h = \frac{1}{100}\right)$
0	1,519	—1,497	—0,046	0,020	—0,001	—0,005	—0,5
1	4,512	—1,427	—0,074	0,021	0,004	3,036	303,6
2	7,366	—1,317	—0,102	0,016	0,000	5,963	596,3
3	9,999	—1,163	—0,124	0,016	0,004	8,732	873,2
4	12,325	—0,977	—0,145	0,011	0,003	11,217	1121,7

Tabela 27

I	II	III	IV	V	VI	VII
t	$\Delta^2 y$	$-\Delta^3 y$	$+\frac{11}{12}\Delta^4 y$	$-\frac{5}{6}\Delta^5 y$	$(VI)=(II)+(III)+$ $+(IV)+(V)$	$w=\frac{(VI)}{h^2}$ $\left(h=\frac{1}{100}\right)$
0	2,993	0,139	—0,075	0,003	3,060	30 600
1	2,854	0,221	—0,079	—0,018	2,978	29 780
2	2,633	0,307	—0,060	—0,002	2,878	28 780
3	2,326	0,372	—0,058	—0,015	2,625	26 250
4	1,954	0,435	—0,041	—0,012	2,336	23 360

Tabela 28

t_1	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
9	100,000	—17.365	0,528	0,511	—0,031	—0,014
8	82,635	—16,837	1,039	0,480	—0,045	—0,018
7	65,798	—15,798	1,519	0,435	—0,063	—0,002
6	50,000	—14,279	1,954	0,372	—0,065	—0,021
5	35,721	—12,325	2,326	0,307	—0,086	0,004
4	23,396	— 9,999	2,633	0,221	—0,082	
3	13,397	— 7,366	2,854	0,139		
2	6,031	— 4,512	2,993			
1	1,519	— 1,519				
0	0,000					

Pe baza acestor diferenţe alcătuim, pentru calculul vitezelor, tabela 29.

Tabela 29

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
t_1	$+\Delta y$	$-\frac{1}{2}\Delta^2 y$	$+\frac{1}{3}\Delta^3 y$	$-\frac{1}{4}\Delta^4 y$	$+\frac{1}{5}\Delta^5 y$	$(VII)=(II)+(III)+$ $+(IV)+(V)+(VI)$	$v=\frac{(VII)}{h}$ $\left(h=\frac{1}{100}\right)$
9	—17,365	—0,264	0,170	0,008	—0,003	—17,454	1745,4
8	—16,837	—0,520	0,160	0,011	—0,004	—17,190	1719,0
7	—15,798	—0,760	0,145	0,016	—0,000	—16,397	1639,7
6	—14,279	—0,977	0,124	0,016	—0,004	—15,020	1502,0
5	—12,325	—1,163	0,102	0,021	—0,001	—13,364	1336,4

Scanned with OKEN Scanner

Exact în acelaşi mod, pentru calculul acceleraţiei, avem tabela 30.

Tabela 30

I	II	III	IV	V	VI	VII
t_1	$+\Delta^2 y$	$-\Delta^3 y$	$+\frac{11}{12}\Delta^4 y$	$-\frac{5}{6}\Delta^5 y$	$(VI)=(II)+(III)+$ $+(IV)+(V)$	$w=\frac{(VI)}{h^2}$
9	0,528	—0,511	—0,029	0,012	0,000	0,000
8	1,039	—0,480	—0,041	0,015	0,533	5 330
7	1,519	—0,435	—0,058	0,002	1,028	10 280
6	1,954	—0,372	—0,060	0,018	1,540	15 400
5	2,326	—0,307	—0,079	—0,003	1,937	19 370

Pentru a ne da seama în ce măsură rezultatele obţinute prin această metodă sînt conforme cu realitatea, vom calcula valorile reale ale vitezelor şi acceleraţiilor pentru cazul nostru, în care

$$y = 100\left(1 - \cos\frac{100\,\pi\,t}{18}\right);$$

adică

$$\left.\begin{aligned} v = y' &= \frac{10\,000\cdot\pi}{18}\sin\frac{100\,\pi\,t}{18} = 1745{,}33\sin\frac{100\,\pi\,t}{18}, \\ w = y'' &= \frac{1\,000\,000\cdot\pi^2}{18^2}\cos\frac{100\pi t}{18} = 30\,462\cos\frac{100\pi t}{18}. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Obţinem astfel tabela 31.

§ 71. În exemplele precedente am utilizat notaţiile şi formulele adoptate de obicei în calculul cu diferenţe finite; în astronomie, însă, unde se recurge foarte des la interpolare pentru a alcătui diferite feluri de tabele care arată mişcarea corpurilor cereşti, adică în care se dau coordonatele lor în funcţie de timp, s-a adoptat, după Gauss, apoi Encke şi Bessel, un alt aranjament al tabelei diferenţelor, precum şi alte notaţii şi formule de interpolare; vom da aici cîteva din formulele cele mai des întrebuinţate, deoarece aplicarea lor este în multe cazuri mai avantajoasă decît a formulelor din §§ 67, 68 şi 69.

Să presupunem că $y = f(x)$ este funcţia dată; tabela diferenţelor se alcătuieşte şi se aranjază în aşa fel, încît valoarea argumentului, pe care o admitem ca iniţială, să fie situată la mijlocul tabelei, adică valorile argumentului să fie

$$\ldots a - 3h,\ a - 2h,\ a - h,\ a,\ a + h,\ a + 2h,\ a + 3h,\ \ldots$$

Valoarea fiecărei diferenţe se scrie la mijloc, între cele două numere din care se formează diferenţa; ordinul diferenţei se notează printr-un indice lîngă litera f, iar ca argument se scrie semisuma argumentelor funcţiilor din care se formează diferenţa (tabela 32).

Tabela 31

După formulele exacte (*)			După cele de interpolare	
t	v	w	v	w
0,00	0,00	30 462	—0,5	30 600
0,01	303,08	30 001	303,6	29 780
0,02	596,98	28 625	596,3	28 780
0,03	872,66	26 381	873,2	26 250
0,04	1121,9	23 340	1121,7	23 360
0,05	1337,0	19 581	1336,4	19 370
0,06	1511,5	15 231	1502,0	15 400
0,07	1640,1	10 348	1639,7	10 280
0,08	1718,8	5 289	1719,0	5 330
0,09	1745,3	0,000	1745,4	0,000

Tabela 32

Argumentele x	Funcțiile $f(x)$	Diferențele de ordinul întîi	Diferențele de ordinul al doilea	Diferențele de ordinul al treilea	Diferențele de ordinul al patrulea	Diferențele de ordinul al cincilea
$a-3h$	$f(a-3h)$					
		$f^1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$				
$a-2h$	$f(a-2h)$		$f^2(a-2h)$			
		$f^1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$		$f^3\left(a-\frac{3}{2}h\right)$		
$a-h$	$f(a-h)$		$f^2(a-h)$		$f^4(a-h)$	
		$f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$		$f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)$		$f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)$
a	$f(a)$		$f^2(a)$		$f^4(a)$	
		$f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$		$f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)$		$f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
$a+h$	$f(a+h)$		$f^2(a+h)$		$f^4(a+h)$	
		$f^1\left(a+\frac{3}{2}h\right)$		$f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)$		
$a+2h$	$f(a+2h)$		$f^2(a+2h)$			
		$f^1\left(a+\frac{5}{2}h\right)$				
$a+3h$	$f(a+3h)$					

Tabela 32 se completează apoi, scriind însă între fiecare două numere ale aceleiaşi coloane media lor aritmetică, atribuindu-i prin analogie un argument egal cu media aritmetică a argumentelor funcţiei (tabela 33).

Tabela 33

Argumentele x	Funcţiile $f(x)$	Diferenţele de ordinul întîi	Diferenţele de ordinul al doilea	Diferenţele de ordinul al treilea	Diferenţele de ordinul al patrulea	Diferenţele de ordinul al cincilea
$a-3h$	$f(a-3h)$					
	$\mathrm{f}\left(\mathrm{a}-\frac{5}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$				
$a-2h$	$f(a-2h)$	$\mathrm{f}^1(\mathrm{a}-2\mathrm{h})$	$f^2(a-2h)$			
	$\mathrm{f}\left(\mathrm{a}-\frac{3}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$\mathrm{f}^2\left(\mathrm{a}-\frac{3}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^3\left(a-\frac{3}{2}h\right)$		
$a-h$	$f(a-h)$	$\mathrm{f}^1(\mathrm{a}-\mathrm{h})$	$f^2(a-h)$	$\mathrm{f}^3(\mathrm{a}-\mathrm{h})$	$f^4(a-h)$	
	$\mathrm{f}\left(\mathrm{a}-\frac{1}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$\mathrm{f}^2\left(\mathrm{a}-\frac{1}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$\mathrm{f}^4\left(\mathrm{a}-\frac{1}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)$
a	$f(a)$	$\mathrm{f}^1(\mathrm{a})$	$f^2(a)$	$\mathrm{f}^3(\mathrm{a})$	$f^4(a)$	$\mathrm{f}^5(\mathrm{a})$
	$\mathrm{f}\left(\mathrm{a}+\frac{1}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$\mathrm{f}^2\left(\mathrm{a}+\frac{1}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$\mathrm{f}^4\left(\mathrm{a}+\frac{1}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
$a+h$	$f(a+h)$	$\mathrm{f}^1(\mathrm{a}+\mathrm{h})$	$f^2(a+h)$	$\mathrm{f}^3(\mathrm{a}+\mathrm{h})$	$f^4(a+h)$	
	$\mathrm{f}\left(\mathrm{a}+\frac{3}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^1\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$\mathrm{f}^2\left(\mathrm{a}+\frac{3}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)$		
$a+2h$	$f(a+2h)$	$\mathrm{f}^1(\mathrm{a}+2\mathrm{h})$	$f^2(a+2h)$			
	$\mathrm{f}\left(\mathrm{a}+\frac{5}{2}\mathrm{h}\right)$	$f^1\left(a+\frac{5}{2}h\right)$				
$a+3h$	$f(a+3h)$					

În tabela 33, funcţiile şi diferenţele sînt scrise cu litere obişnuite, iar semisumele lor, care au fost adăugate, sînt scrise cu caractere aldine.

Cu aceste notaţii, formula lui Newton se scrie în felul următor:

$$f(a+th) = f(a) + \frac{t}{1} f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2} f^2(a+h) + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3} f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right) + \cdots$$

În această formulă putem introduce diferenţele referitoare la argumentul a sau $a+\frac{1}{2}h$; în adevăr,

$$f^2(a+h) = f^2(a) + f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right),$$

$$f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)=f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^4(a+h)=$$

$$=f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^4(a)+f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right),$$

$$f^4(a+2h)=f^4(a+h)+f^5\left(a+\frac{3}{2}h\right)=$$

$$=f^4(a)+f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^6(a+h)=$$

$$=f^4(a)+2f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^6(a+h),$$

$$f^5\left(a+\frac{5}{2}h\right)=f^5\left(a+\frac{3}{2}h\right)+f^6(a+2h)=$$

$$=f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^6(a+h)+f^6(a+2h)$$

etc. Substituind obținem formula

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{t(t-1)}{1\cdot2}f^2(a)+$$

$$+\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot2\cdot3}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f^4(a)+$$

$$+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\cdots$$

Legea de formare a coeficienților funcției de variabilă t constă evident în aceea că la numărător se adaugă pe rînd cînd un factor la început, cînd unul la urmă, iar la numitor se adaugă totdeauna numărul natural următor.

Dacă înlocuim în această formulă mărimile ce conțin argumentele $a+\frac{1}{2}h$ prin mărimile referitoare la argumentele $a-\frac{1}{2}h$, adică facem

$$f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)=f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^2(a),$$

$$f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)=f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^1(a),$$

$$f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)=f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^6(a),$$

obținem formula

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{(t+1)t}{1\cdot2}f^2(a)+$$

$$+\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot2\cdot3}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f^4(a)+$$

$$+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\cdots$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd aceste două formule, luînd semisuma lor şi înlocuind mărimile

$$\frac{1}{2}\left[f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right]=f^1(a),$$

$$\frac{1}{2}\left[f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right]=f^3(a),$$

etc. prin expresiile înscrise în linia respectivă care se referă la argumentul a, obţinem următoarea formulă:

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1(a)+\frac{t^2}{1\cdot 2}f^2(a)+$$
$$+\frac{(t+1)\,t\,(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f^3(a)+\frac{(t+1)\,t^2\,(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4(a)+$$
$$+\frac{(t+2)\,(t+1)\,t\,(t-1)\,(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^5(a)+\cdots \qquad \text{(XII)}$$

Astfel am găsit din nou formulele lui Gauss şi Stirling deduse mai sus pe o altă cale.

§ 72. Dezvoltînd coeficienţii din aceste formule după puterile lui t şi comparînd dezvoltarea obţinută cu dezvoltarea funcţiei $f(a+th)$ în serie Taylor, obţinem următoarea relaţie:

$$\left.\begin{aligned}
f(a+th)&=f(a)+\frac{th}{1}\cdot\frac{df}{da}+\frac{t^2h^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2f}{da^2}+\frac{t^3h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3f}{da^3}+\cdots=\\
&=f(a)+\frac{t}{1}\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\frac{1}{140}f^7(a)+\cdots\right]+\\
&+\frac{t^2}{1\cdot 2}\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\frac{1}{560}f^8(a)+\cdots\right]+\\
&+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f^3(a)-\frac{1}{4}f^5(a)+\frac{7}{120}f^7(a)-\cdots\right]+\\
&+\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[f^4(a)-\frac{1}{6}f^6(a)+\cdots\right]+\\
&+\frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left[f^5(a)-\frac{1}{3}f^7(a)+\cdots\right]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}\ (*)$$

de unde rezultă că

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{da}&=\frac{1}{h}\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\cdots\right],\\
\frac{d^2f}{da^2}&=\frac{1}{h^2}\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\cdots\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(XIII)}$$

Uneori trebuie să se afle valorile derivatelor pentru valori intermediare ale argumentului x sau pentru valori $a+ht$, corespunzătoare unor valori fracţionale ale variabilei t. În acest scop, este suficient să se deriveze formula

$$f(a+th)=f(a)+\frac{th}{1}\cdot\frac{df(a)}{da}+\frac{t^2h^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2f(a)}{da^2}+\frac{t^3h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3f(a)}{da^3}+\cdots,$$

Scanned with OKEN Scanner

în raport cu litera t, obținîndu-se:

$$\frac{df(a+th)}{dt} = h\frac{df(x)}{dx} = h\frac{df}{da} + \frac{h^2t}{1}\cdot\frac{d^2f}{da^2} + \frac{h^3t^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3f(a)}{da^3} + \cdots,$$

de unde rezultă

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{da} + \frac{ht}{1}\cdot\frac{d^2f}{da^2} + \frac{h^2t^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3f}{da^3} + \cdots;$$

Înlocuind pe

$$\frac{df}{da},\quad \frac{d^2f}{da^2}\cdots$$

prin expresiile lor (XIII), găsim:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{df(a+th)}{dt} = \frac{1}{h}\left[f^1(a) + tf^2(a) + \frac{3t^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}f^3(a) + \right.$$

$$\left. + \frac{4t^3-2t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4(a) + \frac{5t^4-15t^2+4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^5(a) + \cdots\right]. \qquad \text{(XIIIa)}$$

Observînd că

$$f^1(a) = f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{4}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \cdots,$$

$$f^2(a) = f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \cdots$$

etc. și substituind în formula precedentă, obținem următoarea formulă:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{h}\left[f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \frac{2t+1}{4\cdot 2}f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \frac{4t^3+6t^2-2t-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \cdots\right]. \qquad \text{(XIIIb)}$$

În același fel, exprimînd pe $f^1(a)$, $f^2(a)$ etc. prin diferențele în raport cu argumentul $a+\frac{1}{2}h$, am găsi formula:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{h}\left[f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \frac{2t-1}{1\cdot 2}f^2\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \frac{4t^3-6t^2-2t+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \cdots\right]. \qquad \text{(XIIIc)}$$

Formule asemănătoare pot fi alcătuite și pentru derivatele de ordinul al doilea, derivînd formulele (XIIIa), (XIIIb), (XIIIc) în raport cu litera t; astfel, vom avea de exemplu :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[f^2\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \frac{6t-3}{1\cdot 2\cdot 3}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{12t^2-12t-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \cdots\right]. \qquad \text{(XIIId)}$$

Pentru a obţine formule aplicabile la calculul integralelor care să fie analoge cu formulele lui Laplace, dar în care să se folosească notaţiile lui Encke şi Gauss, vom integra formula (*); obţinem:

$$\int f(a+th)\,dt = C + tf(a) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left[f^1(a) - \frac{1}{6}f^3(a) + \frac{1}{30}f^5(a) + \cdots\right] +$$
$$+ \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f^2(a) - \frac{1}{12}f^4(a) + \frac{1}{90}f^6(a) - \frac{1}{560}f^8(a) + \cdots\right] +$$
$$+ \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[f^3(a) - \frac{1}{4}f^5(a) + \frac{7}{120}f^7(a) - \cdots\right] +$$
$$+ \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left[f^4(a) - \frac{1}{6}f^6(a) + \cdots\right] +$$
$$+ \frac{t^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left[f^5(a) - \frac{1}{3}f^7(a) + \cdots\right] + \cdots$$

Substituind în locul lui t valorile $+\frac{1}{2}$ şi $-\frac{1}{2}$ şi luînd diferenţa, obţinem:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f(a) + \frac{1}{24}\left[f^2(a) - \frac{1}{12}f^4(a) + \frac{1}{90}f^6(a) - \cdots\right] +$$
$$+ \frac{1}{1920}\left[f^4(a) - \frac{1}{6}f^6(a) + \cdots\right] + \cdots =$$
$$= f(a) + \frac{1}{24}f^2(a) - \frac{17}{5760}f^4(a) + \frac{367}{967\,680}f^6(a) - \cdots \qquad (*)$$

În acelaşi fel, găsim:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{8}f^1(a) +$$
$$+ \frac{1}{48}f^2(a) - \frac{7}{384}f^3(a) - \frac{17}{11\,520}f^4(a) + \frac{163}{46\,080}f^5(a) + \cdots \qquad (**)$$

Din schema diferenţelor avem:

$$f^1(a) = \frac{1}{2}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right),$$
$$\frac{1}{2}f^2(a) = \frac{1}{2}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{2}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right),$$

şi prin urmare

$$f^1(a) = f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{2}f^2(a).$$

În același fel rezultă:

$$f^3(a) = f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{2}f^4(a),$$

$$f^5(a) = f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{2}f^6(a),$$

. . . . . .

în virtutea cărui fapt ultima formulă se scrie în felul următor:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{8}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{24}f^2(a) - \frac{7}{384}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right) +$$

$$+ \frac{11}{1440}f^4(a) + \frac{163}{46\,080}f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \frac{191}{120\,960}f^6(a) + \cdots \qquad (1)$$

Deoarece este indiferent care argument este considerat ca fiind cel inițial, urmează că, înlocuind în formulele (*) și (1) a prin $a+ih$, vom obține:

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+ih) + \frac{1}{24}f^2(a+ih) - \frac{17}{5760}f^4(a+ih) +$$

$$+ \frac{367}{967\,680}f^6(a+ih) - \cdots, \qquad (2)$$

$$\int_i^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = \frac{1}{2}f(a+ih) + \frac{1}{8}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{1}{24}f^2(a+ih) -$$

$$- \frac{7}{384}f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{11}{1440}f^4(a+ih) + \cdots \qquad (3)$$

Aceste două formule, împreună cu formulele (*) și (**), dau posibilitatea să se alcătuiască expresia integralelor funcției $f(a+th)$ cu limitele inferioare de integrare 0 și $\frac{1}{2}$ și cele superioare i și $i+\frac{1}{2}$.

În adevăr,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} + \cdots + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}.$$

Avem însă

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f(a) + \frac{1}{24}f^2(a) - \frac{17}{5760}f^4(a) + \cdots,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+h) + \frac{1}{24}f^2(a+h) - \frac{17}{5760}f^4(a+h) + \cdots,$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+2h) + \frac{1}{24}f^2(a+2h) - \frac{17}{5760}f^4(a+2h) + \cdots,$$

. . . . . .

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+ih) + \frac{1}{24}f^2(a+ih) - \frac{17}{5760}f^4(a+ih) + \cdots$$

şi, prin urmare,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = [f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+ih)] + \frac{1}{24}[f^2(a)+$$

$$+ f^2(a+h)+\cdots+f^2(a+ih)] - \frac{17}{5760}[f^4(a)+f^4(a+h)+\cdots+f^4(a+ih)]+\cdots$$

Însă, deoarece

$$f^2(a) = f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right) - f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right),$$

$$f^2(a+h) = f^1\left(a+\frac{3}{2}h\right) - f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right),$$

. . . . . .

$$f^2(a+ih) = f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - f^1\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right],$$

rezultă că

$$f^2(a) + f^2(a+h) + \ldots + f^2(a+ih) = f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right).$$

Tot astfel,

$$f^4(a) + f^4(a+h) + \ldots + f^4(a+ih) = f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right),$$

. . . . . .

de unde obținem, în sfîrșit:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+ih)\,dt = [f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)]+$$

$$+\frac{1}{24}\left[f^1\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)-f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)\right]-$$

$$-\frac{17}{5760}\left[f^3\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)-f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)\right]+$$

$$+\frac{367}{967\,680}\left[f^5\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)-f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)\right]-\ldots. \qquad \text{(XIV)}$$

Observînd că

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} = \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \int_{i}^{i+\frac{1}{2}},$$

găsim, în virtutea formulelor (XIV) și (3),

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+ht)\,dt = [f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)]-$$

$$-\frac{1}{2}f(a+ih)-\frac{1}{12}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+$$

$$+\frac{1}{24}f^2(a+ih)+\frac{11}{720}f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{11}{1440}f^4(a+ih)+\ldots$$

$$\ldots-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\frac{367}{967\,680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots$$

Observînd însă că

$$f^2(a+ih)=f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^1\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right],$$

$$f^4(a+ih)=f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^3\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right],$$

. . . . . .

și totodată

$$f^1(a+ih)=\frac{1}{2}\left[f^1\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)+f^1\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\right],$$

$$f^3(a+ih)=\frac{1}{2}\left[f^3\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)+f^3\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\right],$$

. . . . . .

Scanned with OKEN Scanner

rezultă, după substituire în formula precedentă:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+ht)\,dt = [f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)] -$$

$$-\frac{1}{2}f(a+ih)-\frac{1}{12}f^1(a+ih)+\frac{11}{720}f^3(a+ih)-\frac{191}{60\,480}f^5(a+ih)+\cdots$$

$$\ldots-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\frac{367}{967\,680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots \qquad \text{(XV)}$$

Dacă vrem să obţinem integrale la care limita inferioară să fie 0, vom scrie:

$$\int_0^{i+\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0},$$

iar, în virtutea formulei (XV), făcînd $i=0$, avem:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+ht)\,dt = \frac{1}{2}f(a)-\frac{1}{12}f^1(a)+\frac{11}{720}f^3(a)-\frac{191}{60\,480}f^5(a)+\ldots+K_1,$$

unde

$$K_1 = -\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\frac{367}{967\,680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots,$$

$$\int_0^{i+\frac{1}{2}} f(a+ht)\,dt = [f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)]+$$

$$+\frac{1}{24}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{17}{5760}f^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+$$

$$+\frac{367}{967\,680}f^5\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+\ldots+C_1, \qquad \text{(XVI)}$$

şi

$$C_1 = -\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{12}f^1(a)-\frac{11}{720}f^3(a)+\frac{191}{60\,480}f^5(a)-\cdots$$

Tot astfel, în virtutea formulei

$$\int_0^{i} = \int_{-\frac{1}{2}}^{i} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0},$$

vom obţine formula următoare

$$\int_0^{i} f(a+ht)\,dt = \left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+(i-1)h)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}f(a+ih)\right]-\frac{1}{12}[f^1(a+ih)-f^1(a)]+$$

$$+\frac{11}{720}[f^3(a+ih)-f^3(a)]-\frac{191}{60\,480}[f^5(a+ih)-f^5(a)]+\cdots \qquad \text{(XVII)}$$

Observăm că pentru a obține integrala $\int_a^{a+ih} f(x)\,dx$ este de ajuns să ne folosim de relația:

$$\int_a^{a+ih} f(x)\,dx = h\int_0^i f(a+ht)\,dt.$$

§ 73. Prin analogie cu formarea diferențelor și notația lor s-a introdus, după propunerea lui Gauss și Encke, o notație convențională a sumelor, după schema tabelei 34.

Tabela 34

Argumentele	Sumele de odinul al doilea	Sumele de ordinul întîi	Funcțiile
$a-4h$	$f_2(a-4h)$		
	$f_2\left(a-\frac{7}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{7}{2}h\right)$	
$a-3h$	$f_2(a-3h)$	$f_1(a-3h)$	$f(a-3h)$
	$f_2\left(a-\frac{5}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$	$f\left(a-\frac{5}{2}h\right)$
$a-2h$	$f_2(a-2h)$	$f_1(a-2h)$	$f(a-2h)$
	$f_2\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f\left(a-\frac{3}{2}h\right)$
$a-h$	$f_2(a-h)$	$f_1(a-h)$	$f(a-h)$
	$f_2\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)=C_1$	$f\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
a	$f_2(a)=C_2$	$f_1(a)$	$f(a)$
	$f_2\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
$a+h$	$f_2(a+h)$	$f_1(a+h)$	$f(a+h)$
	$f_2\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f\left(a+\frac{3}{2}h\right)$
$a+2h$	$f_2(a+2h)$	$f_1(a+2h)$	$f(a+2h)$
	$f_2\left(a+\frac{5}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{5}{2}h\right)$	$f\left(a+\frac{5}{2}h\right)$
$a+3h$	$f_2(a+3h)$	$f_1(a+3h)$	$f(a+3h)$
	$f_2\left(a+\frac{7}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{7}{2}h\right)$	
$a+4h$	$f_2(a+4h)$		

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obţine numerele arătate în tabela 34, se procedează în felul următor: se egalează $f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$ cu o constantă arbitrară C_1 (vom indica mai jos cum trebuie aleasă această constantă), se adaugă apoi la valoarea lui $f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$ valoarea $f(a)$, care este situată la dreapta şi mai jos, iar suma obţinută

$$f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f(a)=C_1+f(a)$$

se notează prin $f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$, scriind-o în faţa argumentului fictiv $a+\frac{1}{2}h$; la numărul obţinut $f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$ se adaugă numărul care stă la dreapta şi mai jos, şi anume $f(a+h)$, şi punînd

$$f_1\left(a+\frac{3}{2}h\right)=f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f(a+h),$$

se scrie acest număr în faţa argumentului fictiv $a+\frac{3}{2}h$. Continuînd în acelaşi fel, se completează întreaga jumătate inferioară a coloanei intitulată „Sumele de ordinul întîi" prin valorile care sînt scrise cu litere obişnuite.

Pentru a obţine jumătatea superioară a acestei coloane, se ia din nou numărul $C_1=f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$ şi se *scade* din el numărul $f(a-h)$, care stă la dreapta şi mai sus, iar diferenţa obţinută

$$C_1-f(a-h)=f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)-f(a-h)$$

se notează prin $f_1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$ şi se scrie în faţa argumentului fictiv $a-\frac{3}{2}h$; luînd numărul $f_1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$, se scade din el numărul situat la dreapta şi mai sus, adică $f(a-2h)$, iar diferenţa obţinută se notează cu $f_1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$ şi se scrie în faţa argumentului fictiv $a-\frac{5}{2}h$ etc.

Exact în acelaşi fel vom proceda cu numerele f_2, şi începînd cu valoarea arbitrară $C_2=f_2(a)$, vom alcătui toate sumele de ordinul al doilea, corespunzătoare argumentelor a, $a+h$, $a+2h$,... şi $a-h$, $a-2h$,...; toate aceste numere sînt scrise cu litere obişnuite.

Apoi luăm, ca şi în cazul diferenţelor, mediile aritmetice între fiecare pereche de numere învecinate din aceeaşi coloană, scriindu-le în intervale, aşa cum s-a arătat, prin caractere aldine. Evident că am putea continua aceasta pînă la sume de orice ordin; de obicei nu sînt însă necesare decît sumele pînă la ordinul al doilea.

Din însuşi felul în care a fost alcătuită tabela 34 se poate observa că în raport cu sumele de ordinul al doilea sumele de ordinul întîi nu reprezintă

altceva decît primele lor diferenţe, iar în raport cu sumele de ordinul întîi, funcţiile înseşi sînt diferenţele de ordinul întîi şi, prin urmare, diferenţele de ordinul al doilea în raport cu sumele de ordinul al doilea.

Cu aceste notaţii convenţionale, pentru această metodă de formare a sumelor, este evident că:

$$C_1 + f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+ih) = f_1\left[a + \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right],$$

$$C_1 - [f(a) + f(a-h) + f(a-2h) + \ldots + f(a-ih)] = f_1\left[a - \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right].$$

Tot astfel, în virtutea egalităţii

$$f_1(a+ih) = \frac{1}{2} f_1\left[a + \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{1}{2} f_1\left[a + \left(i-\frac{1}{2}\right)h\right],$$

vom avea următoarea relaţie:

$$f_1(a+ih) = C_1 + f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots$$
$$\cdots + f[a+(i-1)h] + \frac{1}{2} f(a+ih)$$

şi exact la fel

$$f_1(a-ih) =$$
$$= C_1 - \left[f(a) + f(a-h) + f(a-2h) + \ldots + f(a-(i-1)h) + \frac{1}{2} f(a-ih)\right].$$

Convenind a lua constanta C_1 astfel încît să reprezinte ansamblul tuturor termenilor constanţi (adică, ca aceştia să nu depindă de indicele i), vedem că formulele (XIV), (XV), (XVI), (XVII) se scriu în felul următor:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f_1\left[a + \left(i-\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{1}{24} f^1\left[a + \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] -$$
$$- \frac{17}{5760} f^3\left[a + \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{357}{967\,680} f^5\left[a + \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \cdots, \quad \text{(XIV')}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+th)\,dt = f_1(a+ih) - \frac{1}{12} f^1(a+ih) + \frac{11}{720} f^3(a+ih) -$$
$$- \frac{191}{60\,480} f^5(a+ih) + \cdots, \quad \text{(XV')}$$

unde la alcătuirea sumei trebuie să se ia:

$$C_1 = -\frac{1}{24} f^1\left(a - \frac{1}{2}h\right) + \frac{17}{5760} f^3\left(a - \frac{1}{2}h\right) - \frac{367}{967\,680} f^5\left(a - \frac{1}{2}h\right) + \cdots$$

Tot astfel vom avea, în cazul cînd limita inferioară este egală cu zero:

$$\int_0^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f_1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{1}{24}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] -$$

$$-\frac{17}{5760}f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{367}{967\,680}f^5\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+\cdots, \quad \text{(XVI')}$$

$$\int_0^{i} f(a+th)\,dt = f_1(a+ih) - \frac{1}{12}f^1(a+ih) + \frac{11}{720}f^3(a+ih) -$$

$$-\frac{191}{60\,480}f^5(a+ih)+\cdots, \quad \text{(XVII')}$$

știind că în acest din urmă caz trebuie să se ia la formarea sumei:

$$C_1 = -\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{12}f^1(a) - \frac{11}{720}f^3(a) + \frac{191}{60\,480}f^5(a) - \cdots$$

În același fel se obțin, pentru o integrală dublă, următoarele formule. Pentru limita inferioară egală cu $-\frac{1}{2}$, vom avea

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{t} f(a+ht)\,dt = f_2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{1}{24}f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] +$$

$$+\frac{17}{1920}f^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{367}{193\,536}f^4\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+\cdots, \quad \text{(XVIII)}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{t} f(a+ht)\,dt = f_2(a+ih) + \frac{1}{12}f(a+ih) - \frac{1}{240}f^2(a+ih) +$$

$$+\frac{31}{60\,480}f^4(a+ih) - \cdots, \quad \text{(XIX)}$$

știind că la formarea sumelor trebuie să se ia pentru C_1 și C_2 următoarele valori:

$$C_1 = -\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right) + \frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right) - \frac{367}{967\,680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\cdots,$$

$$C_2 = +\frac{1}{24}f(a-h) - \frac{17}{5760}[2f^2(a-h)+f^2(a)] +$$

$$+\frac{367}{967\,680}[3f^4(a-h)+2f^4(a)]+\cdots$$

Atunci însă cînd limita inferioară de integrare este 0, formulele vor fi:

$$\int_0^{i+\frac{1}{2}} dt \int_0^t f(a+ht)\,dt = f_2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{1}{24} f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] +$$

$$+\frac{17}{1920} f^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{367}{193\,536} f^4\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \cdots, \qquad \text{(XX)}$$

$$\int_0^i dt \int_0^t f(a+ht)\,dt = f_2(a+ih) + \frac{1}{12} f(a+ih) - \frac{1}{240} f^2(a+ih) +$$

$$+\frac{31}{60\,480} f^4(a+ih) - \cdots, \qquad \text{(XXI)}$$

și la formarea sumelor trebuie să se ia valorile inițiale

$$f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right) = C_1 = -\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f^1(a) - \frac{11}{720} f^3(a) + \frac{191}{60\,480} f^5(a) - \cdots$$

și

$$f_2(a) = C_2 = -\frac{1}{12} f(a) + \frac{1}{240} f^2(a) - \frac{31}{60\,480} f^4(a) + \cdots$$

Se înțelege de la sine că integrala dublă cu variabila x se reduce la integrala cu variabila t cu ajutorul formulei

$$\int_a^{a+ih} dx \int_a^x f(x)\,dx = h^2 \int_0^i dt \int_0^t f(a+th)\,dt;$$

relații analoge fiind valabile și pentru alte limite de integrare.

Aceste formule se folosesc în cazurile cînd metodele indicate în cap. III pentru cazul integralelor cu limita superioară variabilă — și care dau, după cum se observă ușor, primii termeni ai acestei formule — devin insuficiente pentru precizia care trebuie să fie atinsă. Aceasta se întîmplă, de exemplu, în astronomie la calculul perturbațiilor. Aceste formule reprezintă în orice caz o completare firească pentru formulele din cap. III, permițîndu-ne să evaluăm eroarea pe care o comitem folosindu-ne de ele.

§ 74. Vom da acum cîteva exemple de aplicare a acestor formule. Să luăm mai întîi exemplul din § 67, presupunînd, prin urmare, că sînt cunoscuți logaritmii numerelor din 10 în 10 unități și că vrem să îi cunoaștem din unitate în unitate, între 1000 și 1010.

După cum am văzut, avem în acest caz $h=10$; dacă vrem să folosim formula lui Stirling (VII), trebuie să ne aranjăm astfel, încît numărul 1000 să corespundă valorii $t=0$, de unde rezultă că trebuie să se folosească logaritmii numerelor care preced și urmează lui 1000; adică

980... 2,9912261,
990... 2,9956352,
1000... 3,0000000,
1010... 3,0043214,
1020... 3,0086002;

tabela diferențelor va fi atunci tabela 35.

Tabela 35

x	t	$f(x)$	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$
980	—2	2,9912261			
			0,0044091		
990	—1	2,9956352		—0,0000443	
			0,0043648		0,0000009
1000	0	3,0000000	0,0043431	—0,0000434	0,00000085
			0,0043214		0,0000008
1010	1	3,0043214		—0,0000426	
			0,0042788		
1020	2	3,0086002			

Completăm tabela 35 prin mediile aritmetice care corespund valorii $t=0$ și care sînt singurele de care vom avea nevoie.

Astfel, în formula lui Stirling

$$f(a+th) = f(a) + \frac{t}{1} f^1(a) + \frac{t^2}{1\cdot 2} f^2(a) + \frac{(t+1)\,t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3} f^3(a)$$

vom avea:

$$a = 1000,\ h = 10,\ f(a) = 3{,}0000000,\ f^1(a) = 0{,}0043431,$$
$$f^2(a) = -0{,}0000434 \text{ și } f^3(a) = 0{,}00000085,$$

iar calculul se efectuează așa cum este arătat în tabela 36.

Tabela 36

t	(x)	$tf^1(a)$	$\frac{1}{2} t^2 f^2(a)$	$\frac{t(t^2-1)}{6} f^3(a)$	$f(x)$
0	1000	0	—	—	3,0000000
0,1	1001	0,00043431	—0,00000022	—0,00000000	3,0004341
0,2	1002	0,00086862	—0,00000087	—0,00000001	3,0008677
0,3	1003	0,00130293	—0,00000196	—0,00000002	3,0013009
0,4	1004	0,00173724	—0,00000348	—0,00000005	3,0017337
0,5	1005	0,00217155	—0,00000544	—0,00000005	3,0021661
0,6	1006	0,00260586	—0,00000782	—0,00000005	3,0025980
0,7	1007	0,00304017	—0,00001065	—0,00000005	3,0030295
0,8	1008	0,00347448	—0,00001389	—0,00000004	3,0034605
0,9	1009	0,00399879	—0,00001756	—0,00000002	3,0038912
1,0	1010	0,00434310	—0,00002170	—0,00000000	3,0043410

Se vede că rezultatul obținut este același ca și la Newton, iar calculul însuși nu este mai simplu, ci chiar mai complicat, căci numerele $\frac{1}{2} t^2 f^2(a)$ sînt mai mari decît numerele $\frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_0$.

Interpolarea am efectuat-o în intervalul dat astfel, încît mărimea t să varieze între 0 şi 1; atunci însă cînd tabelele se alcătuiesc cu ajutorul interpolării, putem obţine totdeauna ca mărimea t să varieze numai între $-\frac{1}{2}$ şi $+\frac{1}{2}$; astfel, în exemplul dat, trebuie să se ia pentru numerele dintre 1000 şi 1005 ca număr iniţial 1000 şi atunci t ar varia între 0 şi $+\frac{1}{2}$; pentru numerele dintre 1005 şi 1010 se va lua ca iniţial numărul 1010, astfel încît t va varia între 0 şi $-\frac{1}{2}$. Se înţelege că această observaţie se referă în aceeaşi măsură pentru orice formulă de interpolare.

Pentru a uşura calculele există tabele speciale, care dau după valorile argumentului t valorile respective ale factorilor $\frac{t^2}{2}$, $\frac{(t-1)\cdot t\cdot(t-1)}{6}$ etc.

Tabela 37

t	$y=f(t)$	$f^1(t)$	$f^2(t)$	$f^3(t)$	$f^4(t)$	$f^5(t)$
0	0,000					
		1,519				
1	1,519		2,993			
		4,512				
2	6,031	5,939		—0,139		
	9,711	7,366	2,854	0,180	—0,082	
3	13,397	8,683	2,743	—0,221	—0,084	—0,004
	18,397	9,999	2,633	—0,264	—0,086	+0,009
4	23,396	11,162	2,480	—0,307	—0,075	+0,021
	29,559	12,325	2,326	—0,340	—0,065	+0,011
5	35,721	13,302	2,140	—0,372	—0,064	+0,002
	42,860	14,279	1,954	—0,404	—0,063	+0,010
6	50,000	15,038	1,737	—0,435	—0,054	+0,018
	57,899	15,798	1,519	—0,457	—0,045	+0,016
7	65,798	16,318	1,279	—0,480	—0,038	+0,014
		16,837	1,039	—0,495	—0,031	
8	82,635			—0,511		
		17,365	0,528			
9	100,000					

O tabelă de acest fel se află la sfîrşitul acestei cărţi.

Să aplicăm acum formula (VIII) la al doilea exemplu (§ 69), adică la determinarea derivatelor de ordinul întîi şi al doilea pentru funcţiile date grafic sau prin tabele.

Tabela diferenţelor, completată cu mediile aritmetice pentru acel interval de argumente de care avem nevoie, va fi cea din tabela 37 (în notaţiile adoptate):

Pentru calculul vitezelor alcătuim tabela 38, $\frac{1}{30} f^5$ fiind egală cu zero pentru toate valorile lui t cuprinse între limitele considerate.

În acelaşi fel, pentru calculul acceleraţiilor, obţinem tabela 39.

Tabela 38

I	II	III	IV	V
t	f^1	$-\frac{1}{6} f^3$	(II) + (III)	$v = \frac{(II) + (III)}{h}$
2	5,939	0,030	5,969	596,9
3	8,683	0,044	8,727	872,7
4	11,162	0,057	11,219	1121,9
5	13,302	0,067	13,369	1336,9
6	15,038	0,076	15,114	1511,4
7	16,318	0,083	16,401	1640,1

Tabela 39

I	II	III	IV	V
t	f^2	$-\frac{1}{12} f^4$	(II) + (III)	$w = \frac{(II) + (III)}{h^2}$
2	2,854	0,007	2,861	28 610
3	2,633	0,007	2,640	26 400
4	2,326	0,005	2,331	23 310
5	1,954	0,005	1,959	19 590
6	1,519	0,004	1,523	15 230
7	1,039	0,003	1,042	10 420

Compararea acestui calcul cu cel efectuat după formulele lui Newton arată că la prelucrarea înregistrării unei mişcări, cu scopul de a obţine vitezele şi acceleraţiile, trebuie să ne folosim de formula lui Newton pentru momentele apropiate de începutul şi sfîrşitul intervalului, în timp ce pentru cele din mijlocul intervalului este avantajos să ne folosim de formula lui Stirling. Această utilizare combinată a ambelor formule ne dă rezultatele cele mai sigure.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultate și mai bune pot fi obținute dacă ne folosim de formulele (XIIIc) și (XIIId), făcînd în ele $t = \frac{1}{2}$, determinînd astfel vitezele și accelerațiile nu în momentele $0, h, 2h, \ldots$, pentru care există valorile distanțelor, ci în momentele $\frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h$ etc., care se află la mijlocul acestor intervale.

Formulele de integrare prezintă o importanță deosebită pentru rezolvarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale, în special a acelora care se întîlnesc în mecanică și astronomie, din care cauză ele se și numesc „cuadraturi mecanice" și care — după lămuririle de mai sus — nu mai pot prezenta nici un fel de dificultăți.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

§ 75. O mulțime de probleme conduc la ecuații diferențiale; este suficient să amintim dinamica pentru a vedea importanța studiului ecuațiilor diferențiale pentru aplicațiile practice ale matematicii.

În acest curs ne mărginim numai la ecuațiile *ordinare* și la sistemele de astfel de ecuații, fără să ne preocupăm de loc de ecuațiile cu derivate parțiale.

În expunerea acestui capitol se presupun cunoscute acele proprietăți generale fundamentale ale ecuațiilor diferențiale, care se expun în manualele obișnuite de analiză, și, de asemenea, acele clase particulare de ecuații a căror integrare poate fi făcută sub formă finită și prin cuadraturi. Se presupune, de asemenea, cunoscută aplicarea la ecuațiile diferențiale ordinare a metodei variației constantelor.

Așadar, acest capitol cuprinde expunerea metodelor pentru găsirea soluțiilor aproximative ale ecuațiilor diferențiale ordinare.

Metodele pentru o astfel de rezolvare pot fi împărțite în următoarele grupe:

1) dezvoltarea integralei generale în serie după puterile variabilei independente;

2) dezvoltarea integralei generale în serie după puterile parametrilor constanți care figurează în ecuații;

3) dezvoltarea în serie, după puterile constantelor care reprezintă valorile inițiale ale funcției căutate și ale derivatelor acesteia;

4) aplicarea metodei aproximațiilor succesive și a „cuadraturilor mecanice";

5) integrarea numerică aproximativă.

§ 76. Aflarea soluției unei ecuații diferențiale sub formă de serie dezvoltată după puterile variabilei independente se face: *a*) sau folosind seria lui Taylor, cînd dezvoltarea se face după puterile mărimii $x - a$; *b*) sau folosind seria Mac Laurin, cînd dezvoltarea se face chiar după puterile variabilei independente x; *c*) sau folosind metoda coeficienților și exponenților nedeterminați.

Scanned with OKEN Scanner

Toate aceste trei metode sînt de obicei expuse destul de complet și de amănunțit în manuale și de aceea noi ne mulțumim să dăm unele indicații sumare, fără a intra în amănuntele demonstrației faptului că seriile obținute reprezintă realmente soluția ecuației considerate, și fără a cerceta condițiile de convergență ale acestor serii.

În aplicațiile practice este necesar să se facă dezvoltări în serie după puterile variabilei independente, de exemplu, după puterile timpului în problemele de studiu al mișcărilor, atunci cînd trebuie să obținem o soluție satisfăcînd condițiile inițiale date, această soluție fiind cerută numai pentru valorile mici are variabilei. Un astfel de caz are loc, de exemplu, atunci cînd studiem mișcarea unui obuz în interiorul țevii tunului, cînd examinăm reculul unui tun, ieșirea minei dintr-un aruncător și, în general, tot felul de mișcări ce durează un timp foarte scurt.

Aplicarea seriei lui Taylor constă în următoarele: să presupunem că este dată ecuația diferențială

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

în care x este variabila independentă, y — funcția căutată, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ — derivatele lui y în raport cu variabila x; se cere să se reprezinte sub formă de serie dezvoltată după puterile lui $x - a$ soluția acestei ecuații, care satisface următoarele condiții „inițiale", relative la valoarea particulară $x = a$:

pentru $x = a$, mărimea y trebuie să fie egală cu b,
pentru $x = a$, mărimea y' trebuie să fie egală cu b_1,
pentru $x = a$, mărimea y'' trebuie să fie egală cu b_2,
. . . . . .
pentru $x = a$, mărimea $y^{(n-1)}$ trebuie să fie egală cu b_{n-1},

b, b_1, b_2. . . b_{n-1} fiind constante date.

Admițînd că dezvoltarea mărimii y în serie după puterile întregi și pozitive ale lui $x - a$ există, în virtutea seriei lui Taylor putem scrie următoarea egalitate:

$$y = b + b_1\frac{x-a}{1} + b_2\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \cdots + b_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + \\ + y_0^{(n)}\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n} + y_0^{(n+1)}\frac{(x-a)^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)} + \cdots,$$

în care $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$,..., sînt valorile pe care le iau $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, ... pentru $x = a$.

Pentru aflarea acestor valori ne folosim de ecuația diferențială dată, punînd în ea

$$x = a, \quad y = b, \; y' = b_1, \ldots, \; y^{(n-1)} = b_{n-1};$$

obținem:

$$y_0^{(n)} = f(a, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) = c_0 \tag{2}$$

Pentru a afla valoarea derivatelor următoare, derivăm ecuația dată, considerînd în ea pe x ca variabilă independentă, iar pe y și derivatele sale ca funcții de x; atunci vom avea:

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)};$$

punînd aici în loc de $y^{(n)}$ valoarea acesteia din ecuația (1), vedem că $y^{(n+1)}$ se exprimă ca o funcție cunoscută de variabilele x, y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$; fie

$$y^{(n+1)} = f_1(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{3}$$

Procedînd cu această ecuație exact la fel ca înainte, obținem:

$$y^{(n+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

în care dacă înlocuim $y^{(n)}$ prin mărimea sa din ecuația (1), vom avea o ecuație de forma

$$y^{(n+2)} = f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{4}$$

în care f_2 va fi o funcție complet determinată de variabilele ei.

Continuînd să procedăm în acest mod, putem să formăm expresiile lui y și ale derivatelor ei pînă la orice ordin, ca funcții de x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$.

Făcînd apoi în aceste expresii $x = a$ și substituind în loc de y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ acele valori pe care ele trebuie să le ia pentru $x = a$, adică $b, b_1, \ldots, b_{n-1}$, vom obține valorile

$$\begin{aligned} y_0^{(n+1)} &= f_1(a, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) = c_1, \\ y_0^{(n+2)} &= f_2(a, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) = c_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

care înlocuite în expresia lui y vor da seria

$$y = b + b_1 \frac{x-a}{1} + b_2 \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \cdots + b_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} + \\ + c_0 \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + c_1 \frac{(x-a)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} + \cdots$$

Se înțelege de la sine că, dacă ar fi trebuit să facem dezvoltarea după puterile lui x, atunci ar fi trebuit să repetăm considerațiile precedente, punînd $a = 0$.

Exemplu. Fie dată ecuația diferențială a mișcării unui punct:

$$y'' + (1 + 0{,}1t)\, y + 0{,}1y'^2 = 0$$

și pentru $t = 0$ condițiile $y = 1$ m, $y' = 2$ m/s să se dezvolte soluția acestei ecuații în serie după puterile variabilei t și să se găsească amplitudinea primei oscilații.

Rezolvînd ecuația dată în raport cu y'', avem:

$$y'' = -y - 0{,}1ty - 0{,}1\, y'^2. \tag{1}$$

Derivînd această ecuație, obținem:

$$\left.\begin{aligned} y''' &= -y' - 0{,}1(ty' + y) - 0{,}2\, y'y'', \\ y^{IV} &= -y'' - 0{,}1(ty'' + 2y') - 0{,}2(y'y''' + y''^2), \\ y^{V} &= -y''' - 0{,}1(ty''' + 3y'') - 0{,}2(y'y^{IV} + 3y''y'''), \\ y^{VI} &= -y^{IV} - 0{,}1(ty^{IV} + 4y''') - 0{,}2(y'y^{V} + 4y''y^{IV} + 3y'''^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

Din ecuația (1), punînd în loc de t valoarea sa inițială 0 și în loc de y și y' valorile lor inițiale 1 și 2, avem:

$$y_0'' = c_0 = -1{,}4;$$

introducînd această valoare în prima din ecuațiile (*), obținem:

$$y_0''' = c_1 = -1{,}54,$$

după care a doua ecuație (*) dă

$$y_0^{IV} = c_2 = +1{,}224.$$

Apoi, continuînd la fel și mai departe, obținem:

$$y_0^{V} = +0{,}1768,$$

$$y_0^{VI} = -0{,}7308,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Prin urmare,

$$\frac{y_0''}{1\cdot 2} = -0{,}7,\quad \frac{y_0'''}{1\cdot 2\cdot 3} = -0{,}2567,\quad \frac{y_0^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = +0{,}051,$$

$$\frac{y_0^{V}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = +0{,}00147,\quad \frac{y_0^{VI}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = -0{,}00101$$

și deci dezvoltarea căutată, dacă păstrăm numai termenii pînă la t^6, este următoarea:

$$y = y_1 = 1 + 2t - 0{,}7t^2 - 0{,}2567t^3 + 0{,}051t^4 + 0{,}00147t^5 = 0{,}00101t^6.$$

Pentru a găsi amplitudinea primei oscilații, calculăm pe y' și căutăm cea mai mică rădăcină pozitivă a acestei derivate; avem:

$$y_1' = 2 - 1{,}4t - 0{,}77t^2 + 0{,}204t^3 + 0{,}00735t^4 - 0{,}00606t^5.$$

Nu este greu de văzut că rădăcina căutată va fi apropiată de $t = 1$. În adevăr, pentru $t = 1$ vom avea:

$$y_1' = 2{,}211 - 2{,}176 = +0{,}035.$$

Calculăm valoarea corespunzătoare a lui y_1'':

$$y_1'' = -1{,}4 - 1{,}54t + 0{,}612t^2 + 0{,}0294t^3 - 0{,}0303t^4; \qquad (2)$$

vom avea

$$y_1'' = -2{,}339.$$

Prin urmare, valoarea căutată a lui t este

$$t_1 = 1 + \frac{0{,}035}{2{,}339} = 1{,}015,$$

iar valoarea corespunzătoare a lui y_1 este

$$Y_1 = 1 + 2{,}030 - 0{,}721 - 0{,}267 + 0{,}053 + 0{,}001 - 0{,}001 = 2{,}095.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a verifica cu ce aproximație verifică mărimea găsită y ecuația, calculăm valorile lui y, y', y'' pentru momentele

$$t = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\cdots;\ 1{,}0$$

și le înlocuim pe acestea în ecuația dată.

Acest calcul îl vom face ca în tabela 40:

Tabela 40

t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,0000	0,0000
0,2	0,04	0,008	0,0016	0,0003	0,0001
0,3	0,09	0,027	0,0081	0,0024	0,0007
0,4	0,16	0,064	0,0256	0,0102	0,0041
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156
0,6	0,36	0,216	0,1296	0,0778	0,0467
0,7	0,49	0,343	0,2401	0,1681	0,1176
0,8	0,64	0,512	0,4096	0,3277	0,2621
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,5905	0,5314
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,0000	1,0000

Apoi, vom alcătui schemele de calcul pentru y (tabela 41), y' (tabela 42) și y'' (tabela 43).

Tabela 41

Calculul lui y

t	$1+2\,t$	$-0{,}7\,t^2$	$-0{,}2567\,t^3$	$+0{,}051\,t^4$	$+0{,}00147\,t^5$	$-0{,}00101\,t^6$	y
0,0	1,000	0	0	0	0	0	1,000
0,1	1,200	—0,007	—0,000	0,000	0	0	1,193
0,2	1,400	—0,028	—0,002	0,000	0	0	1,370
0,3	1,600	—0,063	—0,007	0,000	0	0	1,530
0,4	1,800	—0,112	—0,016	0,001	0	0	1,673
0,5	2,000	—0,175	—0,032	0,003	0	0	1,796
0,6	2,200	—0,252	—0,055	0,006	0	0	1,899
0,7	2,400	—0,343	—0,088	0,012	0	0	1,981
0,8	2,600	—0,448	—0,131	0,020	0	0	2,041
0,9	2,800	—0,567	—0,187	0,032	0,001	—0,001	2,079
1,0	3,000	—0,700	—0,257	0,051	0,001	—0,001	2,094
1,015	3,030	—0,721	—0,267	0,053	0,001	—0,001	2,095

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 42

Calculul lui y''

t	$2-1{,}4\ t$	$-0{,}77\ t^2$	$+0{,}204\ t^3$	$+0{,}00735\ t^4$	$-0{,}00606\ t^5$	y''
0	2,000	0	0	0	0	2,000
0,1	1,860	—0,008	0,000	0	0	1,852
0,2	1,720	—0,031	0,002	0	0	1,691
0,3	1,580	—0,069	0,006	0	0	1,517
0,4	1,440	—0,123	0,013	0	0	1,330
0,5	1,300	—0,192	0,026	0	0	1,134
0,6	1,160	—0,277	0,044	0,001	0	0,928
0,7	1,020	—0,378	0,070	0,002	—0,001	0,713
0,8	0,880	—0,493	0,104	0,003	—0,002	0,492
0,9	0,740	—0,624	0,149	0,005	—0,004	0,266
1,0	0,600	—0,770	0,204	0,007	—0,006	0,035
1,015	0,579	—0,793	0,213	0,008	—0,007	0,000

Tabela 43

Calculul lui y''

t	$-(1{,}4+1{,}54\ t)$	$+0{,}612\ t^2$	$+0{,}0294\ t^3$	$-0{,}00303\ t^4$	y''
0	—1,400	0	0	0	—1,400
0,1	—1,554	0,006	0,000	0,000	—1,548
0,2	—1,708	0,025	0,000	0,000	—1,683
0,3	—1,862	0,055	0,001	0,000	—1,806
0,4	—2,016	0,098	0,002	—0,001	—1,917
0,5	—2,170	0,153	0,004	—0,002	—2,015
0,6	—2,324	0,220	0,006	—0,004	—2,102
0,7	—2,478	0,300	0,010	—0,007	—2,175
0,8	—2,632	0,391	0,015	—0,012	—2,238
0,9	—2,786	0,495	0,021	—0,020	—2,290
1,0	—2,940	0,612	0,029	—0,030	—2,329
1,015	—2,962	0,630	0,031	—0,032	—2,333

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 44

Verificare

t	y_1	$0{,}1\ ty_1$	$-0{,}1\ y_1'^2$	y'' după ecuația (1)	y_1'' după ecuația (2)	$f(t)=y''-y_1''$
0,0	1,000	0,000	0,400	—1,400	—1,400	0,000
0,1	1,193	0,012	0,344	—1,549	—1,548	—0,001
0,2	1,370	0,027	0,287	—1,684	—1,683	—0,001
0,3	1,530	0,046	0,230	—1,806	—1,806	0,000
0,4	1,673	0,067	0,177	—1,917	—1,917	0,000
0,5	1,796	0,090	0,129	—2,015	—2,015	0,000
0,6	1,899	0,114	0,086	—2,099	—2,102	+0,003
0,7	1,981	0,139	0,050	—2,170	—2,175	+0,005
0,8	2,041	0,163	0,025	—2,229	—2,238	+0,009
0,9	2,079	0,187	0,007	—2,273	—2,290	+0,017
1,0	2,094	0,209	0,000	—2,303	—2,329	+0,026
1,015	2,095	0,212	0,000	—2,307	—2,333	+0,026

Astfel, vedem că în limitele exactității calculelor noastre, mărimea

$$y = y_1 = 1 + 2t - 0{,}7t^2 - 0{,}2567t^3 + 0{,}051t^4 + 0{,}00147t^5 - 0{,}00101t^6$$

verifică ecuația pînă la momentul $t = 0{,}5$ după care începe o abatere sistematică. Examinînd cu atenție calculele, vedem că termenii de grad superior nu exercită influență asupra valorii lui y, dar influențează valoarea lui y' și mai mult încă în y''.

De aceea, dacă am adăuga la y încă un termen de forma kt^7, atunci în expresia lui y'' am obține termenul $42\,kt^5$; prin urmare, luînd

$$42k = +\ 0{,}026$$

sau

$$k = +\ 0{,}0006,$$

vom obține pentru y, y' și y'' corecțiile date în tabela 45.

Prin urmare, mărimea

$$y = 1 + 2t - 0{,}7t^2 - 0{,}2567t^3 + 0{,}051t^4 + 0{,}00147t^5 - 0{,}00101t^6 + 0{,}0006t^7$$

va satisface ecuația în intervalul considerat de valori ale lui t cu exactitatea dorită, atît în ceea ce privește însăși funcția y, cît și în ceea ce privește primele ei două derivate.

Acest exemplu ilustrează destul de bine în ce mod putem folosi dezvoltarea funcției y în serie Taylor sau în serie Mac Laurin în aplicațiile la problemele practice.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 45

t	$\delta y=0{,}0006\,t^7$	$\delta y'=0{,}0042\,t^6$	$\delta y''=0{,}0252\,t^5$
0	0	0	
0,1	0	0	
0,2	0	0	
0,3	0	0	
0,4	0	0	
0,5	0	0	0,001
0,6	0	0	0,002
0,7	0	0	0,004
0,8	0	0,001	0,008
0,9	0	0,002	0,015
1,00	0,001	0,004	0,025

§ 77. Metoda coeficienților și a exponenților nedeterminați se aplică cu destulă comoditate la ecuațiile liniare sau la ecuațiile care pot fi reduse la acestea, ca de exemplu ecuația lui Bessel, ecuația lui Ricatti etc., care se tratează de altfel destul de amănunțit în cursurile de analiză; de aceea, noi nu ne vom opri asupra acestei metode.

§ 78. Dezvoltarea în serie a soluției unei ecuații diferențiale după puterile constantelor ce figurează în ecuație, se aplică în cazul în care ecuația cuprinde două genuri de termeni: 1) principali și 2) secundari, aceștia din urmă caracterizîndu-se prin prezența unor *factori mici* constanți (care nu conțin variabila independentă și nici funcția căutată). Astfel, de exemplu, în problemele privitoare la mișcarea planetelor în jurul soarelui, termenii principali vor proveni din acțiunea soarelui, iar cei secundari din interacțiunea reciprocă a planetelor; în problemele privitoare la mișcarea corpurilor într-un mediu ce opune rezistență acestei mișcări, cînd această rezistență este relativ mică, termenii provenind din rezistență vor fi secundari etc.

Astfel de probleme se numesc de obicei, în mecanică, probleme de „mișcări perturbate", iar termenii secundari amintiți mai sus reprezintă „perturbațiile". De obicei, toate aceste probleme sînt astfel încît, în cazul în care omitem termenii ce reprezintă perturbațiile, cu alte cuvinte egalăm cu zero factorii constanți ce-i caracterizează, atunci ecuațiile admit o soluție exactă.

Vom ilustra esența metodei în cazul unei ecuații simple care se referă, de exemplu, la mișcarea rectilinie a unui punct în lungul axei Oy; o astfel de ecuație va fi de forma

$$y'' = f(t, y, y') + \alpha\varphi(t, y, y') + \beta\psi(t, y, y') + \gamma\omega(t, y, y') + \cdots,$$

unde $f(t, y, y')$ reprezintă totalitatea termenilor principali, iar restul termenilor sînt perturbații, α, β, γ fiind factorii constanți mici; în majoritatea

problemelor cu caracter tehnic, astfel de termeni distincți vor fi în număr de unu, rareori doi.

Așadar, pentru simplificarea raționamentelor și a scrierii, vom considera o ecuație de forma

$$y'' = f(t, y, y') + \alpha\varphi(t, y, y') + \beta\psi(t, y, y') \tag{1}$$

și vom presupune că ecuația

$$y'' = f(t, y, y') \tag{1'}$$

admite soluția exactă

$$y_1 = F_1(t, C_1, C_2).$$

Găsind această soluție, determinăm valorile constantelor arbitrare, folosind condițiile inițiale. Ecuația

$$y = y_1 = F_1(t, C_1, C_2) \tag{*}$$

va reprezenta mișcarea neperturbată. Pentru a găsi perturbațiile, vom pune

$$y = y_1 + \eta_1$$

și vom substitui această mărime în membrul *întîi* al ecuației, iar în membrul al doilea, în termenul $f(t, y, y')$, vom pune în locul lui y mărimea $y_1 + \eta_1$, iar în termenii ce conțin factorii α și β vom pune $y = y_1$; atunci, mărginindu-ne la termeni de ordinul întîi în η_1 și η_1', vom avea:

$$\begin{aligned} f(t, y, y') &= f(t, y_1 + \eta_1, y'_1 + \eta_1') = \\ &= f(t, y_1, y_1') + \eta_1 f'_{y_1}(t, y_1, y_1') + \eta_1' f'_{y'_1}(t, y_1, y_1'). \end{aligned} \tag{2}$$

Înlocuind în această expresie pe y_1 prin valoarea sa (*), vom obține o expresie de forma

$$f(t, y, y') = f(t, y_1, y_1') + \eta_1 f_1(t) + \eta_1' g_1(t),$$

unde $f_1(t)$ și $g_1(t)$ vor fi funcții cunoscute de timp; exact la fel, substituind în expresiile $\varphi(t, y, y')$ și $\psi(t, y, y')$ în loc de y valoarea sa y_1, obținem pe acestea ca funcții de timpul t, adică funcții de forma $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$. Prin urmare, pentru determinarea mărimii η_1 vom avea, în baza ecuației (1'), ecuația:

$$\eta_1'' = \eta_1 f_1(t) + \eta_1' g_1(t) + \alpha\varphi_1(t) + \beta\psi_1(t).$$

Particularitatea acestei ecuații constă în faptul că ea este *liniară*, iar dacă punem

$$\eta_1 = \alpha p + \beta q,$$

atunci ea se descompune în două ecuații:

$$\left.\begin{aligned} p'' - p' \cdot g_1(t) - p \cdot f_1(t) &= \varphi_1(t), \\ q'' - q' \cdot g_1(t) - q \cdot f_1(t) &= \psi_1(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

În toate cazurile în care ecuația (1') este ea însăși liniară și cu coeficienți constanți, ecuațiile (3) vor fi și ele *cu coeficienți constanți* și, prin urmare, integralele lor generale se vor putea calcula imediat. Dacă ecuația dată este neliniară, atunci, în general, ecuațiile (3), deși liniare, sînt cu coeficienți variabili.

În majoritatea problemelor tehnice, referitoare la cercetarea mișcării oscilatorii a unui sistem oarecare, vom avea primul caz, adică ecuațiile (3) vor fi liniare cu coeficienți constanți, astfel încît integrarea lor nu prezintă dificultăți.

Așadar, după ce aflăm pe

$$\eta_1 = \alpha p + \beta q,$$

vom obține

$$y = y_1 + \eta_1 = y_1 + \alpha p + \beta q = y_2.$$

Dacă este necesară o a doua aproximație, atunci punem

$$y = y_2 + \eta_2$$

și procedăm la fel ca înainte, reținînd în dezvoltarea funcției $f(t, y, y')$ termenii de gradul al doilea în η_1 și η_1', adică pe cei cu α^2, $\alpha\beta$ și β^2, iar în dezvoltările funcțiilor $\varphi(t, y, y')$ și $\psi(t, y, y')$ numai termenii de gradul întîi în α și β, deoarece acești termeni se înmulțesc cu α și β; atunci, pentru determinarea mărimii η_2 obținem o ecuație de forma

$$\eta_2'' = \eta_2 f_2(t) + \eta_2' g_2(t) + \alpha^2 \varphi_2(t) + \alpha\beta\omega_2(t) + \beta^2\psi_2(t),$$

iar mărimea η_2 o vom obține sub forma

$$\eta_2 = \alpha^2 p_1(t) + \alpha\beta r_1(t) + \beta^2 q_1(t)$$

etc.

Vom ilustra acest proces prin același *exemplu*:

$$y'' + (1 + 0{,}1t)\, y + 0{,}1y'^2 = 0.$$

Scriem această ecuație astfel

$$y'' + y + \alpha t\, y + \beta y'^2 = 0; \qquad (1)$$

atunci $\alpha = 0{,}1$ și $\beta = 0{,}1$ vor fi acei parametri mici după ale căror puteri va trebui să facem dezvoltarea.

Prima aproximație y_1 este dată de ecuația

$$y_1'' + y_1 = 0.$$

Integrala ei generală este

$$y_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Condițiile inițiale: pentru $t = 0$, $y_1 = 1$ și $y' = 2$, conduc la

$$1 = C_1,\ 2 = C_2$$

și, prin urmare,

$$y_1 = \cos t + 2 \sin t.$$

Punem

$$y = y_1 + \eta_1$$

și substituind în ecuația (1) scrisă sub forma:

$$y'' = -(y + \alpha t\, y + \beta y'^2),$$

obținem

$$y_1'' + \eta_1'' = -(y_1 + \eta_1 + \alpha t y_1 + \beta y_1'^2),$$

de unde, pentru determinarea lui η_1, rezultă ecuația

$$\eta_1'' + \eta_1 = -\alpha t(\cos t + 2\sin t) - \beta(2\cos t - \sin t)^2$$

și, prin urmare, pentru determinarea funcțiilor p și q din expresia

$$\eta_1 = -\alpha p - \beta q$$

vor folosi ecuațiile

$$p'' + p = t\cos t + 2t\sin t,$$

$$q'' + q = 4\cos^2 t - 4\sin t\cos t + \sin^2 t =$$

$$= 2(1 + \cos 2t) - 2\sin 2t + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t - 2\sin 2t$$

cu condițiile inițiale: pentru $t = 0$ trebuie ca să avem $p = 0$ și $p' = 0$; $q = 0$ și $q' = 0$.

Din aceste ecuații rezultă

$$p = C_3\cos t + C_4\sin t - \frac{1}{2}t^2\cos t + \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t^2\sin t + \frac{1}{2}t\sin t;$$

determinînd constantele arbitrare C_3 și C_4 prin folosirea condițiilor inițiale, obținem

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0$$

și, prin urmare,

$$p = -\frac{1}{2}t^2\cos t + \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t^2\sin t + \frac{1}{2}t\sin t.$$

În mod analog,

$$q = C_3\cos t + C_4\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t + \frac{5}{2},$$

iar pentru determinarea constantelor arbitrare avem

$$0 = C_3 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}, \quad C_3 = -2,$$

$$0 = C_4 + \frac{4}{3}, \qquad C_4 = -\frac{4}{3},$$

astfel încît

$$q = -2\cos t - \frac{4}{3}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t + \frac{5}{2},$$

și mărimea η_1 va fi:

$$\eta_1 = -\alpha p - \beta q = \left(\frac{1}{20}t^2 - \frac{1}{40}t + \frac{1}{5}\right)\cos t -$$

$$-\left(\frac{1}{40}t^2 + \frac{1}{20}t - \frac{2}{15}\right)\sin t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{15}\sin 2t - \frac{1}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod absolut analog se poate face dezvoltarea și mai departe.
Pentru verificarea rezultatelor, calculăm după formula

$$y = y_1 + \eta_1$$

valoarea lui y corespunzătoare momentului $t = \frac{1}{2}$ s. Cu privire la $\cos t$ și $\sin t$ trebuie să ne amintim că t reprezintă aici un număr abstract, care exprimă raportul dintre intervalul de timp de la momentul inițial pînă la momentul considerat și intervalul de timp considerat ca unitate, adică o secundă, prin urmare în toate formulele va trebui să punem

$$t = \frac{\frac{1}{2}\,\text{s}}{1\,\text{s}} = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare,

$$y_1 = \cos t + 2\sin t = \cos\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2} = \cos\ (28°38',9) + 2\sin\ (28°38',9),$$

și deci nu trebuie scris așa cum greșit scriu uneori astronomii începători

$$y_1 = \cos t + 2\sin t = \cos\left(\frac{1}{2}\,\text{s}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}\,\text{s}\right) =$$

$$= \cos\ (0°0'7'',5) + 2\sin\ (0°0'7'',5),$$

deoarece 1 s de timp $= 15''$ de arc.

Astfel, vom avea:

$$y_1 = \cos 28°38',9 + 2\sin 28°38',9 = 0{,}8776 + 0{,}9588 = 1{,}8364.$$

Apoi,

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{80} + \frac{1}{5}\right)\cos\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{40} - \frac{2}{15}\right)\sin\frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{20}\cos 1 - \frac{1}{15}\sin 1 - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{5}\cos\ (28°38',9) + \frac{49}{480}\sin\ (28°38',9) +$$

$$+ \frac{1}{20}\cos\ (57°17',7) - \frac{1}{15}\sin\ (57°17',7) - \frac{1}{4} =$$

$$= +\ 0{,}1755 + 0{,}0490 + 0{,}0270 -\ 0{,}0561\ - 0{,}2500 = -\ 0{,}0546,$$

și, prin urmare,

$$y = y_1 + \eta_1 = 1{,}8364 - 0{,}0546 = 1{,}7818.$$

După cum se vede, există o diferență apreciabilă față de valoarea mai exactă 1,796; această diferență este pe deplin justificată, deoarece mărimile α^2 și β^2, pe care le-am neglijat, se exprimă în sutimi.

Prin urmare, pentru a obține o aproximație mai bună, ar fi necesar să continuăm dezvoltarea; în noua dezvoltare s-ar adăuga termeni de forma

$$at^3\cos t,\ bt^3\sin t,\ c\cos 3t,\ d\sin 3t,\ e\cos 4t,\ f\sin 4t.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici devine explicabil de ce sînt atît de complicate formulele mecanicii cerești, unde se impune considerarea unei astfel de dezvoltări pînă la termeni de ordin superior.

§ 79. Alcătuirea ecuațiilor care determină mărimile $p, q, \ldots$, poate fi simplificată dacă procedăm astfel: punem

$$y = y_1 + \alpha p_1 + \beta q_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha\beta r_2 + \beta^2 q_2 + \cdots;$$

alcătuim expresiile y' și y'^2, în care reținem termenii al căror ordin este mai mic cu o unitate decît ordinul pînă la care dorim să mergem în dezvoltarea mărimii y; astfel, de exemplu, dacă dorim să ne mărginim numai la termeni de ordinul al doilea, vom avea:

$$y'^2 = y_1'^2 + 2(\alpha p_1' + \beta q_1')\, y_1'$$

și înlocuind expresia lui y în ecuația dată, în care reținem numai termenii pînă la ordinul al doilea, vom obține:

$$y_1'' + \alpha p_1'' + \beta q_1'' + \alpha^2 p_2'' + \alpha\beta r_2'' + \beta^2 q_2'' +$$
$$+ (y_1 + \alpha p_1 + \beta q_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha\beta r_2 + \beta^2 q_2) + \alpha t(y_1 + \alpha p_1 + \beta q_1) +$$
$$+ \beta(y_1'^2 + 2\alpha p_1' y_1' + 2\beta q_1' y_1') = 0.$$

Grupînd termenii cu aceleași puteri ale lui α și β, adică punînd această ecuație sub forma

$$(y_1'' + y_1) + \alpha(p_1'' + p_1 + t y_1) + \beta(q_1'' + q_1 + y_1'^2) + \alpha^2(p_2'' + p_2 + p_1 t) +$$
$$+ \beta^2(q_2'' + q_2 + 2q_1' y_1') + \alpha\beta(r_2'' + r_2 + t q_1 + 2p_1' y_1') = 0,$$

vedem că ea se descompune în următoarele ecuații:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= 0, \\ p_1'' + p_1 &= -t y_1, \\ q_1'' + q_1 &= -y_1'^2, \\ p_2'' + p_2 &= -t p_1, \\ q_2'' + q_2 &= -2q_1' y_1', \\ r_2'' + r_2 &= -t q_1 - 2p_1' y_1', \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

iar condițiile inițiale vor fi:

pentru $t = 0$ trebuie să avem

$$y_1 = 1, \quad y_1' = 2;$$
$$p_1 = 0; \quad p_1' = 0; \quad q_1 = 0; \quad q_1' = 0;$$
$$p_2 = 0, \quad p_2' = 0; \quad r_2 = 0, \quad r_2' = 0; \quad q_2 = 0, \quad q_2' = 0.$$

Evident, prima ecuație din sistemul (*) ne dă valoarea lui y_1; înlocuind această valoare în a doua și a treia ecuație, găsim pe p_1 și q_1; înlocuindu-le pe acestea în următoarele trei ecuații, găsim pe p_2, q_2, r_2 și astfel obținem dezvoltarea noastră pînă la termeni de ordinul al doilea relativ la α și β.

§ 80. În § 78 am văzut că în cazul general, ecuațiile sistemului analog cu sistemul (*), deși vor fi liniare, nu vor avea coeficienți constanți. Ecuațiile

liniare cu coeficienți variabili se întîlnesc în multe probleme ale fizicii matematice și unele dintre ele au fost studiate în mod foarte detaliat, de exemplu ecuațiile de următoarele tipuri:

1. Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0.$$

2. Ricatti

$$y'' - a^2x^m y = 0.$$

3. Ecuația seriei hipergeometrice

$$x\,(1 - x)\, y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x]\, y' - \alpha\beta y = 0.$$

Nu ne vom opri la aceste ecuații, dar vom indica o metodă generală, aplicabilă pentru a obține soluții valabile într-un interval relativ mic de variație a lui x, ceea ce de altfel se și cere în multe probleme ale științelor aplicate.

Astfel, fie dată ecuația diferențială liniară

$$y'' + Py' + Qy = 0, \tag{1}$$

unde P și Q sînt funcții cunoscute de variabila independentă x.

Să arătăm în primul rînd că această ecuație poate fi redusă la forma

$$z'' = Rz;$$

în adevăr, punînd

$$y = uz,$$

vom avea

$$y' = u'z + z'u, \quad y'' = u''z + 2u'z' + uz''$$

și ecuația noastră va fi

$$uz'' + (2u' + Pu)\, z' + (u'' + Pu' + Qu)\, z = 0;$$

să alegem acum pe u astfel, încît

$$2u' + Pu = 0,$$

adică

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int_0^x P\,dx}.$$

Atunci, vom avea

$$u'' + Pu' + Qu = u\left(Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right)$$

și, prin urmare, punînd

$$-R = Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2,$$

obținem pentru determinarea lui z ecuația

$$z'' = Rz, \tag{2}$$

la care trebuie să adăugăm condițiile inițiale următoare: pentru $x = a$ se cere ca

$$z = A, \quad z' = B.$$

Ecuația (2), scrisă în modul următor

$$d(z') = Rz\,dx,$$

dă prin integrare

$$z' = \frac{dz}{dx} = B + \int_a^x Rz\,dx$$

și printr-o a doua integrare,

$$z = A + B(x - a) + \int_a^x dx \int_a^x Rz\,dx. \tag{3}$$

Vom pune pentru a prescurta scrierea

$$z_1 = A + B(x - a)$$

și apoi, înlocuind sub semnul integralei, în ecuația (3), pe z prin expresia sa

$$z = z_1 + \int_a^x dx \int_a^x Rz\,dx, \tag{*}$$

obținem ecuația

$$z = z_1 + \int_a^x dx \int_a^x Rz_1\,dx + \int_a^x dx \int_a^x R\,dx \int_a^x dx \int_a^x Rz\,dx.$$

Continuînd să procedăm în același mod, vom obține:

$$z = z_1 + \int_a^x dx \int_a^x Rz_1\,dx + \int_a^x dx \int_a^x R\,dx \int_a^x dx \int_a^x Rz_1\,dx +$$

$$+ \int_a^x dx \int_a^x R\,dx \int_a^x dx \int_a^x R\,dx \int_a^x dx \int_a^x Rz\,dx$$

. . . . . .

Dacă convenim să notăm astfel operația efectuată:

$$\int_a^x dx \int_a^x Rz_1\,dx = \Phi_1(z_1),$$

aceeași operație repetată de două ori, adică

$$\int_a^x dx \int_a^x R\,dx \int_a^x dx \int_a^x Rz_1\,dx = \Phi_1[\Phi_1(z_1)] = \Phi_2(z_1),$$

și, în general,

$$\Phi_1[\Phi_n(z_1)] = \Phi_{n+1}(z_1),$$

atunci egalitatea precedentă se scrie astfel:

$$z = z_1 + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_1) + \Phi_3(z_1) + \cdots + \Phi_{n-1}(z_1) + \Phi_n(z). \tag{4}$$

Astfel, vedem că dacă pentru n tinzînd la infinit avem

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) = 0,$$

pentru orice valoare x situată în intervalul considerat, atunci z se reprezintă printr-o serie ai cărei termeni se obțin fiecare din precedentul, prin înmulțirea acestuia cu R și apoi printr-o dublă integrare de la a la x.

Se poate ajunge la același rezultat și pe altă cale; punem

$$z = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n + \cdots \qquad (**)$$

și căutăm să ordonăm în așa mod, încît să putem forma din termenul precedent din această serie termenii următori; ecuația (2) dă

$$\varphi_0'' + \varphi_1'' + \varphi_2'' + \cdots + \varphi_n'' + \cdots = R(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n + \cdots).$$

Dacă seria (**) este astfel încît la creșterea indefinită a lui n mărimea φ_n să tindă către zero pentru *orice* valoare a lui x din intervalul considerat, și la capetele sale, atunci vom putea să satisfacem ecuația precedentă și condițiile inițiale, alegînd pe $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ astfel încît să avem

$$\varphi_0'' = 0,\ \varphi_1'' = R\varphi_0,\ \varphi_2'' = R\varphi_1,\ \varphi_3'' = R\varphi_2, \ldots,\ \varphi_n'' = R\varphi_{n-1}, \ldots$$

cu condițiile inițiale: pentru $x = a$ se cere ca

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= A, & \varphi_0' &= B,\\
\varphi_1 &= 0, & \varphi_1' &= 0,\\
\varphi_2 &= 0, & \varphi_2' &= 0,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
\varphi_{n-1} &= 0, & \varphi_{n-1}' &= 0,\\
\varphi_n &= 0, & \varphi_n' &= 0,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Atunci vom avea

$$\varphi_0 = A + B(x - a).$$

$$\varphi_1 = \int_a^x dx \int_a^x R\varphi_0\, dx,$$

$$\varphi_2 = \int_a^x dx \int_a^x R\varphi_1\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n = \int_a^x dx \int_a^x R\varphi_{n-1}\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Să arătăm acum că mărimea φ_n, definită prin acest șir de astfel de operații, tinde realmente către limita 0 cînd $n \to +\infty$.

În adevăr, să considerăm că, atît timp cît x este cuprins în intervalul considerat, adică între a și X, unde X este acea valoare maximă pentru care ne este cerută soluția ecuației, funcția $R(x)$ nu depășește în valoare absolută o mărime pozitivă finită M. În cazul în care A și B, a și X sînt finite, z_1 evident nu depășește în valoare absolută un anumit număr N.

Atunci, prin ipoteză,

$$|\varphi_0| < N,$$

prin urmare

$$|\varphi_1| < \int_a^x dx \int_a^x NM\, dx,$$

adică

$$|\varphi_1| < NM \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2}.$$

Apoi avem

$$|\varphi_2| < \int_a^x dx \int_a^x NM^2 \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} dx,$$

adică

$$|\varphi_2| < NM^2 \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

continuînd în același mod, vedem că vom avea

$$|\varphi_n| < NM^n \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}; \tag{5}$$

astfel încît pentru orice valori *finite* ale diferenței $x - a$ și ale numerelor N și M, limita cantității $|\varphi_n|$ este zero.

Rămîne să arătăm că la o creștere indefinită a lui n restul seriei (4), care reprezintă pe z, sau a seriei echivalente (*), adică $\Phi_n(z)$, are ca limită pe zero. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că, în intervalul considerat pentru $x - a$, z nu depășește în valoare absolută un anumit număr finit μ.

În adevăr, să admitem că există acest număr μ, astfel încît

$$|z| < \mu;$$

atunci vom avea

$$|\Phi(z)| < \mu M^n \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n};$$

și odată cu aceasta, suma

$$z_1 + \Phi_1(z_1) + \cdots + \Phi_{n-1}(z_1)$$

va fi în valoare absolută mai mică decît suma

$$N\left[1 + \frac{M(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{M^2(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{M^{n-1}(x-a)^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-2)}\right],$$

adică mai mică decît

$$\frac{N}{2}\left[e^{\sqrt{M}(x-a)} + e^{-\sqrt{M}(x-a)}\right].$$

Notînd cu P cea mai mare valoare a acestei expresii în intervalul considerat, vedem că va avea loc inegalitatea

$$|z| < P + \mu \frac{(x-a)^{2n} \cdot M^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}.$$

Aceasta înseamnă că trebuie să luăm pe μ astfel încît să avem

$$\mu > P + \mu \frac{(x-a)^{2n} \cdot M^n}{1 \cdot 2 \ldots 2n}.$$

Pentru n suficient de mare putem totdeauna obține

$$\frac{M^n (x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \ldots 2n} < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv arbitrar de mic, dat. Aceasta înseamnă că este suficient să luăm

$$\mu > \frac{P}{1-\varepsilon} \tag{5'}$$

pentru ca inegalitățile

$$|z| < \mu,$$

$$|\Phi_n(z)| < \mu M^n \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n} \tag{5''}$$

să fie satisfăcute. O dată cu aceasta, formulele (5) și (5'') evaluează eroarea cu care determinăm pe z, oprindu-ne la un termen dat al seriei.

După cum se vede, acest procedeu cere numai efectuarea operației

$$\int_a^x dx \int_a^x R v_k dx.$$

În paragraful precedent am indicat un procedeu simetric și determinat, cu ajutorul căruia această operație se face, atunci cînd ea nu este realizabilă pe cale analitică.

Din cele de mai sus apare clară importanța pe care o prezintă metoda „cuadraturilor mecanice“ pentru calculul perturbațiilor în problemele de astronomie și, o dată cu aceasta, devine clară originea acestui termen.

§ 81. Metoda de dezvoltare a soluției unei ecuații diferențiale în serie după puterile valorilor inițiale se aplică în problemele de mecanică în care se cercetează mișcarea oscilatorie a unui sistem și este evident că aceste oscilații rămîn mici; în fiecare problemă particulară trebuie să definim ceea ce se înțelege prin cuvîntul „mic“.

Astfel, de exemplu, în problema oscilațiilor pendulului, prin cuvîntul amplitudine „mică“ se înțelege o amplitudine θ, pentru care, cu gradul de aproximație cerut, este satisfăcută relația

$$\sin \theta = \theta,$$

adică amplitudinea pentru care mărimea $\frac{\theta^3}{6}$ poate fi neglijată față de θ

(sau $\frac{\theta^2}{6}$ față de 1). Astfel, de exemplu, dacă ne-am mulțumi cu aproximația de o miime, atunci $\frac{\theta^2}{6}$ trebuie să rămînă mai mic decît $\frac{1}{1000}$, cu alte cuvinte trebuie să avem $\theta < \frac{1}{13}$ sau, exprimat în grade, $\theta < 5°$ etc. În problema oscilațiilor elastice ale unui sistem, prin mică se înțelege o deformație care nu depășește „limita de proporționalitate", care de obicei este inferioară „limitei de elasticitate", deoarece numai în aceste condiții sînt valabile ecuațiile liniare care se folosesc etc.

Vom ilustra esența acestei metode prin exemplul tipic al oscilațiilor pendulului (sau ale unei nave) într-un mediu a cărui rezistență se exprimă prin formula

$$F = av + bv^2,$$

unde v este viteza corpului mobil.

În acest caz, avem de-a face cu o ecuație de forma

$$u'' + 2hu' + n^2u \pm ku'^2 = 0,$$

unde semnul (+) din fața termenului în u'^2 trebuie luat dacă $u' > 0$, iar semnul (−) dacă $u' < 0$; condițiile inițiale sînt: pentru $t = 0$ trebuie să avem $u = \alpha$ și $u' = 0$, unde α se presupune pozitiv, astfel încît în cursul primei oscilații u' va fi negativ; ecuația de mișcare va fi:

$$u'' + 2hu' + n^2u - ku'^2 = 0$$

Mărimea α se presupune mică.

Punem

$$u = \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \cdots,$$

unde φ_1, φ_2 sînt funcții necunoscute de timpul t. Această ecuație o scriem, deoarece este evident că dacă $\alpha = 0$, atunci și u va fi în mod constant egal cu 0.

Formăm expresiile:

$$u' = \alpha\varphi_1' + \alpha^2\varphi_2' + \cdots,$$
$$u'' = \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + \cdots$$

Apoi

$$u'^2 = \alpha^2\varphi_1'^2 + \cdots$$

și substituim în ecuația dată, care devine atunci

$$\alpha(\varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1) + \alpha^2(\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 - k\varphi_1'^2) + \cdots = 0$$

Deoarece această ecuație trebuie să aibă loc pentru orice valoare a lui α, va trebui să avem în particular

$$\varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1 = 0,$$
$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = k\varphi_1'^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile inițiale pe care le verifică funcțiile φ_1, φ_2 pentru $t = 0$ trebuie să fie

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_1' = 0,$$
$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Deoarece, de obicei, h este mic în comparație cu n, din prima ecuație, punînd

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2},$$

găsim

$$\varphi_1 = e^{-ht}(C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t).$$

În virtutea condițiilor inițiale vom avea

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{h}{n_1},$$

astfel încît

$$\varphi_1 = e^{-ht}\left(\cos n_1 t + \frac{h}{n_1} \sin n_1 t\right).$$

Atunci, pentru determinarea lui φ_2, vom avea ecuația

$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = \frac{kn^4}{2n_1^2} e^{-2ht}(1 - \cos 2n_1 t).$$

Integrala generală a acestei ecuații este

$$\varphi_2 = e^{-ht}(C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t) + \frac{kn^2}{2n_1^2} e^{-2ht} + e^{-2ht}(B \cos 2n_1 t + D \sin 2n_1 t).$$

unde B și D se determină din ecuațiile care se obțin înlocuind pe φ_2 prin mărimea

$$e^{-2ht}(B \cos 2n_1 t + D \sin 2n_1 t),$$

iar expresia obținută se egalează cu expresia din membrul al doilea

$$-\frac{kn^4}{2n_1^2} e^{-2ht} \cos 2n_1 t;$$

vom avea:

$$(3n^2 - 4h^2) B + 4hn_1 D = \frac{kn^4}{2n_1^2},$$
$$4hn_1 B - (3n^2 - 4h^2) D = 0,$$

de unde rezultă

$$B = \frac{kn^4}{2n_1^2} \cdot \frac{3n^2 - 4h^2}{(3n^2 - 4h^2)^2 + 16h^2 n_1^2},$$
$$D = \frac{kn^4}{2n_1^2} \cdot \frac{4hn_1}{(3n^2 - 4h^2)^2 + 16h^2 n_1^2};$$

din condițiile inițiale rezultă:

$$C_3 = -(A + B), \quad C_4 = \frac{h}{n_1}(A + B) - 2D.$$

În acest mod va fi găsită o soluție cu aproximație pînă la mărimile de gradul al doilea în α, valabilă pentru mișcarea înspre amplitudini descrescătoare, adică pînă la acea valoare a variabilei t pentru care vom avea pentru prima dată $u' = 0$. Această valoare va fi aproximativ egală cu $\frac{\pi}{n_1}$.

Mai departe, studiul făcut nu se mai referă la integrarea ecuației, pe care am ales-o numai pentru clarificarea metodei.

§ 82. Relativ la toate aceste dezvoltări în serie, atît după puterile parametrilor mici care figurează în ecuații, ca și după puterile condițiilor inițiale, este neapărat necesar să se aibă în vedere următorul fapt: neglijînd în ecuație termenii care conțin parametrul α la puteri mai mari decît un număr k determinat, nu putem fi siguri că în integrala generală vor figura termenii pînă la același ordin și nu pînă la un ordin mai mic.

Ultimul caz poate avea loc, de exemplu, atunci cînd determinăm o integrală particulară a ecuației diferențiale cu coeficienți constanți, la care membrul al doilea va fi de forma $l \cos pt$. În acest caz, se ajunge la împărțirea ultimei expresii cu $n^2 - p^2$ și dacă $n^2 - p^2$ este o cantitate foarte mică, de exemplu de ordinul c în raport cu α, atunci termenul integralei generale corespunzător termenului $l \cos pt$, unde l se presupune de ordinul $k - 1$ relativ la α, nu va fi de ordinul $k - 1$, ci de ordinul $k - 1 - c$.

Exemplul următor ilustrează în mod clar acest fapt.

Să presupunem că trebuie cercetate micile oscilații ale unui pendul sferic. Luînd ca origine a coordonatelor punctul de suspensie, orientînd axa z pe verticală în jos și notînd cu N tensiunea firului și cu l lungimea lui, avem următoarele ecuații de mișcare ale pendulului:

$$mx'' = -N\frac{x}{l}, \quad my'' = -N\frac{y}{l}, \quad mz'' = mg - N\frac{z}{l}, \tag{1}$$

iar ecuația de legătură este

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

sau

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}. \tag{2}$$

Condițiile inițiale vor fi: pentru $t = 0$ trebuie să avem

$$x = a, \quad x' = 0,$$
$$y = 0, \quad y' = c.$$

Spunînd „mici oscilații", trebuie să înțelegem prin aceasta că rapoartele $\frac{a}{l}$ și $\frac{c\tau}{l}$, unde τ este timpul în care se efectuează o oscilație completă a pendulului, sînt mărimi mici, după puterile cărora putem dezvolta în serie soluția noastră.

Din ecuația (2) rezultă că

$$z = l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2l^2} + \cdots\right), \tag{*}$$

adică în primă aproximație se poate lua $z = l$; atunci, ultima dintre ecuațiile (1) va da

$$N = mg,$$

iar primele două iau forma

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0, \qquad y'' + \frac{g}{l}y = 0,$$

de unde rezultă, luînd în considerație condițiile inițiale

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos nt, \\ y &= b\sin nt, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde

$$n = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{\tau},$$

astfel încît

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

și

$$b = \frac{c}{n}.$$

Astfel, avem impresia că soluția obținută este exactă pînă la termenii de ordinul *întîi* relativ la a și b, deoarece în ecuația (*) au fost neglijați termenii începînd cu ordinul *al doilea* în raport cu a și b.

O astfel de concluzie nu este însă justificată.

În adevăr, dacă înlocuim în ecuația (*) x și y prin expresiile lor (3), vom avea

$$\begin{aligned} z &= l\left(1 - \frac{a^2\cos^2 nt}{2l^2} - \frac{b^2\sin^2 nt}{2l^2}\right) = \\ &= l\left[1 - \frac{1}{4l^2}(a^2 + a^2\cos 2nt + b^2 - b^2\cos 2nt)\right] = \\ &= l\left(1 - \frac{a^2+b^2}{4l^2} - \frac{a^2-b^2}{4l^2}\cos 2nt\right). \end{aligned}$$

Notînd, pentru prescurtare,

$$\alpha^2 = \frac{a^2+b^2}{4l^2}, \quad \beta^2 = \frac{a^2-b^2}{4l^2},$$

obținem

$$z = l(1 - \alpha^2 - \beta^2\cos 2nt); \tag{**}$$

aici am folosit dinadins notațiile α^2 și β^2 pentru a indica faptul că aceste mărimi sînt de ordinul *al doilea* relativ la cele considerate de noi ca mici; este de la sine înțeles că presupunem $b < a$.

Din ecuația (**) rezultă

$$z'' = 4n^2 l\beta^2\cos 2nt = 4g\beta^2\cos 2nt,$$

ceea ce, după înlocuirea în ecuația

$$mz'' = mg - \frac{Nz}{l},$$

ne dă

$$4mg\beta^2 \cos 2nt = mg - N(1 - \alpha^2 - \beta^2 \cos 2nt)$$

și, prin urmare,

$$N = mg \frac{1 - 4\beta^2 \cos 2nt}{1 - (\alpha^2 + \beta^2 \cos 2nt)} =$$

$$= mg(1 - 4\beta^2 \cos 2nt)(1 + \alpha^2 + \beta^2 \cos 2nt + \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2nt + \beta^4 \cos^2 2nt + \cdots) =$$

$$= mg\left[1 + \left(\alpha^2 + \alpha^4 + \frac{3}{2}\beta^4\right) - (3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2)\cos 2nt - \frac{3}{2}\beta^4 \cos 4nt + \cdots\right] = mg[1 + f(t)]$$

unde este clară semnificația notației adoptate.

În acest mod, primele două ecuații (1) vor fi:

$$x'' + n^2[1 + f(t)]x = 0$$

și

$$y'' + n^2[1 + f(t)]y = 0,$$

în care, punînd

$$n_1^2 = n^2\left(1 + \alpha^2 + \alpha^4 - \frac{3}{2}\beta^4\right),$$

le vom scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} x'' + n_1^2 x &= n^2\left[(3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2)\cos 2nt + \frac{3}{2}\beta^4 \cos 4nt\right]x, \\ y'' + n_1^2 y &= n^2\left[(3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2)\cos 2nt + \frac{3}{2}\beta^4 \cos 4nt\right]y. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dacă substituim în loc de x și y, în membrii ai doilea ai acestor ecuații, valorile lor din prima aproximație

$$x = a \cos nt$$

și

$$y = b \sin nt,$$

atunci la prima vedere s-ar părea că, deoarece membrii ai doilea ai acestor ecuații sînt de ordinul *al treilea* în raport cu α și β, ei ar putea fi neglijați, dacă dorim să avem numai termeni de ordinul întîi și al doilea ; în realitate lucrurile nu se prezintă însă astfel.

În adevăr, observînd că

$$\cos 2nt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\cos 3nt + \frac{1}{2}\cos nt,$$

$$\cos 2nt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}\sin 3nt - \frac{1}{2}\sin nt,$$

$$\cos 4nt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\cos 5nt + \frac{1}{2}\cos 3nt,$$

$$\cos 4nt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}\sin 5nt - \frac{1}{2}\sin 3nt,$$

scriem ecuațiile precedente astfel:

$$x'' + n_1^2 x = a\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2\right) n^2 \cos nt +$$

$$+ a\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{4}\beta^4\right) n^2 \cos 3nt + \frac{3}{4} a\beta^4 n^2 \cos 5nt,$$

$$y'' + n_1^2 y = -b\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2\right) n^2 \sin nt +$$

$$+ b\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4\right) n^2 \sin 3nt + \frac{3}{4} b\beta^4 n^2 \sin 5nt$$

și, prin urmare, vom avea

$$x = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + a \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} n^2 \cos nt +$$

$$+ a \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{4}\beta^4}{9n^2 - n_1^2} n^2 \cos 3nt + \frac{3}{4} a \frac{\beta^4}{25n^2 - n_1^2} n^2 \cos 5nt,$$

$$y = C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t - b \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} n^2 \sin nt +$$

$$+ b \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4}{9n^2 - n_1^2} n^2 \sin 3nt + \frac{3}{4} b \frac{\beta^4}{25n^2 - n_1^2} n^2 \sin 5nt.$$

Observînd că

$$n_1^2 = n^2\left(1 + \alpha^2 + \alpha^4 - \frac{3}{2}\beta^4\right),$$

vedem că mărimea

$$n_1^2 - n^2 = n^2\alpha^2 + n^2\left(\alpha^4 - \frac{3}{2}\beta^4\right)$$

este o mărime mică de ordinul *al doilea*; de aceea, termenii

$$\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} a \cos nt, \qquad -\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} b \sin nt$$

nu sînt de ordinul *al treilea*, ci de ordinul *întîi* și, prin urmare, chiar în prima aproximație ei nu pot fi neglijați, ci trebuie să fie reținuți.

Astfel, dacă am fi dorit să avem din aceste formule termenii de ordinul *întîi*, atunci ar fi trebuit să scriem

$$x = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} a \cos nt,$$

$$y = C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} b \sin nt$$

Scanned with OKEN Scanner

și să determinăm constantele arbitrare folosind condițiile inițiale; atunci obținem:

$$a = C_1 + \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}a, \quad 0 = C_2,$$

$$0 = C_3, \quad c = bn = n_1 C_4 - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}bn,$$

de unde

$$C_1 = a - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}a = a\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right),$$

$$C_4 = b\frac{n}{n_1}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) = b\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right),$$

și, prin urmare, vom avea:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos n_1 t + \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}a\cos nt, \\ y &= b\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin n_1 t - \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}b\sin nt. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Nu trebuie să credem că relația

$$n_1 = n\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \cdots\right)$$

ne permite să înlocuim pe $n_1 t$ prin nt; timpul t crește indefinit și diferența dintre argumentele $n_1 t$ și nt devine curînd o mărime apreciabilă.

Observăm că caracterul mișcării reprezentate de ecuațiile (5) este complet deosebit de caracterul mișcării reprezentate prin ecuațiile

$$x = a\cos nt, \quad y = a\sin nt.$$

În adevăr, ultimele două ecuații dau pentru traiectoria punctului o elipsă *constantă*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ale cărei axe sînt orientate după axele de coordonate.

Pentru a lămuri caracterul curbei reprezentate de ecuațiile (5), punem

$$k = \frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

atunci ecuațiile (5) se pot scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos n_1 t + 2ak\sin\frac{n_1-n}{2}t\cdot\sin\frac{n_1+n}{2}t, \\ y &= b\sin n_1 t + 2bk\sin\frac{n_1-n}{2}t\cdot\cos\frac{n_1+n}{2}t. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diferența $\frac{n_1-n}{2}$ este, prin ipoteză, foarte mică în comparație cu n sau n_1, deoarece ea este egală cu $\frac{1}{4}\alpha^2 n$. De aceea, dacă argumentul $n_1 t$ variază

cu 2π, atunci argumentul $\frac{n_1 - n}{2} t = \frac{1}{4}\alpha^2 nt$ variază abia cu $\alpha^2 \frac{\pi}{2}$ și în decursul acestui interval de timp curba (6) va fi foarte apropiată de elipsa

$$x = a \cos n_1 t,$$
$$y = b \sin n_1 t,$$

deoarece distanța punctelor corespunzătoare va fi mai mică decît $\frac{\pi}{2}\alpha^2 a$; dar, după ce argumentul $n_1 t$ variază cu 2π, curba (6), spre deosebire de o elipsă, nu se închide, ceea ce înseamnă că bucla obținută va fi apropiată de elipsa amintită, dar nu închisă. Ea se va depărta treptat de elipsă și poate fi asimilată cu urma lăsată de un punct care se mișcă pe această elipsă, în timp ce elipsa se rotește uniform cu o anumită viteză unghiulară.

Pentru a determina acest unghi de rotație trebuie să formăm ecuația

$$xx' + yy' = 0 \tag{7}$$

și să găsim rădăcina ei cea mai apropiată de 2π.

Conform ecuației (5), avem:

$$x' = -(1 - k) a n_1 \sin n_1 t - ank \sin nt,$$
$$y' = (1 + k) b n_1 \cos n_1 t - bnk \cos nt;$$

să punem

$$nt = 2\pi + \varphi;$$

atunci obținem

$$n_1 t = 2\pi + \omega,$$

iar

$$\omega = \varphi + \alpha^2 \pi,$$

și vom avea

$$\cos n_1 t = \cos nt = 1,$$
$$\sin n_1 t = \omega, \quad \sin nt = \varphi,$$

Ecuația (7) va deveni după reduceri:

$$-a^2 [\varphi + (1 - k) \pi\alpha^2] + b^2 [\varphi + (1 + k) \pi\alpha^2] = 0;$$

din ea rezultă că

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\alpha^2 = \frac{\pi}{8}\frac{a^2 + b^2}{l^2}.$$

În acest fel, trecerea prin vîrful buclei (periheliu în astronomie) se produce la momentul în care

$$nt = 2\pi + \frac{\pi}{2}\alpha^2.$$

Coordonatele acestui vîrf vor fi:

$$X = a,$$
$$Y = b [(1 + k) \omega - k\varphi] = b \left[(1 + k) \pi + \frac{\pi}{2}\right] \cdot \alpha^2 = \frac{3}{4} \pi \frac{a^2 b}{l^2},$$

prin urmare, direcția axei buclei ce trece prin acest vîrf, adică unghiul de rotație al elipsei în timpul unei oscilații *complete* a pendulului, va fi

$$\psi = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2}. \tag{8}$$

Elipsa se rotește în *sensul mișcării* pendulului pe ea, deoarece unghiul este

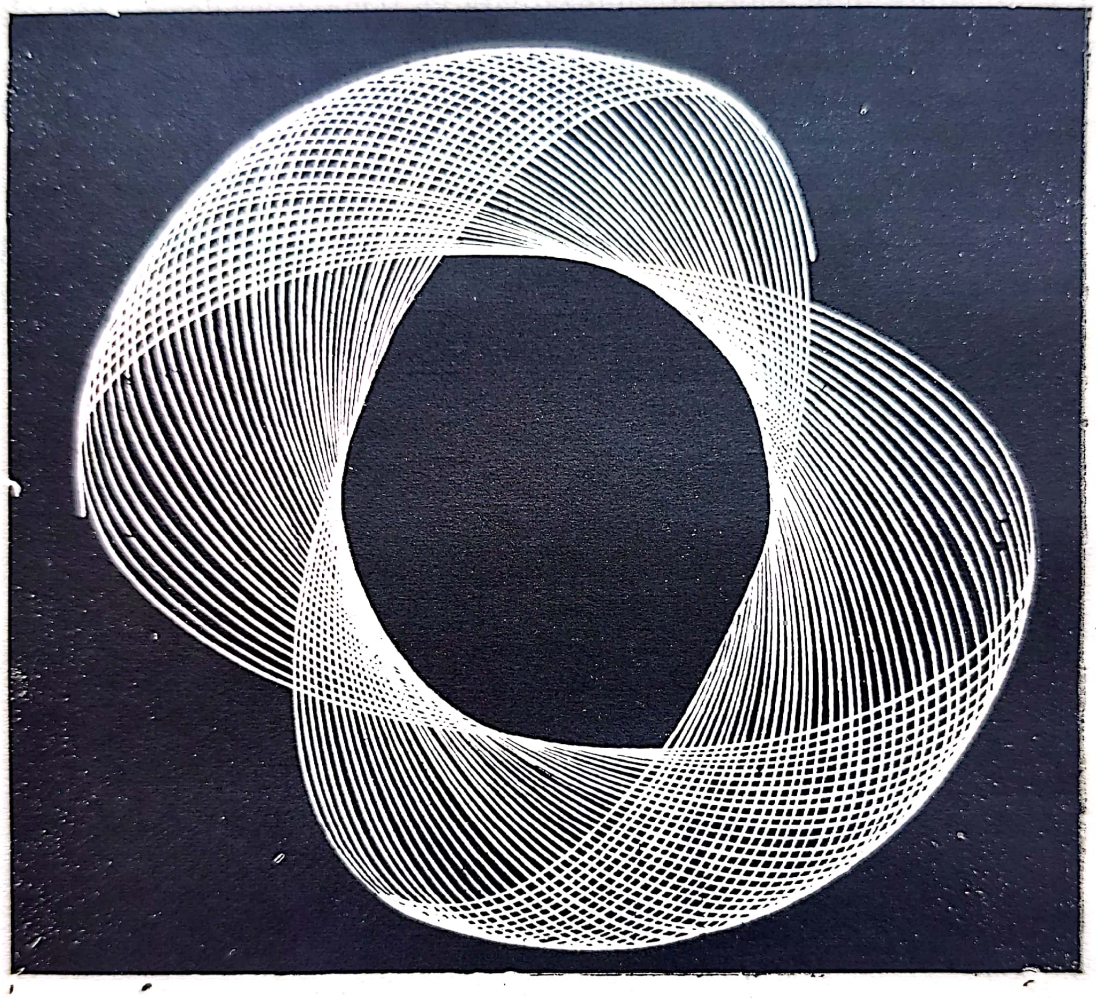

Fig. 67

pozitiv; astfel, proiecția traiectoriei pendulului va avea forma indicată în fig. 67.

Dacă am fi dorit să avem distanța unghiulară dintre două poziții consecutive, maximă și minimă, de elongație atinse de pendul pe sferă, atunci ar fi trebuit să căutăm rădăcina ecuației (7) cea mai apropiată de $\frac{\pi}{2}$, adică să înlocuim în formulele precedente 2π prin $\frac{\pi}{2}$, adică π prin $\frac{\pi}{4}$. Am fi obținut atunci

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\psi = \frac{3}{16}\pi\frac{ab}{l^2}$$

iar unghiul complet ar fi fost

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \psi_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{ab}{l^2}\right);$$

însă

$$\frac{a}{l} = \theta_1, \quad \frac{b}{l} = \theta_2$$

sînt unghiul maxim și unghiul minim de abatere a pendulului de la linia verticală, și formula precedentă se scrie

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{3}{8}\theta_1\theta_2\right]. \qquad (8')$$

Aceasta este forma sub care se dă formula de obicei, pe baza considerării soluției exacte a acestei probleme exprimate în integralele eliptice.

În fig. 67 este reprezentată înregistrarea fotografică a proiecției orizontale a mișcării centrului de greutate al unui pendul sferic, de lungime $l =$ $= 3{,}34$ m, scara figurii fiind 1:10,5.

Această înregistrare, efectuată în anul 1905 în Bazinul experimental al Departamentului maritim de către S. V. Viahirev, a fost obținută în modul următor: de un fir subțire de oțel, de lungime de aproximativ 3,3 m, a fost suspendat un cilindru de plumb cu diametrul și înălțimea egale cu 10 cm și a cărui greutate era de aproximativ 8 kg. De-a lungul axei acestui cilindru s-a proiectat un canal cu diametrul de aproximativ 15 mm și în care a fost fixat un mic bec electric de la o lanternă electrică de buzunar.

La o distanță de aproximativ 2,5 m sub cilindru a fost așezată o cameră fotografică cu obiectivul îndreptat în sus, astfel încît placa să fie orizontală. Cînd pendulul oscilează, imaginea becului se deplasează pe placă și descrie curba dată mai sus, care reprezintă proiecția orizontală a mișcării centrului de greutate a pendulului.

Formula (8) corespunde foarte bine cu experiența. Pentru pendulul a cărui mișcare este reprezentată în fig. 67,

$$l = 3{,}34\,\text{m}.$$

Numărul oscilațiilor din fotografie 41
Unghiul complet de rotație ..... 104°
Unghiul de rotație pentru o oscilație..... $\psi = \frac{101}{41} = 2°{,}54$
La începutul mișcării, în fotografie ..... $a = 65$ mm
La începutul mișcării, în fotografie ..... $b = 32$ mm
La sfîrșitul mișcării, în fotografie ..... $a = 58$ mm
La sfîrșitul mișcării, în fotografie ..... $b = 30$ mm
Scara fotografică 1 : 10,5, față de mărimea naturală.
De aici rezultă:
la începutul mișcării ..... $ab = 2080$
la sfîrșitul mișcării ..... $ab = 1740$
în medie.... $ab = 1910$

Valoarea medie a unghiului de rotație este

$$\psi_0 = \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2} = 135° \cdot \frac{1900}{1\,000\,000} \cdot \left(\frac{10{,}5}{3{,}34}\right)^2 = 2°{,}54;$$

ea corespunde cu experiența mai mult decît ne-am fi putut aștepta.

Am dat această înregistrare pentru a arăta în mod concret în ce măsură corespunde realității soluția obținută, care reprezintă prima aproximație.

În astronomie, dreapta ce unește astrul central cu vîrful traiectoriei descrise în jurul său de un alt astru se numește axa sau linia apsidelor; o mișcare asemănătoare cu cea indicată mai sus o are luna în jurul pămîntului și, realmente, ecuația de forma

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n^2(1 + 2\alpha \cos kt)\, u = 0$$

joacă un rol foarte important în teoria mișcării lunii; am dat exemplul precedent pentru a arăta în mod concret auspra cărui fel de fapte trebuie să ne îndreptăm atenția, atunci cînd dezvoltăm în serie soluțiile ecuațiilor diferențiale.

§ 83. Metoda aproximațiilor succesive, expusă mai sus, atunci cînd este aplicată la integrarea ecuațiilor mișcării perturbate, suferă de neajunsul pe care l-am remarcat în § 78. Acest neajuns constă în faptul că variabila independentă t, care figurează în mișcarea neperturbată numai sub simbolurile sinus și cosinus de diferite argumente ce depind liniar de t, intervine în mișcarea perturbată în afara acestor simboluri, deoarece în soluție figurează termeni de forma

$$(at + bt^2 + ct^3 + \cdots) \cos(nt + \delta).$$

Acești termeni cresc indefinit o dată cu timpul, ceea ce face ca soluția găsită să fie utilă numai pentru valori foarte mici ale lui t.

De aceasta s-au lovit matematicienii din secolul al XVIII-lea, cînd au început să aplice analiza la cercetarea mișcării planetelor și a sateliților acestora din sistemul nostru solar. Laplace și Lagrange au dezvoltat metode destul de generale pentru îndepărtarea acestui neajuns. Cercetările lui Laplace, care au fost expuse pentru prima dată în memorii, care figurează în volumele VIII și IX ale operelor sale complete, au fost prelucrate și incluse în opera sa „Mécanique céleste, în cap. V al cărții a 2-a din vol. I.

Cercetările lui Lagrange se găsesc în vol. V din operele sale complete. („Oeuvres de Lagrange").

Nu vom dezvolta aceste metode generale care nu sînt utilizate la rezolvarea problemelor tehnice din pricina dificultății aplicării lor; ne vom mărgini să dăm un exemplu simplu, prin care va fi ilustrată esența unei alte metode, care este o generalizare și o modificare a metodei expuse de M. V. Ostrogradski în „Мемуарах Академии наук" seria VI, vol. III, 1838, reprodusă și în lucrarea lui Ragleigh, „Teoria sunetului" vol. I, § 67.

Să luăm exemplul lui Ostrogradski, care este dat și la Ragleigh. Se cere să se găsească soluția ecuației

$$y'' + n^2y + \alpha y^3 = 0 \qquad (1)$$

cu condițiile inițiale: pentru $t = 0$, trebuie să avem:

$$y' = 0, \quad y = a.$$

Parametrul α se presupune mic și soluția se dezvoltă în serie după puterile acestui parametru, iar autorii citați se mărginesc să păstreze numai puterea întîi a lui α din această dezvoltare.

Dacă am proceda după cum s-a arătat în § 78, atunci am fi conduși să luăm drept aproximație inițială ecuația:

$$y'' + n^2y = 0,$$

a cărei soluție, ce satisface condițiile inițiale, este

$$y = a \cos nt. \tag{2}$$

Pentru prima aproximație vom avea atunci ecuația

$$y'' + n^2 y = -\alpha a^3 \cos^3 nt, \tag{3}$$

însă

$$\cos^3 nt = \frac{1}{4}\cos 3nt + \frac{3}{4}\cos nt,$$

așa încît ecuația precedentă va fi

$$y'' + n^2 y = -\frac{1}{4}\alpha a^3 \cos 3nt - \frac{3}{4}\alpha a^3 \cos nt, \tag{3'}$$

a cărei integrală generală este

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}\cos 3nt - \frac{3}{8}\frac{\alpha a^3}{n} t \sin nt.$$

Valorile constantelor arbitrare determinate prin condițiile inițiale sînt:

$$C_1 = a - \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}, \quad C_2 = 0,$$

așa încît

$$y = \left(a - \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}\right)\cos nt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}\cos 3nt - \frac{3}{8}\frac{\alpha a^3}{n} t \sin nt. \tag{4}$$

În ultimul termen, timpul t a ieșit de sub semnul sinus, și această formă a soluției este utilă numai pentru valori foarte mici ale lui t, la care însă nu ne putem mărgini în studiul mișcării oscilatorii a punctului, determinată de coordonata y.

Pentru a înlătura neajunsul amintit, să punem

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha, \tag{5}$$

unde c_1 este o constantă deocamdată nedeterminată, pe care o vom folosi după cum se va indica mai jos.

Ecuația (1) ia forma

$$y'' + p^2 y + \alpha y^3 + c_1 \alpha y = 0; \tag{1'}$$

aproximația inițială va fi

$$y = a \cos pt;$$

iar ecuația pentru prima aproximație va fi

$$y'' + p^2 y = -\frac{1}{4}\alpha a^3 \cos 3pt - \alpha\left(ac_1 + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt. \tag{6}$$

Pentru ca soluția acestei ecuații să nu conțină timpul t în afara semnului cosinus, trebuie să luăm pe c_1 astfel, încît în membrul al doilea, termenul

$$\alpha\left(ac_1 + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt$$

să dispară, adică trebuie să punem

$$ac_1 + \frac{3}{4}a^3 = 0,$$

ceea ce dă

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2.$$

Înseamnă că

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha,$$

și integrala generală a ecuației (6) va fi:

$$y = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}\cos 3pt.$$

Condițiile inițiale dau

$$C_1 = a - \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2},$$
$$C_2 = 0,$$

astfel încît obținem

$$y = a\cos pt - \frac{\alpha a^3}{32p^2}(\cos pt - \cos 3pt). \tag{7}$$

Această soluție, exactă pînă la puterea întîi a parametrului α, nu mai conține timpul t în afara semnului cosinus și arată că mișcarea punctului își păstrează caracterul oscilator, amplitudinea oscilațiilor rămînînd mărginită, însă frecvența acestor oscilații

$$p = \sqrt{n^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha}$$

depinzînd de amplitudinea a. Așadar, drept urmare a prezenței termenului αy^3 în ecuația (1), dispare izocronismul oscilațiilor.

Dacă am dori să avem o soluție, să zicem, cu aproximație pînă la puterea a treia a parametrului α, atunci cel mai simplu ar fi să procedăm în modul următor.

Să punem

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3, \tag{8}$$

unde φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 sînt noi funcții necunoscute de variabila t; o dată cu aceasta, să punem

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3, \tag{9}$$

unde c_1, c_2, c_3 sînt constante deocamdată nedeterminate, pe care le vom alege în mod convenabil mai jos. Substituind expresiile (8) și (9) în ecuația dată, obținem:

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + \alpha^3\varphi_3'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3) + \\ + \alpha(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3)^3 = 0.$$

Să dezvoltăm membrul întîi al acestei ecuații după puterile parametrului α, păstrînd numai termenii care au pe acest parametru la puteri nu mai mari decît puterea a treia. Obținem:

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 + \varphi_0^3) +$$
$$+ \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_2\varphi_0 + c_1\varphi_1 + 3\varphi_0^2\varphi_1) +$$
$$+ \alpha^3(\varphi_3'' + p^2\varphi_3 + c_3\varphi_0 + c_2\varphi_1 + c_1\varphi_2 + 3\varphi_0^2\varphi_2 + 3\varphi_0\varphi_1^2) = 0.$$

Deoarece această ecuație trebuie să aibă loc pentru toate valorile parametrului α, ea se descompune în următoarele ecuații:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0,\\
&\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3,\\
&\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1,\\
&\varphi_3'' + p^2\varphi_3 = -c_3\varphi_0 - c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 - 3\varphi_0^2\varphi_2 - 3\varphi_0\varphi_1^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Condițiile inițiale iau următoarea formă: pentru $t=0$ trebuie ca

$$\varphi_0(0) + \alpha\varphi_1(0) + \alpha^2\varphi_2(0) + \alpha^3\varphi_3(0) = a,$$
$$\varphi_0'(0) + \alpha\varphi_1'(0) + \alpha^2\varphi_2'(0) + \alpha^3\varphi_3'(0) = 0,$$

unde folosim notații absolut evidente. Cum aceste ecuații trebuie să aibă loc pentru toate valorile parametrului α, ele se reduc la următoarele:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_0(0) = a, \quad \varphi_0'(0) = 0,\\
&\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 0,\\
&\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0,\\
&\varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_3'(0) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Astfel, problema este redusă la integrarea sistemului (10) cu condițiile inițiale (11).

Prima ecuație din sistemul (10) și prima condiție inițială dau

$$\varphi_0 = a\cos pt; \qquad (12)$$

a doua ecuație va fi atunci:

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 a\cos pt - a^3\cos^3 pt =$$
$$= -\frac{1}{4}a^3\cos 3pt - \left(c_1 a + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt.$$

Pentru ca timpul t să rămînă sub semnul cosinusului, alegem constanta c_1 astfel, încît să avem

$$c_1 a + \frac{3}{4}a^3 = 0,$$

adică

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2; \qquad (13)$$

atunci obținem

$$\varphi_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}\cos 3pt.$$

A doua condiție inițială dă

$$C_1 + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2} = 0,$$
$$C_2 = 0,$$

astfel încît

$$\varphi_1 = \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt). \tag{13'}$$

Substituind valorile φ_0 și φ_1 date de ecuațiile (12) și (13') și valoarea c_1 din ecuația (13), în a treia ecuație a sistemului (10), avem:

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2 a\cos pt + \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) -$$
$$- 3a^2 \cdot \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}\cos^2 pt\,(\cos 3pt - \cos pt);$$

dezvoltînd membrul al doilea și folosind formulele

$$\cos^2 pt = \frac{1}{2}(1 + \cos 2pt),$$
$$\cos 3pt \cos 2pt = \frac{1}{2}(\cos 5pt + \cos pt),$$
$$\cos 2pt \cos pt = \frac{1}{2}(\cos 3pt + \cos pt),$$

obținem

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -\frac{3}{128}\frac{a^5}{p^2}\cos 5pt - a\left(c_2 - \frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}\right)\cos pt.$$

Să alegem pe c_2 în așa fel, încît termenul în $\cos pt$ să dispară, adică să punem

$$c_2 = +\frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}; \tag{14}$$

atunci obținem

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\cos 5pt.$$

Constantele arbitrare C_1 și C_2 se determină prin a treia din condițiile (11) și vor fi

$$C_1 = -\frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4},$$
$$C_2 = 0.$$

Așadar, vom avea:

$$\varphi_2 = \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\cos 5pt - \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\cos pt. \tag{14'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, cu o aproximație mergînd pînă la puterea a doua a parametrului α, avem, pe baza formulelor (12), (13), (14):

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4} a^2\alpha - \frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}\alpha^2. \tag{15}$$

Nu este necesar să rezolvăm exact această ecuație în raport cu p^2. Observînd că p^2 trebuie să fie cunoscută, în acest caz, numai cu o aproximație mergînd pînă la termeni de ordinul al doilea, în raport cu α, putem să înlocuim în ultimul termen pe p^2 prin n^2, ceea ce introduce o eroare de ordinul al treilea în raport cu α. Atunci vom avea:

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4} a^2\alpha - \frac{3}{128}\frac{a^4}{n^2}\alpha^2. \tag{15'}$$

În baza formulelor (12), (13'), (14'), valoarea lui y va fi

$$y = a\cos pt + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}\alpha(\cos 3pt - \cos pt) + \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\alpha^2(\cos 5pt - \cos pt). \tag{16}$$

Este clar că pentru a obține termenii de ordinul al treilea trebuie să substituim în a patra ecuație a sistemului (10) valorile lui φ_0, φ_1, φ_2, c_1 și c_2, să înlocuim prin cosinuși de argumente multiple puterile și produsele de cosinuși, să egalăm coeficientul lui $\cos pt$ cu zero, ceea ce ne va da valoarea constantei c_3, iar ecuația diferențială și condițiile inițiale ne vor da pe φ_3.

Înlocuind în formula

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3$$

valorile lui c_1, c_2, c_3, obținem pentru determinarea lui p^2 o ecuație a cărei soluție o dezvoltăm după puterile parametrului α, oprindu-ne la ordinul al treilea, iar termenul $\alpha^3\varphi_3$ îl adăugăm în membrul al doilea al ecuației (16).

Propunem continuarea acestui calcul ca exercițiu.

Este clar că metoda expusă este aplicabilă la orice ecuație de forma

$$y'' + n^2y + \alpha f(y) = 0, \tag{17}$$

unde $f(y)$ este o funcție întreagă de y, cel puțin de gradul al doilea.

Dezvoltarea poate fi făcută pînă la termeni de orice grad în raport cu α. Trebuie numai să punem pentru aceasta

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \ldots + c_k\alpha^k, \tag{18}$$

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 + \ldots + a^k\varphi_k \tag{19}$$

și să efectuăm calculele exact la fel cum am procedat în cazul particular.

Condiția inițială este: pentru $t=0$

$$y = a, \quad y' = 0. \tag{20}$$

Acest lucru asta foarte important, deoarece altfel în a doua ecuație din membrul al doilea vom avea doi termeni cu argumentul pt, unul în $\cos pt$, iar altul în $\sin pt$, în vreme ce la dispoziția noastră nu va fi decît un singur coeficient nedeterminat c_1 și nu va fi posibil să reducem ambii termeni.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta mai jos în ce mod condițiile inițiale generale pot fi reduse la forma (20).

§ 84. La calcule absolut analoge conduce problema dezvoltării în serie a soluției ecuației

$$y'' + n^2 y + f(y) = 0 \tag{21}$$

cu condițiile inițiale

$$y = \cdot, \quad y' = 0 \text{ pentru } t = 0, \tag{20}$$

după puterile amplitudinii inițiale α, care se presupune mică.

Ilustrăm și această metodă prin ecuația simplă

$$y'' + n^2 y + hy^3 = 0, \tag{22}$$

a cărei soluție vrem s-o dezvoltăm pînă la puterea a treia a lui α.

Să punem atunci

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha\varphi_0 + \alpha^2\varphi_1 + \alpha^3\varphi_2, \\ n^2 &= p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

substituind aceste valori în ecuația dată, avem după simplificare cu α:

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2) + h\alpha^2(\varphi_0 + \ldots)^3 = 0.$$

Dezvoltînd după puterile lui α, avem:

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0) + \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 + h\varphi_0^3) = 0;$$

de aici rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0'' + p^2\varphi_0 &= 0, \\ \varphi_1'' + p^2\varphi_1 &= -c_1\varphi_0, \\ \varphi_2'' + p^2\varphi_2 &= -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 - h\varphi_0^3. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Condițiile inițiale vor fi: pentru $t = 0$

$$\alpha = \alpha\varphi_0 + \alpha^2\varphi_1 + \alpha^3\varphi_2, \quad 0 = \alpha\varphi_0' + \alpha^2\varphi_1' + \alpha^3\varphi_3',$$

adică pentru $t=0$ trebuie ca

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(0) &= 1, & \varphi_0'(0) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, & \varphi_1'(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

adică se obține un sistem de ecuații și de condiții inițiale absolut asemănător cu cel considerat în § 83.

Din prima ecuație și din condiția inițială corespunzătoare găsim

$$\varphi_0 = \cos pt.$$

A doua ecuație va fi atunci

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\cos pt.$$

Pentru ca soluția să nu conțină termeni în $t \sin pt$, este necesar să punem

$$c_1 = 0;$$

atunci, pe baza condițiilor inițiale, vom avea:

$$\varphi_1 = 0.$$

A treia ecuație va fi

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2 \cos pt - h\cos^3 pt = -\left(c_2 + \frac{3}{4}h\right)\cos pt - \frac{1}{4}h\cos 3pt$$

Trebuie să luăm, așadar,

$$c_2 = -\frac{3}{4}h;$$

atunci vom avea

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{32}\frac{h}{p^2}\cos 3pt$$

și, pe baza condițiilor inițiale,

$$C_1 = -\frac{1}{32}\frac{h}{p^2}, \quad C_2 = 0;$$

aceasta înseamnă că

$$\varphi_2 = \frac{1}{32}\frac{h}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt), \tag{26}$$

iar

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}h\alpha^2$$

și

$$y = \alpha \cos pt + \frac{1}{32}\frac{h}{p^2}\alpha^3(\cos 3pt - \cos pt). \tag{26'}$$

Exact la fel s-ar efectua dezvoltarea pînă la orice putere a lui α.

§ 85. Luăm acum o ecuație de forma

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y') = 0,$$

unde α este o mărime mică și $f(y')$ o funcție întreagă de grad par în y'.

Condițiile inițiale sînt ca și mai înainte: pentru $t=0$

$$y = a, \quad y' = 0. \tag{20}$$

Începem prin a considera ecuația cea mai simplă corespunzătoare oscilațiilor pendulului, sau ale unei nave, într-un mediu a cărui rezistență este proporțională cu puterea a doua a vitezei.

Această ecuație va fi:

$$y'' + n^2 y \mp \alpha y'^2 = 0; \tag{27}$$

în această ecuație trebuie să luăm semnul $-$ cînd y' este negativ și semnul $+$ cînd y' este pozitiv. De aceea, presupunînd că a este pozitiv, pentru prima jumătate de oscilație avem ecuația

$$y'' + n^2 y - \alpha y'^2 = 0. \tag{28}$$

Vom dezvolta soluția acestei ecuații după puterile lui α și ne vom opri la termenii de gradul al doilea; punem atunci

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c^2\alpha^2, \tag{29}$$

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2; \tag{30}$$

și vom avea

$$\alpha y'^2 = \alpha\,(\varphi_0'^2 + 2\alpha\varphi_0'\varphi_1' + \ldots) = \alpha\varphi_0'^2 + 2\alpha^2\varphi_0'\varphi_1';$$

după substituție va rezulta ecuația

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2)\,(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2) - (\alpha\varphi_0'^2 + 2\alpha^2\varphi_0'\varphi_1') = 0.$$

Dezvoltînd și grupînd termenii avem:

$$(\varphi_0'' + p^2\varphi_0) + \alpha\,(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 - \varphi_0'^2) +$$

$$+ \alpha^2\,(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 - 2\varphi_0'\varphi_1') = 0;$$

astfel încît obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0'' + p^2\varphi_0 &= 0, \\ \varphi_1'' + p^2\varphi_1 &= -c_1\varphi_0 + \varphi_0'^2, \\ \varphi_2'' + p^2\varphi_2 &= -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + 2\varphi_0'\varphi_1'. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Condițiile inițiale vor fi: pentru $t=0$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(0) &= a, & \varphi_0'(0) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, & \varphi_1'(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Prima ecuație și prima condiție inițială ne dau

$$\varphi_0 = a\cos pt;$$

atunci a doua ecuație va fi

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 a\cos pt + a^2p^2\sin^2 pt = -c_1 a\cos pt + \frac{1}{2}\,a^2p^2\,(1 - \cos 2pt).$$

Pentru ca soluția să nu conțină termeni în $t\sin pt$ punem

$$c_1 = 0. \tag{34}$$

Atunci soluția va fi

$$\varphi_1 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{6}\,a^2\cos 2pt;$$

din condițiile inițiale rezultă

$$C_1 = -\frac{2}{3}\,a^2, \quad C_2 = 0; \tag{35}$$

astfel încît

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\,a^2 - \frac{2}{3}\,a^2\cos pt + \frac{1}{6}\,a^2\cos 2pt. \tag{36}$$

Scanned with OKEN Scanner

A treia ecuație va fi:

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2 a\cos pt - 2p^2a^3\sin pt\left(\frac{2}{3}\sin pt - \frac{1}{3}\sin 2pt\right)$$

sau

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = \left(-c_2 a + \frac{1}{3}p^2a^3\right)\cos pt - \frac{2}{3}p^2a^3 +$$

$$+\frac{2}{3}p^2a^3\cos 2pt - \frac{1}{3}p^2a^3\cos 3pt.$$

Să alegem pe C_2 astfel încît termenul în $\cos pt$ să dispară; atunci vom avea

$$c_2 = \frac{1}{3}p^2a^2,$$

$$\varphi_2 = C_1\cos pt + C_2\sin pt - \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{9}a^3\cos 2pt + \frac{1}{24}a^3\cos 3pt. \qquad (37)$$

Din condițiile inițiale rezultă

$$C_1 = \frac{61}{72}a^3, \quad C_2 = 0.$$

Prin urmare,

$$\varphi_2 = -\frac{2}{3}a^3 + \frac{61}{72}a^3\cos pt - \frac{2}{9}a^3\cos 2pt + \frac{1}{24}a^3\cos 3pt \qquad (38)$$

și pe baza expresiilor (34) și (37) necunoscuta p^2 este determinată de ecuația

$$n^2 = p^2 + \frac{1}{3}p^2a^2\alpha^2,$$

ceea ce înseamnă că

$$p = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}a^2\alpha^2}}. \qquad (39)$$

Perioada τ corespunzătoare va fi:

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{n}\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{3}a^2\alpha^2} \approx \frac{2\pi}{n}\left(1 + \frac{1}{6}a^2\alpha^2\right)$$

sau punînd

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{n},$$

vom avea:

$$\tau = \tau_0\sqrt{1 + \frac{1}{3}a^2\alpha^2} = \tau_0\left(1 + \frac{1}{6}a^2\alpha^2\right). \qquad (40)$$

Înlocuind valorile lui φ_0, φ_1, φ_2 pe care le-am găsit, în egalitatea

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2,$$

avem

$$y = a\cos pt + \frac{1}{6}\alpha a^2(3 - 4\cos pt + \cos 2pt) - \\ - \frac{1}{72}\alpha^2 a^3(48 - 61\cos pt + 16\cos 2pt - 3\cos 3pt). \quad (41)$$

Această formulă este valabilă atîta timp cît $y' < 0$ adică pînă la momentul

$$t = t_1 = \frac{\pi}{p} = \frac{1}{2}.$$

în care $y' = 0$.

Elongația pendulului la acest moment va fi:

$$y = a_1 = -\left(a - \frac{4}{3}\alpha a^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a^3\right), \quad (42)$$

ceea ce arată că de cealaltă parte față de poziția sa de echilibru pendulul nu atinge elongația inițială, ci numai una mai mică decît aceasta cu

$$\frac{4}{3}\alpha a^2 - \frac{16}{9}\alpha^2 a^3.$$

Durata acestei prime jumătăți de oscilații este

$$\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}\tau_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}a^2\alpha^2}. \quad (43)$$

Evident că începînd a doua jumătate de oscilație cu elongația a_1, pendulul o efectuează în intervalul de timp

$$\frac{1}{2}\tau_1 = \frac{1}{2}\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}a_1^2\alpha^2} \quad (44)$$

și atinge elongația maximă

$$a_2 = a_1 - \frac{4}{3}\alpha a_1^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a_1^3, \quad (45)$$

continuînd să oscileze astfel cu o amplitudine care descrește treptat.

§ 86. Să considerăm și ecuațiile de forma

$$y'' + n^2 y + F(y) + f(y') = 0, \quad (46)$$

unde $F(y)$ este o funcție întreagă de y, de grad cel puțin doi, $f(y')$ — o funcție întreagă de grad par în y', cu coeficientul termenului de gradul al doilea diferit de zero. La o ecuație de acest fel se ajunge, de exemplu, în considerarea oscilațiilor unui pendul sau a unei nave într-un mediu a cărui rezistență este proporțională cu puterea a doua a vitezei, aceste oscilații fiind atît de puternice, încît trebuie luat

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3. \quad (47)$$

Condițiile inițiale vor fi ca și mai sus: pentru $t = 0$

$$y = a, \quad y' = 0$$

și se cere să se dezvolte soluția ecuației acestei mișcări în serie după puterile lui α, mergînd pînă la termenii în α^3.

Ecuația mișcării pentru prima semioscilație va fi:

$$y'' + n^2 y - \frac{1}{6} n^2 y^3 - k y'^2 = 0, \tag{48}$$

unde k este o constantă dată.

Să punem

$$y = \alpha\varphi_0 + \alpha^2\varphi_1 + \alpha^3\varphi_2, \tag{49}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 \tag{50}$$

și să înlocuim în ecuația dată, care după simplificare cu α va deveni

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2) -$$
$$- \frac{1}{6}(p^2 + \cdots)(\varphi_0^3 + \cdots)\alpha^2 - k\alpha(\varphi_0' + \alpha\varphi_1')^2 = 0.$$

Dezvoltînd pînă la termeni de ordinul al doilea în raport cu α, avem:

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 - k\varphi_0'^2) +$$
$$+ \alpha^2\left(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 - \frac{1}{6}p^2\varphi_0^3 - 2k\varphi_0'\varphi_1'\right) = 0.$$

Cum această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice α, obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0'' + p^2\varphi_0 &= 0, \\ \varphi_1'' + p^2\varphi_1 &= -c_1\varphi_0 + k\varphi_0'^2, \\ \varphi_2'' + p^2\varphi_2 &= -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + \frac{1}{6}p^2\varphi_0^3 + 2k\varphi_0'\varphi_1'. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Condițiile inițiale vor fi: pentru $t = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= 1, & \varphi_0'(0) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, & \varphi_1'(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Prima ecuație a sistemului și prima condiție inițială ne dau

$$\varphi_0 = \cos pt;$$

atunci a doua ecuație va fi

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\cos pt + kp^2\sin^2 pt = -c_1\cos pt + \frac{kp^2}{2}(1 - \cos 2pt).$$

Pentru ca t să nu iasă de sub semnul cosinusului, trebuie să luăm

$$c_1 = 0; \tag{52}$$

atunci vom avea:

$$\varphi_1 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{k}{2} + \frac{k}{6}\cos 2pt$$

și pe baza condițiilor inițiale rezultă:

$$C_1 = -\frac{2}{3}k, \quad C_2 = 0.$$

Prin urmare,

$$\varphi_1 = \frac{k}{2} + \frac{k}{6}(\cos 2pt - 4\cos pt). \tag{53}$$

A treia ecuație din sistemul (51) va fi:

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1 \cos pt + \frac{1}{6}p^2\cos^3 pt +$$

$$+ \frac{1}{3}p^2k^2 \sin pt(4\sin pt - 2\sin 2pt) =$$

$$= \left(-c_2 + \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{3}p^2k^2\right)\cos pt + \frac{2}{3}p^2k^2 - \frac{2}{3}p^2k^2\cos 2pt +$$

$$+ \frac{1}{24}p^2(1 + 8k^2)\cos 3pt.$$

Prin urmare trebuie să punem

$$-c_2 + \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{3}p^2k^2 = 0,$$

adică

$$c_2 = \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{3}p^2k^2 = \frac{1}{24}p^2(3 - 8k^2); \tag{54}$$

atunci vom avea:

$$\varphi_2 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{2}{3}k^2 + \frac{2}{9}k^2\cos 2pt - \frac{1}{192}(1 + 8k^2)\cos 3pt.$$

Pe baza condițiilor inițiale rezultă

$$0 = C_1 + \frac{2}{3}k^2 + \frac{2}{9}k^2 - \frac{1}{192}(1 + 8k^2), \; C_2 = 0,$$

prin urmare,

$$C_1 = -\frac{61}{72}k^2 + \frac{1}{192},$$

$$\varphi_2 = \frac{k^2}{72}(48 - 61\cos pt + 16\cos 2pt - 3\cos 3pt) + \frac{1}{192}\cos pt. \tag{55}$$

Pe baza formulei (50) avem:

$$n^2 = p^2 + \frac{\alpha^2}{24}p^2(3 - 8k^2),$$

prin urmare

$$p^2 = \frac{24n^2}{24 + \alpha^2(3 - 8k^2)},$$

$$y = \alpha\cos pt + \frac{k\alpha}{6}(3 - 4\cos pt + \cos 2pt) + \tag{56}$$

$$+ \frac{k^2\alpha^2}{72}(48 - 61\cos pt + 16\cos 2pt - 3\cos 3pt) + \frac{\alpha^2}{192}\cos pt.$$

Această ecuație are loc numai atîta timp cît

$$y' \geqslant 0,$$

adică pînă la momentul

$$t = t_1 = \frac{\pi}{p}.$$

Pentru semioscilația următoare și pentru a cerceta mai departe mișcarea, trebuie procedat ca în § 85. Este necesar să observăm că metoda expusă este aplicabilă în cazul în care, în fiecare ecuație a sistemului care servește pentru determinarea funcțiilor $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ figurează numai un singur termen în sinus sau cosinus de pt, deoarece, la dispoziția noastră va fi un singur coeficient nedeterminat.

Astfel, de exemplu, să presupunem că am ajuns în dezvoltare pînă la φ_{i-1}, și în membrul al doilea al ecuației care determină pe φ_i au rămas doi termeni de forma

$$(g_i + h_i c_i) \cos pt + (g_i' + h_i c_i) \sin pt,$$

prin urmare c_i trebuie să satisfacă ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} g_i + h_i c_i &= 0, \\ g_i' + h_i' c_i &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

iar aceasta este posibil numai în cazul în care

$$\frac{g_i}{h_i} = \frac{g_i'}{h_i'}. \tag{58}$$

Dacă această condiție nu este îndeplinită, atunci φ_i și toate funcțiile ce urmează după aceasta, vor cuprinde factorul t în afara simbolurilor sinus și cosinus.

Metoda expusă aici este o modificare a metodei dezvoltată de A. M. Liapunov în disertația sa „Problema generală a stabilității mișcării", Harkov, 1892, pentru sisteme de ecuații cu mult mai generale decît cele pe care le-am considerat aici.

§ 87. Rămîne să arătăm în ce mod se pot transforma condițiile inițiale pentru a fi de forma

$$y = a, \quad y' = 0$$

pentru $t=0$ dacă ele sînt date la început în forma mai generală

$$y = l, \quad y' = h. \tag{59}$$

Aceste condiții inițiale, în calculele ce urmează, intervin numai la determinarea funcției φ_0 și în cazul general ar fi de forma: pentru $t=0$

$$\varphi_0(0) = l, \quad \varphi_0'(0) = h \tag{59'}$$

și deoarece φ_0 este determinat de ecuația

$$\varphi_0'' + p^2 \varphi_0 = 0,$$

vom avea pentru aceste condiții inițiale

$$\varphi_0 = l\cos pt + \frac{h}{p}\sin pt.$$

Să punem

$$l = a\cos\delta, \quad \frac{h}{p} = a\sin\delta; \tag{60}$$

atunci vom lua

$$a = +\sqrt{l^2 + \frac{h^2}{p^2}} = +\frac{1}{p}\sqrt{l^2p^2 + h^2}, \tag{61}$$

și vom avea

$$\cos\delta = \frac{l}{a}; \quad \sin\delta = \frac{h}{pa}. \tag{62}$$

Unghiul δ este determinat în mod unic de aceste egalități, atît în ceea ce privește mărimea sa, cît și în ceea ce privește cadranul în care este situat.

Substituind în loc de l și $\frac{h}{p}$ valorile lor, obținem:

$$\varphi_0 = a\cos(pt - \delta) \tag{63}$$

prin urmare este deajuns să punem

$$t_1 = t - t_0 \tag{64}$$

și să luăm

$$t_0 = \frac{\delta}{p}. \tag{65}$$

ca să avem

$$\varphi_0 = a\cos t_1 \tag{66}$$

astfel încît, pentru $t_1 = 0$ vom avea

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_0' = 0.$$

Rămîne numai să introducem variabila t_1 în locul variabilei t în ecuația dată, care, nu-și schimbă prin aceasta forma, și vom avea condițiile inițiale sub forma cerută.

Menținînd pe p^2 nedeterminat, continuăm dezvoltarea pînă la gradul cerut și avînd expresiile coeficienților $C_1, C_2, \ldots C_k$ alcătuim ecuația.

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_k\alpha^k;$$

determinăm din ea pe p, după care din formulele (62) și (65) găsim pe δ și t_0.

Evident că această înlocuire a variabilei t prin variabila t_1 reprezintă de fapt numai o schimbare a originei timpului.

§ 88. Procesul de aproximații succesive, dat în § 80 pentru ecuațiile liniare, a fost generalizat pentru orice ecuații ordinare sau sisteme de astfel de ecuații. În acele cazuri cînd trebuie să cunoaștem soluția ecuației numai în limite restrînse de variație ale variabilei independente, această metodă putînd fi realizată grafic sau prin „cuadraturi mecanice", este una din cele

mai generale, dar aplicarea ei practică necesită o muncă de calcul însemnată, care poate fi evitată aplicînd alte metode.

Picard, în cursul său de analiză[1]), demonstrează absolut riguros că dacă sînt respectate anumite condiții, un proces de aproximații succesive este într-adevăr un proces convergent, și rezultatul obținut pe această cale converge către integrala cerută a ecuației diferențiale sau a sistemului de ecuații.

Pentru a simplifica raționamentele, să presupunem că este dată ecuația de ordinul al doilea

$$y'' - f(x, y, y') = 0.$$

Dacă punem

$$y' = u$$

atunci vom avea

$$y'' = u'$$

și ecuația este înlocuită prin sistemul de două ecuații

$$\frac{du}{dx} = f(x, y, u); \quad \frac{dy}{dx} = u.$$

De aceea Picard consideră sistemul mai general de ecuații

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, y, u, \cdots, w),$$

$$\frac{du}{dx} = f_2(x, y, u, \cdots, w),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw}{dx} = f_n(x, y, u, \cdots, w).$$

și presupune că se cere integrarea acestui sistem astfel încît pentru $x = x_0$ să avem

$$y = y_0, \quad u = u_0, \ldots, \quad w = w_0.$$

Funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se presupun continue și reale în vecinătatea valorilor susamintite și rămîn astfel atît timp cît variabilele sînt cuprinse în intervalele:

$$(x_0 - a, x_0 + a), \quad (y_0 - b, y_0 + b), \ldots, (w_0 - l, w_0 + l).$$

Se presupune, în sfîrșit, că se pot găsi numerele pozitive $A, B, \ldots, L$ astfel încît, atît timp cît variabilele iau valori oarecare $Y, U, \cdots, W, y, u, \ldots, w$ ce rămîn cuprinse în limitele indicate mai sus, să avem în valoare absolută

$$|f_i(x, Y, U, \ldots, W) - f_i(x, y, u, \ldots, w)| < A|Y - y| + B|U - u| + \cdots + L|W - w|.$$

---

[1]) E. Picard, Traité d'analyse, v. II, p. 301.

Vom înlocui pentru început în membrii ai doilea ai ecuațiilor, în loc de $y, u, \cdots, w$, valorile lor inițiale și vom obține sistemul

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_0, u_0, \ldots, w_0),$$
$$\frac{du_1}{dx} = f_2(x, y_0, u_0, \ldots, w_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dw_1}{dx} = f_n(x, y_0, u_0, \ldots, w_0).$$

Vom integra acest sistem, astfel încît pentru $x = x_0$ să avem

$$y_1 = y_0, u_1 = u_0, \ldots, w_1 = w_0.$$

Valorile obținute le substituim din nou în membrii ai doilea ai ecuațiilor date și scriem sistemul

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x, y_1, u_1, \ldots, w_1),$$
$$\frac{du_2}{dx} = f_2(x, y_1, u_1, \ldots, w_1);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dw_2}{dx} = f_n(x\ y_1\ u_1, \ldots, w_1);$$

procedăm cu el ca și mai înainte și repetăm acest proces de m ori în șir astfel încît al m-lea sistem va fi:

$$\frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\frac{du_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1}, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dw_m}{dx} = f_n(x, y_{m-1}, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}).$$

și îl vom integra astfel, încît pentru $x = x_0$ să avem

$$y_m = y_0, u_m = u_0, \ldots, w_m = w_0.$$

Picard demonstrează că odată cu creșterea numărului m, mărimile

$$y_m, u_m, \ldots, w_m$$

tind către integralele căutate ale sistemului, cu condiția ca x să fie suficient de apropiat de x_0; anume trebuie ca x să fie cuprins între $x_0 - \delta$ și $x_0 + \delta$, unde δ este cel mai mic dintre numerele

$$a \quad \frac{b}{M},$$

M fiind maximul valorilor absolute ale funcțiilor f cînd variabilele rămîn în intervalele indicate.

Se pune întrebarea: atunci cînd se lucrează după metoda lui Picard, cînd să se oprească procesul de efectuare a cuadraturilor mecanice? Evident, atunci cînd două aproximații succesive nu vor diferi între ele în limitele exactității calculelor.

Procesul se accelerează într-o măsură însemnată dacă la început nu se iau valorile constante $y_0, u_0, \ldots, w_0$, ci anumite funcții mai apropiate de cele căutate; astfel de funcții pot fi obținute practic în modul următor.

Să presupunem că ni se cere să integrăm sistemul dat și să alcătuim tabela valorilor funcțiilor $y, u, \ldots, w$ pentru valorile argumentului x cuprinse între x_0 și X_0. Dat fiind că se presupune că sistemul nu poate fi integrat sub formă finită, pentru funcțiile căutate se pot alcătui numai tabele sau curbe, ceea ce este de fapt același lucru. Să presupunem că argumentele consecutive în aceste tabele diferă prin h, unde „pasul" h este o mărime suficient de mică.

Atunci, pentru obținerea aproximației inițiale procedăm astfel: scriind sistemul

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y_0, u_0, \ldots, w_0),$$

$$\frac{du}{dx} = f_2(x, y_0, u_0, \ldots, w_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dw}{dx} = f_n(x, y_0, u_0, \ldots, w_0),$$

facem $x = x_0$ și calculăm valorile inițiale ale derivatelor pe care le notăm respectiv cu

$$\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0$$

și formăm mărimile

$$y_0 + \alpha_0 h,\ u_0 + \beta_0 h, \ldots, w_0 + \lambda_0 h.$$

Înlocuim aceste mărimi în sistem în locul lui $y_0, u_0, \ldots, w_0$ și calculăm valorile corespunzătoare ale derivatelor; aceste valori le notăm cu

$$\alpha_0', \beta_0', \ldots, \lambda_0'$$

și formăm cu ajutorul lor mărimile

$$y_0 + \alpha_0' h,\quad u_0 + \beta_0' h,\ \ldots,\ w_0 + \lambda_0' h.$$

Luăm mediile aritmetice ale acestor valori și a celor precedente; valorile obținute le notăm cu

$$y_1',\ u_1',\ \ldots,\ w_1';$$

acestea vor fi valorile aproximative ale funcțiilor $y_1, u_1, \ldots, w_1$ pentru $x = x_0 + h$.

Pentru ca să obținem valorile acestor funcții pentru $x = x_0 + 2h$ procedăm cu funcțiile

$$y_1',\ u_1',\ \ldots,\ w_1'$$

tot așa cum am procedat și cu funcțiile $y_0, u_0, \ldots, w_0$ adică înlocuim în membrii ai doilea ai ecuațiilor sistemului pe x prin $x_0 + h$ iar în loc de $y_0, u_0, \ldots, w_0$ substituim valorile indicate mai sus $y_1', u_1', \ldots, w_1'$ și calculăm valorile corespunzătoare ale derivatelor, pe care le notăm cu

$$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1.$$

Găsim apoi

$$y_1' + \alpha_1 h;\quad u_1' + \beta_1 h, \ldots, w_1' + \lambda_1 h;$$

înlocuim aceste mărimi în sistem, calculăm valorile derivatelor pe care le notăm cu

$$\alpha_1', \beta_1', \ldots, \lambda_1',$$

și folosindu-le pe acestea obținem

$$y_1' + \alpha_1' h;\quad u_1' + \beta_1' h, \ldots, w_1' + \lambda_1' h.$$

Luăm mediile pe care le notăm cu

$$y_1'', u_1'', \ldots, w_1'';$$

acestea vor fi valorile aproximative ale funcțiilor $y_1, u_1, \ldots, w_1$ pentru argumentul

$$x = x_0 + 2h.$$

Prelungim procesul astfel mai departe, pînă cînd ajungem la argumentul $x = X$.

După aceasta, avînd tabela pentru funcțiile $y_1, u_1, \ldots, w_1$ ce alcătuiesc prima aproximație, ne îndreptăm atenția asupra sistemului

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x_1, y_1, u_1, \ldots, w_1),$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_2(x, y_1, u_1, \ldots, w_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dw_2}{dx} = f_n(x, y_1, u_1, \ldots, w_1)$$

și alcătuim tabelele valorilor funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pentru argumentele x de la $x = x_0$ pînă la $x = X$, intervalul între două argumente succesive fiind h. Aplicăm la fiecare din aceste funcții, pentru integrarea ei, cea mai simplă dintre metodele de integrare aproximativă date în § 34.

Obținem în acest fel tabela valorilor funcțiilor $y_2, u_2, \ldots, w_2$. Cu ele procedăm în același mod, folosind una din formulele din cap. V, de exemplu formula lui Laplace. Vom continua acest proces atîta timp cît două aproximații succesive vor diferi sensibil în limitele exactității calculelor noastre.

După cum se vede, în afara lungimii și a oboselii calculelor numerice acest proces nu prezintă nici un fel de dificultăți; mai jos, vom da exemple de aplicare a acestei metode într-o formă simplificată.

Scanned with OKEN Scanner

§ 89. La realizarea unor construcții și a unor mecanisme navale, se ajunge și la probleme de dinamică, sau de teoria rezistenței materialelor, care necesită rezolvarea ecuațiilor diferențiale ordinare.

În majoritatea acestor cazuri, nu este neapărat necesar să se aibă integrala generală a ecuației, care conține constante arbitrare; este suficient să se găsească soluția particulară care satisface condițiile inițiale date și aceasta pe un interval mărginit de variație a argumentului. Pentru practică, de asemenea, nu va fi necesară o reprezentare analitică a funcției căutate, ci va fi suficient să avem o tabelă a valorilor ei sau chiar să putem construi curba ce o reprezintă.

Metodele pentru o astfel de rezolvare numerică a soluțiilor ecuațiilor diferențiale, se expun rareori în cursuri, deși în fond aceste metode nu sînt mai complicate decît cele de calcul al integralelor definite.

În paragrafele următoare se urmărește să se expună cele mai comode și mai generale metode de rezolvare numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare.

Ca și în majoritatea problemelor calculului integral, și aici începutul a fost făcut de Euler, care a consacrat cap. VII din vol. I din „Institutiones Calculi Integralis“ expunerii unei metode de rezolvare numerică aproximativă a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi, la care poate fi redusă totdeauna problema.

Astfel, să presupunem că funcția căutată y este determinată de ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

cu condițiile inițiale: pentru $x = a$, $y = b$. Luînd un interval h suficient de mic, putem considera că atîta timp cît x este cuprins între a și $a + h$, y diferă puțin de b, și derivata păstrează o valoare constantă $f(a, b)$, astfel încît pentru acest interval vom avea:

$$y = b + (x - a) f(a, b) = b + (x - a) A_0$$

și prin urmare la extremitatea intervalului pentru $x = a + h$ vom avea

$$y = b + A_0 h = b_1.$$

Astfel am obținut valoarea aproximativă $y = b_1$ care corespunde valorii $x = a_1 = a + h$.

Exact, la fel, punînd

$$A_1 = f(a_1, b_1)$$

obținem pentru $x = a_2 = a + 2h$ valoarea

$$y = b_2 = b_1 + A_1 h$$

etc.; astfel se alcătuiește tabela 46 a valorilor corespunzătoare,

$$A_k = f(a_k, b_k)$$

și

$$b_{k+1} = b_k + A_k h.$$

Expunînd această metodă, Euler spune: „...cu cît sînt mai mici intervalele între valorile succesive ale lui x, cu atît mai exact se determină toate

celelalte mărimi; cu toate acestea, după un număr mare de pași, acumularea chiar a acestor erori mici poate să dea o eroare însemnată".

„Eroarea acestor calcule provine de acolo că în fiecare interval în parte, se consideră că ambele valori x și y păstrează valorile lor constante corespunzătoare extremității inițiale a acestui interval, astfel încît valoarea funcției $f(x, y)$ rămîne constantă; de aceea: cu cît mai repede se schimbă această funcție la trecerea de la un interval la cel următor, cu atît mai mare va fi eroarea la care ne putem aștepta. Acest fapt dezavantajos are loc de obicei acolo unde valoarea funcției $f(x, y)$ sau se anulează sau devine infinită".

Tabela 46

x	y	$y' = f(x, y)$
a	b	A_0
a_1	b_1	A_1
a_2	b_2	A_2
...	..	.....
a_n	b_n	A_n

Pentru a evita acest „fapt dezavantajos" Euler procedează astfel: să presupunem, pentru a simplifica scrierea, că funcția $f(x, y)$ se anuleazsă pentru $x=a$, $y = b$; atunci va trebui să punem

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta$$

și ecuația ia forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f(a + \xi, b + \eta), \qquad (2)$$

iar condițiile inițiale vor fi: pentru $\xi = 0$ trebuie ca $\eta = 0$ și totodată pentru $\xi = 0$ vom avea:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0 = f(a, b) = 0;$$

de aceea punînd

$$\eta = \alpha_1 \xi^{\iota} + \alpha_2 \xi^{p} + \cdots, \qquad (3)$$

înlocuim mărimea (3) în ecuația (2) și determinăm exponenții n, p,... și coeficienții α_1, α_2,...,astfel încît egalitatea (2) să aibă loc identic, cu alte cuvinte dezvoltăm după metoda cunoscută mărimea η în serie după puterile crescătoare ale lui ξ.

În cazul în care $f(a, b) = \infty$ ecuația (1) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{f(a + \xi, b + \eta)} = F(\xi, \eta);$$

funcția $F(\xi, \eta)$ pentru $\xi = 0$ și $\eta = 0$ se va anula, ceea ce înseamnă că trebuie să luăm o dezvoltare de forma

$$\xi = \beta_1 \eta^{k} + \beta_2 \eta^{n} + \ldots$$

și găsind coeficienții β_1, β_2,..., și exponenții k, n,..., trebuie să facem „inversiunea" acestei serii adică să exprimăm pe η sub formă de serie dezvoltată după puterile lui ξ.

Euler consideră exemplul următor:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a^2}{x^2 - y^2}$$

cu condiția inițială pentru $x = a$, $y = a$.

Punînd

$$x = a + \xi, \quad y = a + \eta,$$

obținem

$$a^2 \frac{d\xi}{d\eta} = 2a(\xi - \eta) + (\xi^2 - \eta^2); \qquad (**)$$

făcînd apoi

$$\xi = \alpha_1 \eta^n + a_2 \eta^p + \ldots,$$

avem:

$$a^2 [n\alpha_1 \eta^{n-1} + p\alpha_2 \eta^{p-1} + \ldots] =$$
$$= 2a[-\eta + \alpha_1 \eta^n + \alpha_2 \eta^p + \ldots] + [-\eta^2 + \alpha_1^2 \eta^{2n} + \ldots].$$

De aici rezultă ecuațiile

$$n - 1 = 1, \quad a^2 n\alpha_1 = -2a;$$
$$p - 1 = 2, \quad pa^2\alpha_2 = 2a\alpha_1 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

care dau pentru $n = 2$, $p = 3, \ldots$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{a}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{a^2}, \ldots$$

adică,

$$\xi = -\frac{1}{a}\eta^2 - \frac{1}{a^2}\eta^3 + \ldots \qquad (3')$$

Este ușor de văzut că, dacă punem $\xi = -t^2$, atunci η se dezvoltă într-o serie de forma

$$\eta = At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots$$

și în loc să găsim pe A, B, C,... prin inversiunea seriei (3') este mai ușor să revenim la ecuația (**) și, substituind în ea în loc de ξ și η valorile lor, să căutăm pe A, B, C,... Aceasta dă

$$\eta = \sqrt{a}\, t - \frac{1}{3} t^2 + \frac{5}{18} \frac{1}{\sqrt{a}} t^3 + \ldots$$

sau

$$y - a = \sqrt{a(a-x)} - \frac{1}{3}(a-x) + \frac{5}{18} \frac{1}{\sqrt{a}} (a-x)^{\frac{3}{2}} + \ldots;$$

aceasta înseamnă că x trebuie să fie mai mic decît a, pentru ca y să rămînă real, iar pentru $x = a_1 = a - h$ vom avea:

$$y = b_1 = a + \sqrt{ah} - \frac{1}{3} h + \frac{5}{18} \frac{1}{\sqrt{a}} h^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

Perechea de valori $x = a_1 = a - h$; $y = b_1$ poate fi acum luată ca inițială și se poate aplica procesul indicat mai sus.

§ 90. Pentru a înlătura primul neajuns indicat de el, adică faptul că funcția $f(x, y)$ se consideră constantă în fiecare interval, atunci cînd de fapt ea suferă variații în special în cazul în care intervalele nu sînt prea mici. Euler presupune că în vecinătatea fiecărei din valorile considerate ale

Scanned with OKEN Scanner

variabilei independente, funcția y se dezvoltă într-o serie taylorianã, astfel încît în general vom avea:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{x-a_k}{1} y'_k + \frac{(x-a_k)^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{(x-a_k)^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k + \ldots; \qquad (4)$$

expresiile derivatelor se alcătuiesc folosind ecuația dată

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

derivînd-o pe aceasta succesiv și înlocuind pe y' prin valoarea sa. Astfel vom avea:

$$\begin{aligned} y'' &= f'_x + y' f'_y = f'_x + f f'_y, \\ y''' &= f''_{xx} + 2f f''_{xy} + f^2 f''_{yy} + f'_y [f'_x + f f'_y], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (5)$$

Punînd în aceste expresii $x = a_k$, $y = b_k$ găsim valorile y'_k, y''_k, y'''_k, ... și făcînd $x = a_{k+1} = a_k + h$, găsim după formula (4) $y = b_{k+1}$, adică din perechea (a_k, b_k) obținem perechea următoare (a_{k+1}, b_{k+1}).

Astfel, toată problema se reduce la calcularea cantității

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + B_k \frac{h^2}{2} + C_k \frac{h^3}{3} + \ldots \qquad (6)$$

cu alte cuvinte a „coeficienților" A_k, B_k, C_k,..., care se găsesc fie după formula (5), fie, după cum observă Euler, „fără a efectua vreo derivare", cu ajutorul substituirii

$$y = b_k + \eta, \quad x = a_k + \xi$$

în ecuația $y' = f(x, y)$ și a dezvoltării lui η în serie după puterile lui ξ; Euler dă și exemple de acest fel.

§ 91. Metoda lui Euler expusă mai sus a fost apoi dezvoltată de Cauchy, care pentru ecuația diferențială dată

$$y' = f(x, y)$$

cu condițiile inițiale: pentru $x = x_0$, $y = y_0$, formează seria de egalități

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ y_3 - y_2 &= (x_3 - x_2) f(x_2, y_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

și consideră suma lor

$$\begin{aligned} y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + \ldots + \\ \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned} \qquad (7)$$

adică face același lucru ca și Euler; însă după aceasta, Cauchy demonstrează că, în anumite condiții restrictive relativ la mărimea segmentului $X - x_0$ și la funcția $f(x, y)$ suma considerată, o dată cu creșterea indefinită

a numărului n și cu micșorarea fiecăreia din diferențele $x_k - x_{k-1}$, are o limită finită și determinată, care reprezintă o funcție de variabila X, satisfăcînd ecuația echivalentă cu ecuația (1)

$$F'(X) = f[X, F(X)].$$

În afară de aceasta el a indicat cum să se găsească eroarea pe care o comitem dacă segmentul $X - x_0$ se împarte într-un număr oarecare finit de părți, cu alte cuvinte cînd diferențele $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$,..., au valori finite, așa cum se petrec lucrurile în metoda lui Euler.

Însă evaluarea acestor erori nu este comodă în practică și de aceea metoda lui Cauchy are mai ales o valoare teoretică, ca fiind prima demonstrație riguroasă a faptului că dacă sînt respectate anumite condiții, orice ecuație diferențială de ordinul întîi, are o integrală generală.

După cum am arătat deja în § 88, în vol. I din „Traite d'analyse" Picard, expunînd demonstrația mai sus amintită a lui Cauchy, dezvoltă metoda sa de aproximații succesive atît pentru o ecuație de ordinul întîi, cît și pentru sisteme de astfel de ecuații. Cu toate că Picard nu a dezvoltat metoda sa, pentru scopurile calculului practic, ci ca o metodă de demonstrație riguroasă a existenței integralei generale, această metodă este aplicabilă și pentru integrarea numerică, în special în cazul în care nu se pleacă de la datele inițiale, adică nu de la prima aproximație a lui Picard, ci de la altă aproximație mai bună, obținută de exemplu prin metoda lui Euler; cu cît această aproximație va fi mai aproape de realitate, cu atît mai repede va fi atinsă funcția limită cu gradul de aproximație ales pentru calcule.

Dacă pentru obținerea primei aproximații se ia metoda corectată a lui Euler, adică aceea în care el ia nu numai primul ci și termenii următori din dezvoltarea taylorianã, atunci efectuarea practică a calculelor se dovedește a fi lungă adeseori și cere multă muncă de prisos. Pentru a evita aceasta, au fost propuse două metode, dintre care una aparține profesorului Runge, de la Universitatea din Göttingen, alta profesorului Störmer de la Universitatea din Oslo (Christiania), cu toate că încă în anul 1855 a fost deja dezvoltată de către cunoscutul astronom Adams o metodă mult mai generală, care însă a rămas pînă în ultimul timp puțin cunoscută.

§ 92. Metoda lui Runge aplicată la ecuația

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

constă în dezvoltarea cuvintelor lui Euler pe care le-am citat mai sus: „...deoarece toată problema se reduce la găsirea cantității

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + B_k \frac{h^2}{2} + C_k \frac{h^3}{6} + \ldots, \tag{9}$$

acest lucru poate fi făcut și fără a efectua derivarea, după care Euler face o substituție și o dezvoltare în serie cu ajutorul coeficienților nedeterminați.

În § 90 sînt date expresiile generale ale derivatelor y'' și y''' obținute prin derivarea ecuației date; punînd în aceste expresii

$$x = a_k, \qquad y = b_k,$$

obținem:

$$A_k = f(a_k, b_k),$$
$$B_k = f'_x(a_k, b_k) + A_k f'_y(a_k, b_k),$$
$$C_k = f''_{xx}(a_k, b_k) + 2A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k) + B_k f'_y(a_k, b_k)$$

sau, punînd pentru prescurtarea scrierii

$$f'_x(a_k, b_k) = p_k, \quad f'_y(a_k, b_k) = q_k,$$
$$f''_{xx}(a_k, b_k) = r_k, \quad f''_{xy}(a_k, b_k) = s_k, \quad f''_{yy}(a_k, b_k) = t_k$$

și

$$f''_{xx}(a_k, b_k) + 2A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k) = P_k,$$
$$B_k f'_y(a_k, b_k) = Q_k,$$

vom avea:

$$B_k = p_k + A_k q_k,$$
$$C_k = P_k + Q_k.$$

Din formula (9) se vede că dacă la calcularea diferenței $b_{k+1} - b_k$ păstrăm termenii pînă la ordinul al treilea în raport cu h, atunci nu este necesar să calculăm separat mărimile A_k, B_k, C_k ci este suficient să calculăm suma

$$A_k h + \frac{1}{2} B_k h^2 + \frac{1}{6} C_k h^3 = N_k h,$$

sau

$$N_k = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{6} C_k h^2.$$

Înainte de a calcula valoarea acestei sume, sau, ceea ce este același lucru, valoarea factorului N_k, să considerăm întîi fig. 68.

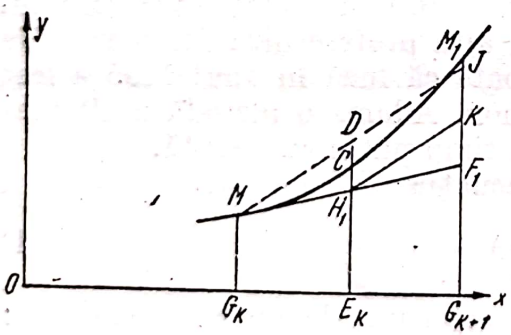

Fig. 68

Să presupunem că coordonatele punctului M sînt

$$x = 0 \; G_k = a_k; \qquad y = G_k M = b_k$$

și MM_1 este curba integrală adevărată care trece prin punctul M, adică curba a cărei ordonată a unui punct arbitrar, considerată ca funcție de abscisa x verifică ecuația

$$y' = f(x, y).$$

Să ne închipuim tangenta la această curbă în punctul M și să notăm punctele de intersecție H_1 și F_1 ale acestei tangente cu ordonata medie $E_k C$ și cu cea extremă $G_{k+1} M_1$.

Evident că panta acestei tangente este $A_k = f(a_k, b_k)$ și ordonatele punctelor H_1 și F_1 sînt

$$E_k H_1 = \eta_k = b_k + \frac{1}{2} A_k h$$

și

$$G_{k+1}\,F_1 = b_k + A_k h.$$

Înlocuind în al doilea membru al ecuației (1) pe x prin mărimea $a_k + \frac{1}{2}h$ și mărimea y prin η_k, obținem panta α_k a tangentei la curba integrală care trece prin punctul H_1; în acest punct vom avea:

$$\alpha_k = f\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}A_k h\right).$$

Să ducem dreapta H_1K cu această înclinare și notăm prin K punctul ei de intersecție cu ordonata $G_{k+1}M_1$. Deoarece punctul H_1 este foarte apropiat de punctul C (distanța H_1C este de ordinul al doilea în raport cu h) dreapta H_1K va fi aproximativ paralelă cu tangenta în punctul C la curba integrală care trece prin M; aceasta înseamnă că dacă ducem prin punctul M o dreaptă paralelă cu H_1K atunci punctul ei de intersecție J va fi situat foarte aproape de M_1, în orice caz mult mai aproape decît punctul F_1, corespunzător primei aproximații euleriene. O dată cu aceasta este evident că punctul C al curbei integrale va fi situat între punctele H_1 și D și anume foarte aproape de media acestora. După acest studiu general al aspectului calitativ al problemei, alcătuim expresiile ordonatelor punctelor M, H_1, D și J și ale pantelor tangentelor la curbele integrale ce trec prin aceste puncte.

Evident coordonatele punctelor noastre vor fi:

$$M\,(a_k,\ b_k),\quad H_1\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}A_k h\right),$$

$$J\,(a_k + h,\ b_k + \alpha_k h),\quad D\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}\alpha_k h\right).$$

Notînd respectiv cu γ_k și δ_k tangentele unghiurilor în punctele D și J vom avea:

$$\gamma_k = f\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}\alpha_k h\right),$$

$$\delta_k = f\,(a_k + h,\ b_k + \alpha_k h).$$

Să dezvoltăm acum mărimile α_k, γ_k, δ_k după puterile lui h, reținînd în aceste dezvoltări numai termenii pînă la ordinul al doilea inclusiv.

Avem:

$$\alpha_k = f\,(a_k, b_k) + \frac{1}{2}h\left[f'_x\,(a_k, b_k) + A_k f'_y\,(a_k, b_k)\right] + \frac{1}{8}h^2\left[f''_{xx}\,(a_k, b_k) + \right.$$

$$\left. + 2A_k f''_{yx}\,(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}\,(a_k, b_k)\right] = A_k + \frac{1}{2}B_k h + \frac{1}{8}P_k h^2,$$

$$\gamma_k = f\,(a_k, b_k) + \frac{1}{2}h\left[f'_x\,(a_k, b_k) + \alpha_k f'_y\,(a_k, b_k)\right] + \frac{1}{8}h^2\left[f''_{xx}\,(a_k, b_k) + \right.$$

$$\left. + 2\alpha_k f''_{xy}\,(a_k, b_k) + \alpha_k^2 f''_{yy}\,(a_k, b_k)\right] =$$

$$= f(a_k, b_k) + \frac{1}{2}h\left[f'_x\,(a_k, b_k) + \right.$$

$$\left. + A_k f'_y\,(a^k, b_k)\right] + \frac{1}{8}h^2\left[f''_{xx}\,(a_k, b_k) + 2A_k f''_{xy}\,(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}\,(a_k, b_k)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}h^2 B_k f'_y\,(a_k, b_k) = A_k + \frac{1}{2}B_k h + \frac{1}{8}P_k h^2 + \frac{1}{4}Q_k h^2$$

și

$$\delta_k = A_k + B_k h + \frac{1}{2} P_k h^2 + \frac{1}{2} Q_k h^2.$$

Trebuie să alcătuim mărimea

$$N_k = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{6} (P_k + Q_k) h^2.$$

Nu este greu să ne convingem că

$$N_k = \frac{1}{6} [A_k + 2\alpha_k + 2\gamma_k + \delta_k] \tag{10}$$

și ordonata căutată b_{k+1} va fi:

$$b_{k+1} = b_k + N_k h.$$

Astfel procesul de trecere de la perechea de valori

$$x = a_k, \quad y = b_k,$$

la perechea următoare

$$x = a_{k+1}, \quad y = b_{k+1}$$

se face în modul următor:

1) se calculează mărimea A_k după formula

$$A_k = f(a_k, b_k); \tag{11}$$

2) se calculează mărimile α_k, γ_k și δ_k după formulele

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= f\left(a_k + \frac{1}{2} h, \quad b_k + \frac{1}{2} A_k h\right), \\ \gamma_k &= f\left(a_k + \frac{1}{2} h, \quad b_k + \frac{1}{2} \alpha_k h\right), \\ \delta_k &= f(a_k + h, \quad b_k + \alpha_k h); \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

3) se formează factorul N_k după formula

$$N_k = \frac{1}{6} [A_k + 2\alpha_k + 2\gamma_k + \delta_k]; \tag{13}$$

4) mărimea b_{k+1} va fi:

$$b_{k+1} = b_k + N_k h. \tag{14}$$

Aceasta este metoda lui *Runge* sub forma ei cea mai simplă.

Observăm aici că este util să calculăm de asemenea și ordonata și înclinarea tangentei în punctul intermediar C al curbei, pentru a avea posibilitatea de a micșora dintr-odată de două ori, intervalul la corectarea curbei integrale după metoda lui Picard, după cum se poate vedea la exemplul numeric pe care îl dăm mai jos.

Acest calcul se poate face de asemenea și în modul următor:

1) se calculează mărimea A_k după formula

$$A_k = f(a_k, b_k); \tag{11'}$$

2) se calculează mărimile α_k, γ_k, δ_k după formulele

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= f\left(a_k + \frac{h}{2}, \quad b_k + \frac{1}{2}A_k h\right), \\ \beta_k &= f\left(a_k + \frac{h}{2}, \quad b_k + \frac{1}{2}\alpha_k h\right), \\ \gamma_k &= f\left(a_k + h, \quad b_k + \beta_k h\right); \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

3) se formează factorul M_k după formula

$$M_k = \frac{1}{6}\left[A_k + 2\alpha_k + 2\beta_k + \gamma_k\right]; \tag{13'}$$

4) mărimea ordonatei căutate b_{k+1} va fi:

$$b_{k+1} = b_k + M_k h. \tag{14'}$$

Această regulă este mai exactă decît precedenta, deoarece mărimea b_{k+1} este valabilă pînă la termeni de ordinul al patrulea inclusiv în h, în timp ce ecuația (14) — numai pînă la termeni de ordinul al treilea.

Propunem ca exercițiu deducerea formulei (14').

Principalul neajuns al metodei lui Runge constă în aceea că se ajunge la calculul cel puțin a trei serii de valori ale funcției $f(x, y)$, ceea ce înseamnă că oricît de simplă ar fi ecuația dată, aceste calcule necesită multă muncă, în mare parte de prisos, după cum se va vedea din exemplul pe care îl dăm mai jos și din compararea acestei metode cu metoda lui Adams.

§ 93. Metoda lui Adams nu a apărut în culegerea operelor sale, ci constituie o parte dintr-o carte publicată separat cu următorul titlu: „An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid by *Francis Bashforth* B. D. late professor of applied mathematics to the advanced class of Royal Artillery officers, Woolwich, and formerly Fellow of S-t John's College, Cambrigde, with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops by J. G. Adams M.A.F.S. Fellow of Pembroke College and Lowndean professor of Astronomy and Geometry in the University of Cambridge" (Cambridge at the University Press, 1883).

Adams în metoda sa nu se mărginește numai la primii trei termeni în expresia (9)

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + \frac{1}{2}B_k h^2 + \frac{1}{6}C_k h^3 + \frac{1}{24}D_k h^4 + \cdots$$

Metoda sa permite să se considere în această expresie oricît de mulți termeni, calculîndu-se numai o serie de valori ale funcției $f(x, y)$, adică valorile A_k, direct din ecuația dată, și nu cîteva serii, așa cum se cerea în metoda lui Runge; această metodă nu cere de loc calculul direct al derivatelor de ordine superioare B_k, C_k, D_k,... așa cum se făcea în metoda lui Euler. Pentru găsirea sau eliminarea acestora, se folosește pentru mărimile $A_k h$ formarea „diferențelor" de ordinul întîi, al doilea, al treilea etc. Acest ultim proces cere numai scăderi și prin caracterul său simplu, evident,

nici nu poate fi comparat cu procesul de calcul direct al valorilor lui A_k din ecuația dată sau al valorilor B_k, C_k, D_k,... din ecuațiile obținute din ecuația dată prin derivare.

Astfel, presupunem că se alcătuiesc paralel două tabele (47 și 48), dintre care prima conține valorile succesive ale necunoscutei y și ale primelor ei diferențe, iar a doua valorile succesive ale mărimilor

$$\eta_n = A_n h = f(a_n, b_n)h \tag{15}$$

și ale diferențelor lor de ordinul întîi, al doilea, al treilea etc.; pentru simplitate, ne oprim la ordinul al treilea.

Presupunem că în tabelele 47 și 48 am ajuns pînă la mărimile corespunzătoare valorii $x = a_n = a + nh$; astfel tabelele vor avea forma următoare:

Tabela 47

n	x	y	Δy
.....	.....	.....	.....
$n-3$	a_{n-3}	b_{n-3}	Δb_{n-3}
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	Δb_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	Δb_{n-1}
n	a_n	b_n	

Tabela 48

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
.....	.....	.....	.....
η_{n-3}	$\Delta\eta_{n-3}$	$\Delta^2\eta_{n-4}$	$\Delta^3\eta_{n-4}$
η_{n-2}	$\Delta\eta_{n-2}$	$\Delta^2\eta_{n-3}$	$\Delta^3\eta_{n-3}$
η_{n-1}	$\Delta\eta_{n-1}$	$\Delta^2\eta_{n-2}$	
η_n			

Diferențele se scriu în rînduri intermediare, între acele două numere pentru care ele se iau, astfel:

$$\Delta b_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3}, \qquad \Delta b_{n-2} = b_{n-1} - b_{n-2},$$
$$\Delta\eta_{n-3} = \eta_{n-2} - \eta_{n-3}, \qquad \Delta\eta_{n-2} = \eta_{n-1} - \eta_{n-3},$$
$$\Delta^2\eta_{n-3} = \Delta\eta_{n-2} - \Delta\eta_{n-3}, \qquad \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-1} - \Delta^2\eta_{n-2}$$

etc., după cum s-a arătat în cap. VI.

Toată problema constă în a vedea în ce mod se poate adăuga la tabelele 47 și 48 cîte o linie oblică, jos, adică în ce mod se poate trece de la n la $n+1$.

Realizăm acest lucru dacă obținem printr-o metodă oarecare mărimea Δb_n deoarece adunînd-o la b_n vom avea:

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n$$

și tabela 47 va fi completată. Odată cu aceasta, acum se adaugă o linie oblică și la tabela 48; în adevăr, după ecuația dată

$$y' = f(x, y),$$

punînd în ea

$$x = a_{n+1}, \quad y = b_{n+1},$$

găsim:

$$y'_{n+1} = A_{n+1} = f(a_{n+1}, b_{n+1})$$

ceea ce înseamnă că

$$\eta_{n+1} = A_{n+1}h = f(a_{n+1}, b_{n+1})\,h,$$

și scriind η_{n+1} la locul respectiv, găsim acum:

$$\Delta\eta_n = \eta_{n+1} - \eta_n,$$

și apoi

$$\Delta^2\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta\eta_{n-1}, \quad \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-1} - \Delta^2\eta_{n-2}$$

și prin urmare tabela 48 va fi completată și se poate trece la valoarea următoare $n + 2$, etc.

Astfel, trebuie numai să se arate cum calculăm mărimea Δb_n folosind numerele existente în tabela 48, adică

$$\eta_n, \quad \Delta\eta_{n-1}, \quad \Delta^2\eta_{n-2}, \quad \Delta^3\eta_{n-3}.$$

Aceasta se face după formula:

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}, \tag{16}$$

pe care o vom deduce acum.

Din seria taylorianã, conform notațiilor făcute rezultă că:

$$b_{n+1} - b_n = \Delta b_n = A_n h + B_n\frac{h^2}{2} + C_n\frac{h^3}{6} + D_n\frac{h^4}{24} + E_n\frac{h^5}{120} + \cdots$$

sau lăsînd deoparte pentru simplificarea scrierii indicele n din membrul al doilea

$$\Delta b_n = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + \cdots$$

Însă, avem:

$$\eta_n = y'_n h = Ah$$

prin urmare, după aceeași serie taylorianã, vom avea

$$\eta_{n-1} = Ah - Bh^2 + C\frac{h^3}{2} - D\frac{h^4}{6} + E\frac{h^5}{24} + \cdots,$$

$$\eta_{n-2} = Ah - 2Bh^2 + 4C\frac{h^3}{2} - 8D\frac{h^4}{6} + 16E\frac{h^5}{24} + \cdots,$$

$$\eta_{n-3} = Ah - 3Bh^2 + 9C\frac{h^3}{2} - 27D\frac{h^4}{6} + 81E\frac{h^5}{24} + \cdots$$

Dar din însăși modul de formare a diferențelor rezultă că:

$$\Delta\eta_{n-1} = \eta_n - \eta_{n-1}, \quad \Delta^2\eta_{n-2} = \eta_n - 2\eta_{n-1} + \eta_{n-2},$$

$$\Delta^3\eta_{n-3} = \eta_n - 3\eta_{n-1} + 3\eta_{n-2} - \eta_{n-3}, \cdots;$$

pe baza acestui fapt vom avea:

$$\Delta\eta_{n-1} = Bh^2 - C\frac{h^3}{2} + D\frac{h^4}{6} - E\frac{h^5}{24} + \cdots,$$

$$\Delta^2\eta_{n-2} = \quad 2C\frac{h^3}{2} - 6D\frac{h^4}{6} + 14E\frac{h^5}{24} - \cdots,$$

$$\Delta^3\eta_{n-3} = \quad 6D\frac{h^4}{6} - 36E\frac{h^5}{24} + \cdots$$

Trebuie să formăm mărimea

$$\Delta b_n = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + \cdots$$

Pentru a obține acest lucru nu avem decît să înmulțim ecuațiile precedente cu factorii α, β, γ, să le adunăm la ecuația

$$\eta_n = Ah$$

și să determinăm factorii necunoscuți, astfel încît egalitatea

$$\eta_n + \alpha\Delta\eta_{n-1} + \beta\Delta^2\eta_{n-2} + \gamma\Delta^3\eta_{n-3} + \cdots = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + \cdots$$

să fie verificată pînă la termeni de ordin cît se poate de mare în raport cu h; astfel, pentru determinarea lui α, β, γ, avem ecuațiile

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}(2\beta - \alpha) = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{6}(6\gamma - 6\beta + \alpha) = \frac{1}{24},$$

care dau

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{12}, \quad \gamma = \frac{3}{8}$$

ceea ce înseamnă că vom avea:

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}. \tag{16}$$

Se înțelege de la sine că această formulă este numai aproximativă fiind exactă numai pînă la termenii de ordinul al treilea în h, deoarece diferența este

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{24}(\alpha + 14\beta - 36\gamma) = \frac{49}{144},$$

nefiind nulă; prin urmare primul dintre termenii neglijați în formula precedentă este

$$\frac{49}{144}Eh^5$$

Nu este greu de văzut că dacă am fi dorit să avem pentru Δb_n o formulă valabilă pînă la termenii de ordinul al cincilea, ar fi trebuit să luăm în considerație și diferențele de ordinul al patrulea, adică $\Delta^4\eta_{n-4}$; dacă am fi dorit să avem și termeni de ordinul al șaselea, atunci ar fi trebuit să luăm în considerație și $\Delta^5\eta_{n-5}$ etc., și formula ar fi avut forma

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^2\eta_{n-3} + \delta\Delta^4\eta_{n-4} + \varepsilon\Delta^5\eta_{n-5}, \quad (17)$$

deoarece evident că coeficienții α, β, γ, ar fi fost determinați de ecuațiile precedente și și-ar fi păstrat valorile. S-ar fi adăugat termeni cu coeficienții δ și ε,

$$\delta = \frac{251}{720}, \quad \varepsilon = \frac{95}{288}.$$

Coeficienții următori, deduși de Adams, sînt

$$\frac{19\,087}{60\,480}, \quad \frac{5257}{17\,280}, \quad \frac{1\,070\,017}{3\,628\,800}, \quad \frac{1\,082\,753}{7\,257\,600}.$$

Adams a calculat acești coeficienți plecînd de la formula de interpolare

$$\eta = \eta_n + \frac{x}{1}\Delta\eta_{n-1} + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3\eta_{n-3} + \cdots,$$

a cărei integrare dă expresia generală a acestor coeficienți sub forma

$$\int_0^1 \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)}\,dx.$$

Dimpotrivă, dacă am fi preferat să luăm intervalele h mult mai mici și să ne mulțumim numai cu termeni de ordinul al treilea, atunci în calcul am fi putut să ne mărginim la diferența de ordinul al doilea, și formula ar fi fost

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} \quad (17')$$

și în acest caz tabelele ar fi luat forma următoare:

Tabela 49

n	x	y	Δy
.....	.....	.....	.....
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	
			Δb_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	
			Δb_{n-1}
n	a_n	b_n	
$n+1$			

Tabela 50

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
.....	.....	.....
η_{n-2}		$\Delta^2\eta_{n-3}$
	$\Delta\eta_{n-2}$	
η_{n-1}		$\Delta^2\eta_{n-2}$
	$\Delta\eta_{n-1}$	
η_n		

iar aproximația furnizată de ele ar fi fost identică cu cea dată de metoda lui Runge. Cît de simplu este calculul se va vedea pe exemplele numerice pe care le vom da mai jos.

§ 94. În cele de mai sus s-a arătat în ce mod se prelungesc tabelele, cînd liniile superioare sînt complete și avem în linia oblică inferioară toate diferențele pînă la ordinul cerut; este necesar să arătăm în ce mod se *începe* alcătuirea acestor tabele, cînd pentru $n = 0$ vor fi cunoscute numai numerele

$$x = a = a_0 \text{ și } y = b = b_0$$

și direct prin calcul

$$\eta = h f(a_0, b_0)$$

Este clar că dacă am fi dorit să ducem calculele pînă la diferențele de ordinul al treilea, atunci ar fi trebuit să obținem numerele corespunzătoare valorilor $n = 0, 1, 2, 3$, adică să avem pentru început tabelele:

Tabela 51

n	x	y	Δy
0	a_0	b_0	
			Δb_0
1	a_1	b_1	
			Δb_1
2	a_2	b_2	
			Δb_2
3	a_3	b_3	

Tabela 52

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
η_0			
	$\Delta\eta_0$		
η_1		$\Delta^2\eta_0$	
	$\Delta\eta_1$		$\Delta^3\eta_0$
η_2		$\Delta^2\eta_1$	
	$\Delta\eta_2$		
η_3			

Acest lucru se poate realiza pe două căi:

1) Punînd în ecuația dată

$$x = a_0 + t, \quad y = b_0 + z,$$

dezvoltăm după regula cunoscută pe z în serie după puterile lui t și punînd apoi $t = h, 2h, 3h$, calculăm valorile corespunzătoare ale lui y care vor reprezenta tocmai pe b_1, b_2, b_3. Se înțelege că aici însuși calculul arată cît de mare trebuie luat intervalul h pentru ca termenii din serie, care se neglijează, să nu influențeze rezultatul ținînd seama de gradul de aproximație cerut. Din perechile de valori astfel obținute $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ se calculează η_1, η_2, η_3, din acestea — diferențele lor, și tabela va putea fi prelungită.

2) Prin aproximație succesivă folosind linia oblică superioară și nu cea inferioară.

Am avut formula generală (16)

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}.$$

Considerînd că diferențele de ordinul al treilea sînt constante, adică

$$\Delta^3\eta_{n-3} = \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^3\eta_{n-1} = \Delta^3\eta_n,$$

vom avea:

$$\Delta^2\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-1} - \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_n - 2\Delta^3\eta_n,$$
$$\Delta\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2\eta_n + \Delta^3\eta_n,$$

adică:

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_n, \qquad (*)$$

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_{n-1}, \qquad (**)$$

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-2}. \qquad (***)$$

Punînd în formula (*) $n=0$, în formula (**) $n=1$ și în formula (***) $n=2$, obținem:

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0 + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_0. \qquad (18)$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_0, \qquad (19)$$

$$\Delta b_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_0. \qquad (20)$$

Dacă ne mărginim la termenii de ordinul al doilea, atunci vom avea:

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0, \qquad (21)$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0. \qquad (22)$$

Șirul de aproximații îl facem în modul următor: din a_0 și b_0 date, calculăm pe η_0 și apoi luăm

$$\Delta b_0 = \eta_0$$

și

$$b_1 = b_0 + \Delta b_0 = b_0 + \eta_0;$$

din perechea obținută (a_1, b_1) calculăm pe η_1 și luăm diferența

$$\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0;$$

calculăm din nou pe Δb_0 după formula

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$$

și valoarea nouă, corectată, va fi $b_2 = b_1 + \Delta b_1$; din această valoare b_1 calculăm pe η_1 și apoi

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$$

și găsim pe $b_2 = b_1 + \Delta b_1$, și din perechea găsită (a_2, b_2) calculăm pe η_2. După ce o găsim pe aceasta din urmă formăm diferențele și găsim pe $\Delta\eta_0$ și $\Delta^2\eta_0$.

Folosind aceste diferențe, calculăm din nou Δb_0 și Δb_1 după formulele

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0,$$

$$b_1 = b_0 + \Delta b_0,$$

$$\eta_1 = f(a_1, b_1);$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0,$$

$$b_2 = b_1 + \Delta b_1.$$

După ce am obținut aceste valori corectate, dacă dorim să mergem pînă la diferențele de ordinul al treilea, calculăm întîi Δb_2 și b_3 după formulele

$$\Delta b_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0,$$

$$b_3 = b_2 + \Delta b_2$$

și din nou recalculînd pe b_0, b_1, b_2 după formulele (18) — (20), repetăm acest calcul pînă cînd două aproximații succesive coincid în limitele exactității alese. Aici decît să mergem pînă la diferențe de ordinul al treilea este mai avantajos să luăm de la început intervale h mai mici, astfel încît diferențele de ordinul al treilea se pot neglija și ne putem mărgini la formulele (21) — (22).

Cînd din mersul calculelor se va vedea că diferențele de ordinul al doilea variază într-atît încît diferențele de ordinul al treilea vor influența rezultatul, atunci trebuie sau să le introducem în calcul, folosind formulele respective, sau să micșorăm intervalul; dimpotrivă, cînd diferențele de ordinul al doilea se dovedesc a fi atît de mici încît nu influențează rezultatul, se poate mări intervalul.

§ 95. Se înțelege de la sine că metoda expusă este aplicabilă și la sisteme de ecuații de ordinul întîi.

De exemplu, fie dat sistemul

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

cu condițiile inițiale: pentru $x = a$, $y = b$, $z = c$; atunci, punînd

$$\eta = f(x, y, z)\,h \quad \text{și} \quad \xi = \varphi(x, y, z)\,h, \qquad (**)$$

nu alcătuim o pereche, ci paralel două perechi de tabele, astfel cum s-a arătat mai sus; o pereche va cuprinde valorile

$$x, y, \Delta y; \eta, \Delta\eta, \Delta^2\eta, \Delta^3\eta,$$

iar cealaltă:

$$x, z, \Delta z; \xi, \Delta\xi, \Delta^2\xi, \Delta^3\xi.$$

Pentru calculul mărimilor η și ξ vor folosi ecuațiile (**), iar pentru calculul lui Δb_n și Δc_n formulele

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_n &= \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3},\\ \Delta c_n &= \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\xi_{n-3}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Exact la fel trebuie să procedăm și pentru sistemele de trei sau mai multe ecuații.

După cum se știe, fiecare ecuație diferențială ordinară de orice ordin, și fiecare sistem de astfel de ecuații, dacă ele se pot rezolva în raport cu derivata de ordinul cel mai mare, pot fi reduse la sisteme de ecuații de ordinul întîi, de forma

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n).$$

Astfel, de exemplu, în problema mișcării unui punct în planul xOy avem sistemul

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, y, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\left(x, y, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Introducînd funcțiile necunoscute u și v, aducem acest sistem la forma

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v,$$
$$\frac{du}{dt} = f(x, y, t, u, v); \quad \frac{dv}{dt} = \varphi(x, y, t, u, v),$$

la care este aplicabilă direct metoda expusă mai sus.

§96. Störmer a dezvoltat metoda sa în aplicație la sistemele de ecuații de ordinul al doilea, de forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f(x, y, z, t),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi(x, y, z, t),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \psi(x, y, z, t),\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

care se referă la mișcarea unui punct material într-un mediu ce nu opune rezistență acestei mișcări.

Să considerăm pentru început o singură ecuație de forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t),$$

care nu conține prima derivată a funcției necunoscute x; presupunem că această ecuație trebuie integrată cu condițiile inițiale: pentru $t = t_0$, $x = x_0$ și $\frac{dx}{dt} = x' = x'_0$. Punînd $\xi = h^2x''$, alcătuim tabelele 53 și 54.

Tabela 53

n	t	x	Δx	$\Delta^2 x$
.....	.....	.....	.....	.....
$n-3$	t_{n-3}	x_{n-3}		$\Delta^2 x_{n-4}$
$n-2$	t_{n-2}	x_{n-2}	Δx_{n-3}	$\Delta^2 x_{n-3}$
$n-1$	t_{n-1}	x_{n-1}	Δx_{n-2}	$\Delta^2 x_{n-2}$
n	t_n	x_n	Δx_{n-1}	
$n+1$	t_{n+1}			

Tabela 54

ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
.....	.....	.....	.....	.....
ξ_{n-3}		$\Delta^2\xi_{n-4}$		
ξ_{n-2}	$\Delta\xi_{n-3}$	$\Delta^2\xi_{n-3}$	$\Delta^3\xi_{n-4}$	$\Delta^4\xi_{n-4}$
ξ_{n-1}	$\Delta\xi_{n-2}$	$\Delta^2\xi_{n-2}$	$\Delta^3\xi_{n-3}$	
ξ_n	$\Delta\xi_{n-1}$			

Aceste tabele se vor încheia cu liniile oblice conținînd numerele

$$x_n,\quad \Delta x_{n-1},\quad \Delta^2 x_{n-2};$$

$$\xi_n,\ \Delta\xi_{n-1},\ \Delta^2\xi_{n-2},\ \Delta^3\xi_{n-3},\ \Delta^4\xi_{n-4}.$$

Pentru a avea posibilitatea de a prelungi tabelele 53 și 54, neglijînd diferențele de ordinul al cincilea, adică de a adăuga la ele o linie oblică, Störmer aplică formula

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right]. \qquad (23)$$

Calculînd din aceasta $\Delta^2 x_{n-1}$, o înscriem la locul respectiv, apoi avem:

$$\Delta x_n = \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1},\quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n;$$

și după ce am obținut mărimea x_{n+1} calculăm din ecuația dată, făcînd în ea $t = t_{n+1}$, $x = x_{n+1}$, mărimea

$$\xi_{n+1} = h^2 f(t_{n+1},\ x_{n+1})$$

și înscriind-o la locul ei, luăm diferențele și în acest mod linia oblică inferioară a tabelei 54 va fi completată; folosind formula (23) putem continua procesul.

Formula (23) se deduce exact la fel ca și formula (16). Păstrînd notațiile de mai sus pentru derivatele funcției necunoscute, în cazul de față x, în raport cu variabila independentă t, și luînd ca inițială valoarea x_n corespunzătoare lui $t = t_0 + nh$, obținem din seria tayloriană pentru x_{n-1} și x_{n+1} dezvoltările

$$x_{n+1} = x_n + Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + F\frac{h^6}{720} + \cdots,$$

$$x_{n-1} = x_n - Ah + B\frac{h^2}{2} - C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} - E\frac{h^5}{120} + F\frac{h^6}{720} - \cdots$$

Odată cu aceasta $\xi_n = x_n'' h^2 = Bh^2$.

De aici rezultă

$$\Delta^2 x_{n-1} = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \xi_n + D\frac{h^4}{12} + F\frac{h^6}{360}. \qquad (*)$$

Scriind apoi dezvoltările mărimilor ξ_{n-1}, ξ_{n-2}, ξ_{n-3}, ξ_{n-4}, și anume:

$$\xi_{n-1} = \xi_n - Ch^3 + D\frac{h^4}{2} - E\frac{h^5}{6} + F\frac{h^6}{24} - \cdots,$$

$$\xi_{n-2} = \xi_n - 2Ch^3 + 4D\frac{h^4}{2} - 8E\frac{h^5}{6} + 16F\frac{h^6}{24} - \cdots$$

etc., alcătuim diferențele

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2\xi_{n-2} &= \xi_n - 2\xi_{n-1} + \xi_{n-2} = 2D\frac{h^4}{2} - 6E\frac{h^5}{6} + 14F\frac{h^6}{24}, \\ \Delta^3\xi_{n-3} &= \xi_n - 3\xi_{n-1} + 3\xi_{n-2} - \xi_{n-3} = 6E\frac{h^5}{6} - 36F\frac{h^6}{24}, \\ \Delta^4\xi_{n-4} &= \xi_n - 4\xi_{n-1} + 6\xi_{n-2} - 4\xi_{n-3} + \xi_{n-4} = 24F\frac{h^6}{2}; \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

eliminăm (cel mai simplu prin metoda multiplicatorilor) din ecuațiile (*) și (**) mărimile D, E, F și obținem formula

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \frac{19}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right], \qquad (24)$$

pe care, pentru comoditatea calculelor, este mai bine să o scriem sub forma

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right]. \qquad (23)$$

Pentru a începe calculele de la condițiile inițiale se pot aplica de asemenea două metode: dezvoltarea în serie, care nu mai cere lămuriri, și aproximațiile succesive pentru care, la fel ca mai înainte, din formula (24) alcătuim următoarele formule:

$$\Delta x_0 = x_0' h + \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{6}\Delta\xi_0 - \frac{1}{24}\Delta^2\xi_0 + \frac{1}{45}\Delta^3\xi_0 - \frac{7}{480}\Delta^4\xi_0,$$

$$\Delta^2 x_0 = \xi_0 + \Delta\xi_0 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_0 - \frac{1}{240}\Delta^4\xi_0,$$

$$\Delta^2 x_1 = \xi_1 + \Delta\xi_1 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_0 + \frac{1}{12}\Delta^3\xi_0 - \frac{1}{240}\Delta^4\xi_0 = \xi_2 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_1 + \frac{1}{240}\Delta^4\xi_0,$$

$$\Delta^2 x_2 = \xi_2 + \Delta\xi_2 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_1 + \frac{1}{12}\Delta^3\xi_0 + \frac{19}{240}\Delta^4\xi_0,$$

și folosindu-le pe acestea, efectuăm calculele după cum se arată în § 88, adică luăm la început un termen, în următoarea aproximație doi termeni etc.

Se înțelege de la sine că atunci cînd nu se dă o ecuație, ci un sistem de ecuații de forma (A), care nu conțin primele derivate ale funcției necunoscute, metoda se aplică exact la fel ca și pentru ecuațiile de ordinul întîi, însă se alcătuiesc atîtea perechi de tabele, cîte funcții necunoscute există.

§ 97. Dacă se iau intervalele atît de mici, încît diferențele de ordinul al treilea să nu influențeze rezultatul, atunci formula fundamentală va fi

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_{n-2}, \qquad (25)$$

$$\xi_n = h^2 f(x_n, t_n)$$

și tabelele vor fi:

Tabela 55

t	x	Δx	$\Delta^2 x$
.....	.....	.....	.....
t_{n-2}	x_{n-2}		$\Delta^2 x_{n-3}$
t_{n-1}	x_{n-1}	Δx_{n-2}	$\Delta^2 x_{n-2}$
t_n	x_n	Δx_{n-1}	
t_{n+1}			

Tabela 56

ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$
.....	.....	.....
ξ_{n-2}		$\Delta^2\xi_{n-3}$
ξ_{n-1}	$\Delta\xi_{n-2}$	$\Delta^2\xi_{n-2}$
ξ_n	$\Delta\xi_{n-1}$	

În acest caz calculul devine foarte simplu.

§ 98. Dacă în metodele lui Adams și Störmer se urmărește ca intervalul h (schimbîndu-i mărimea atunci cînd este necesar) să rămînă atît de mic încît ultima din diferențele păstrate să poată fi considerată constantă, ținînd seama de gradul de aproximație cu care se fac calculele, atunci rezultatul se obține dintr-odată cu gradul de aproximație cerut, corecțiile ne mai fiind necesare.

Dar dacă am fi aplicat o altă metodă, a lui Euler, sau a lui Runge, și am fi dorit să corectăm rezultatul obținut, atunci după cum am mai spus acesta poate fi luat ca aproximație inițială în metoda lui Picard.

Pentru a simplifica raționamentele, să presupunem că se dă o ecuație de ordinul întîi

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

și condițiile inițiale: pentru $x = a$ trebuie ca $y = b$. Să mai presupunem că pentru această ecuație s-a obținut soluția aproximativă

$$y = F_1(x).$$

Dacă această funcție ar fi fost soluția exactă a ecuației (1) atunci ar fi avut loc egalitatea

$$F_1'(x) = f[x, F_1(x)],$$

pe care integrînd-o am fi obținut

$$F_1(x) = \int_a^x f[x, F_1(x)]\,dx + b. \tag{*}$$

Dacă valorile din membrul întîi nu sînt egale cu valorile acelei funcții $F_1(x)$, care intră în alcătuirea funcției care se integrează, atunci aceasta arată că aproximația luată nu este suficientă și trebuie să punem

$$F_2(x) = \int_a^x f[x, F_1(x)]\,dx + b \tag{**}$$

și luînd ca nouă aproximație

$$y = F_2(x),$$

să repetăm acest proces și să-l prelungim pînă cînd vom atinge cu gradul de aproximație cerut egalitatea

$$F_k(x) = \int_a^x f[x, F_k(x)]\,dx + b. \tag{26}$$

Este necesar să avem aici în vedere următorul fapt: funcțiile $F_1(x)$, $F_2(x)$,... nu vor fi cunoscute prin expresiile lor analitice, ci vor fi date sau definite numai sub formă tabelară; aceasta înseamnă că integralele din membrii ai doilea ai egalităților (*) trebuie calculate prin formule aproximative. Este clar că aceste formule trebuie să asigure gradul de aproximație corespunzător celui cerut în metoda folosită, deoarece, altfel, calculul integralelor poate să introducă erorile sale în valorile funcțiilor $F_2(x), F_3(x), \cdots$, și noi, în loc de aproximare, putem să ne îndepărtăm de valorile adevărate ale funcției căutate.

Metodele pentru un astfel de calcul al integralelor definite sînt elaborate în mod amănunțit în aplicație la calcularea perturbațiilor planetare; principalele formule sînt date mai sus în cap. VI. Ele sînt tratate amănunțit în opera lui Th. Oppolzer — „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten", vol. II. Din păcate această lucrare este acum o raritate bibliografică.

Vom folosi formula lui Laplace, suficientă pentru scopurile noastre

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} y\,dx = \left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{1}{12}[\Delta y_{n-1} - \Delta y_0] -$$
$$- \frac{1}{24}[\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0] - \frac{19}{720}[\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0] -$$
$$- \frac{3}{160}[\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0] - \frac{863}{60\,840}[\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0],$$

pe care o scriem pe scurt astfel:

$$Y_n = \int_a^{a+nh} y\,dx = h\,S_n + hQ_n = T_n + P_n,$$

unde

$$T_n = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$$

este termenul principal al formulei, care reprezintă rezultatul calculului integralei după regula „trapezelor", iar P_n este corecția acestui rezultat.

Se înțelege că este mai avantajos să descompunem chiar calculul în două părți, adică să calculăm după schema cunoscută („a sumelor cîte două", „a sumelor superioare") T_n și separat P_n.

§ 99. Pentru ilustrarea metodei expuse mai sus, dăm cîteva exemple, alegîndu-le astfel încît calculul propriu zis al valorilor particulare ale funcției $f(x, y)$ din membrul al doilea al ecuației

$$y' = f(x, y)$$

să fie cît se poate de simplu, deoarece această parte a chestiunii nu cere nici un fel de lămuriri.

Drept prim exemplu luăm ecuația

$$y' = y$$

cu condițiile inițiale: pentru $x=0$, $y=1$ și alcătuim tabela valorilor lui y pentru x mergînd din zecime în zecime.

Această tabelă, aplicînd metoda lui Euler, va avea forma tabelei 57.

Tabela 57

n	x	$y = y'$	hy'
0	0,0	1,0000	0,1000
1	0,1	1,1000	0,1100
2	0,2	1,2100	0,1210
3	0,3	1,3310	0,1331
4	0,4	1,4641	0,1464
5	0,5	1,6105	0,1611
6	0,6	1,7716	0,1772
7	0,7	1,9488	0,1949
8	0,8	2,1437	0,2144
9	0,9	2,3581	0,2358
10	1,0	2,5939	

Modul de alcătuire al acestei tabele rezultă clar din formula

$$y_{n+1} = y_n + hy_n.$$

Luăm valorile obținute drept aproximație inițială, adică punînd

$$y' = F_1(x) = y,$$

calculăm aproximația următoare:

$$F_2(x) = \int_0^x F_1(x)\,dx + 1,$$

iar valorile funcției $F_1(x)$ le vom lua din tabela precedentă.

Calculul se aranjează așa cum este arătat în tabela 58.

Tabela 58

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
n	x	$y'=y=F_1(x)$	Sumele (I) cîte două	Sumele (II) luate începînd de sus	T_n = (III)$\cdot\frac{1}{2}h$	$h\Delta y'$	$h\Delta^2 y'$	P_n	$F_2(x)$ = (IV)+(VII)
0	0,0	1,0000		0,0000	0,0000	0,0100	0,0010	—0,0000	1,0000
			2,1000						
1	0,1	1,1000		2,1000	0,1050	0,0110	0,0011	—0,0001	1,1049
			2,3100						
2	0,2	1,2100		4,4100	0,2205	0,0121	0,0012	—0,0002	1,2203
			2,5410						
3	0,3	1,3310		6,9510	0,3476	0,0133	0,0013	—0,0003	1,3473
			2,7951						
4	0,4	1,4641		9,7461	0,4873	0,0146	0,0015	—0,0004	1,4869
			3,0746						
5	0,5	1,6105		12,8207	0,6410	0,0161	0,0016	—0,0005	1,6405
			3,3821						
6	0,6	1,7716		16,2028	0,8101	0,0177	0,0018	—0,0006	1,8095
			3,7204						
7	0,7	1,9488		19,9232	0,9962	0,0195	0,0019	—0,0008	1,9954
			4,0925						
8	0,8	2,1437		24,0157	1,2008	0,0214	0,0022	—0,0010	2,1998
			4,5018						
9	0,9	2,3581		28,5175	1,4259	0,0236		—0,0012	2,4247
			4,9520						
10	1,0	2,5939		33,4695	1,6735			—0,0014	2,6721

Scanned with OKEN Scanner

Comparînd mărimile $F_1(x)$ și $F_2(x)$, observăm că egalitatea $F_2(x) = F_1(x)$ încă nu este suficientă în limitele preciziei calculului și de aceea luînd $y = F_2(x)$ și prin urmare și $y' = F_2(x)$, formăm expresia

$$F_3(x) = \int_0^x F_2(x)\,dx + 1$$

și continuăm acest proces atît timp pînă cînd două aproximații ce se succed coincid cu gradul de aproximație cerut.

Rezultatele obținute sînt date în tabela 59.

Tabela 59

n	x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	e^x
0	0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,00000
1	0,1	1,1000	1,1049	1,1051	1,1051	1,1051	1,1051	1,10517
2	0,2	1,2100	1,2203	1,2213	1,2214	1,2214	1,2214	1,22140
3	0,3	1,3310	1,3473	1,3496	1,3498	1,3499	1,3499	1,34986
4	0,4	1,4641	1,4870	1,4912	1,4918	1,4921	1,4918	1,49183
5	0,5	1,6105	1,6406	1,6475	1,6486	1,6488	1,6488	1,64872
6	0,6	1,7716	1,8096	1,8299	1,8219	1,8222	1,8222	1,82212
7	0,7	1,9488	1,9955	2,0099	2,0137	2,0138	2,0138	2,01375
8	0,8	2,1437	2,1999	2,2195	2,2249	2,2255	2,2256	2,22554
9	0,9	2,3581	2,4248	2,4501	2,4582	2,4594	2,4597	2,45960
10	1,0	2,5939	2,6711	2,7046	2,7158	2,7179	2,7187	2,71828

Deoarece soluția ecuației este

$$y = e^x,$$

în ultima coloană a tabelei am dat și aceste valori, pentru a putea face o comparație a rezultatelor aproximative cu cele exacte.

Comparînd pe $F_5(x)$ și $F_6(x)$ vedem că în limitele erorilor calculelor se poate considera că funcția limită este atinsă și într-adevăr, $F_6(x)$, se deosebește de adevărata soluție e^x nu mai mult decît prin a patra cifră de după virgulă, pe care în general calculele noastre nu o pot garanta.

Acest exemplu arată că pentru mărimea aleasă a intervalului, prima aproximație euleriană, dacă o luăm drept aproximație inițială în metoda lui Picard, ar cere o integrare repetată de cinci ori pentru obținerea gradului de aproximație limitat cu care s-au efectuat calculele. Este clar că ar fi avantajos fie să se micșoreze intervalul h, fie să se aplice o altă metodă pentru obținerea unei aproximații inițiale mai exacte. Se înțelege că, judecînd după cantitatea de muncă, micșorarea de două ori a interva-

Scanned with OKEN Scanner

lului este echivalentă cu calculul după schema simplificată a lui Runge, adică pentru ecuația

$$y' = f(x, y),$$

conform formulelor

$$\alpha_n = f(x_n, y_n),$$

$$\xi_n = x_n + \frac{1}{2}h, \quad \eta_n = y_n + \frac{1}{2}\alpha_n h, \quad \beta_n = f(\xi_n, \eta_n), \; y_{n+1} = y_n + \beta_n h,$$

deoarece în ambele procese se cere calcularea aceluiași număr de valori particulare ale lui $f(x, y)$, ceea ce de obicei reprezintă partea cea mai laborioasă.

Calculul pentru exemplul considerat, efectuat conform formulelor precedente, este dat în tabela 60.

Tabela 60

n	x	$y_n = y_{n-1} + h\beta_n$	$\alpha_n = f(x_n, y_n)$	$\frac{1}{2}h\alpha_n$	$\eta_n = y_n + \frac{1}{2}h\alpha_n$	$\beta_n = f(\xi_n, \eta_n)$	$h\beta_n$
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0500			
					1,0500	1,0500	0,1050
1	0,1	1,1050	1,1050	0,0552			
					1,1602	1,1602	0,1160
2	0,2	1,2210	1,2210	0,0611			
					1,2821	1,2821	0,1282
3	0,3	1,3492	1,3492	0,0675			
					1,4167	1,4167	0,1417
4	0,4	1,4909	1,4909	0,0745			
					1,5654	1,5654	0,1565
5	0,5	1,6474	1,6474	0,0824			
					1,7298	1,7298	0,1730
6	0,6	1,8204	1,8204	0,0910			
					1,9114	1,9114	0,1911
7	0,7	2,0115	2,0115	0,1006			
					2,1121	2,1121	0,2112
8	0,8	2,2227	2,2227	0,1111			
					2,3338	2,3338	0,2334
9	0,9	2,4561	2,4561	0,1288			
					2,5789	2,5789	0,2579
10	1,0	2,7140	2,7140				

Se vede din aceste valori că rezultatul obținut corespunde prin precizia sa aproximativ lui $F_4(x)$, ceea ce înseamnă că se cere pentru obținerea rezultatului final încă două integrări. Astfel, plecînd de la prima aproximație euleriană trebuia să calculăm $6n$ valori ale funcției $f(x, y)$, iar aici numai $4n$.

Cu ajutorul metodei lui Adams, obținem tabela 61.

În afară de aceasta, pentru început, conform schemei din § 94, avem drept completare a tabelei 61, tabela 62.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 61

n	x	y	Δy	$\eta = hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	0,0	1,0000		0,1000		
			0,1051		0,0105	
1	0,1	1,1051		0,1105		0,0011
			0,1160		116	
2	0,2	1,2211		0,1221		13
			0,1284		129	
3	0,3	1,3495		0,1350		13
			0,1420		142	
4	0,4	1,4915		0,1492		14
			0,1569		156	
5	0,5	1,6484		0,1648		18
			0,1732		174	
6	0,6	1,8216		0,1822		17
			0,1916		191	
7	0,7	2,0132		0,2013		21
			0,2114		212	
8	0,8	2,2246		0,2225		23
			0,2350		235	
9	0,9	2,4596		0,2460		
			0,2587			
10	1,0	2,7183				

Tabela 62

n	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	1,0000		0,1000		
		0,1000		0,0100	
1	1,1000		0,1100		
		0,1100			
2	1,2100				
0	1,0000		0,1000		
		0,1049		0,0105	
1	1,1049		0,1105		0,0011
		0,1158		0,0116	
2	1,2207		0,1221		
0	1,000				
		0,1051			
1	1,1051				
		0,1160			
2	1,2211				

$$\Delta y_0 = 0{,}1000 + 0{,}0050 - 0{,}0001 = 0{,}1049$$
$$\Delta y_1 = 0{,}1100 + 0{,}0050 + 0{,}0008 = 0{,}1158$$
$$\Delta y_0 = 0{,}1000 + 0{,}0052 - 0{,}0001 = 0{,}1051$$
$$\Delta y_1 = 0{,}1000 + 0{,}0052 + 0{,}0008 = 0{,}1160$$

Scanned with OKEN Scanner

La compararea cu tabela 59, se vede că aproximația obținută după metoda lui Adams este cea finală, ceea ce s-ar fi putut deduce și a priori din mărimile diferențelor de ordinul al doilea, deoarece este clar că termenul $\frac{3}{8}\Delta^3\eta_n$ nu depășește $^1/_2$ din unitatea celei de a patra zecimale și înseamnă că nu influențează rezultatul.

Tabela 63

x	$f(x)$	$F(x)$
0,0	0,00000	0,00000
0,1	0,02108	0,04143
0,2	0,07413	0,17368
0,3	0,15127	0,20935
0,4	0,24297	0,32551
0,5	0,36624	0,46041
0,6	0,50089	0,61275
0,7	0,65226	0,78176
0,8	0,80961	0,96667
0,9	0,99175	1,16688
1,00	1,18879	1,37687

Astfel, aici a trebuit să se calculeze în total n valori ale funcției $f(x, y)$, ceea ce ia aproximativ de 4—6 ori mai puțină muncă decît se cerea în metodele precedente. În aceasta constă principalul merit al metodei lui Adams.

§ 100. Pentru a ilustra mai bine metodele lui Runge și Adams luăm un exemplu dat în lucrarea abatelui *Moigno* „Lecons de calcul différentiel et du calcul integral", alcătuită după lecțiile lui *Cauchy*.

Acest exemplu este următorul:

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y};$$

condiția inițială: pentru $x = 0$, $y = 0$; se cere să se alcătuiască tabela valorilor funcției y de la $x = 0$ pînă la $x = 1$.

În lucrarea indicată se alcătuiește tabela 63 a valorilor între care este cuprinsă mărimea y după metoda lui Cauchy. În intervalul considerat are loc dubla inegalitate

$$f(x) < y < F(x).$$

După cum se vede, limitele sînt foarte largi.

În cazul acestei ecuații, pentru $x=0$, are loc tocmai faptul dezavantajos pe care l-a remarcat încă Euler; derivata lui y se anulează, iar derivatele de ordin superior sînt infinite și de aceea pentru valorile apropiate de $x=0$ metodele expuse mai sus nu sînt aplicabile și este mult mai simplu să se dezvolte y în serie după puterile lui x (aceste puteri nu vor fi întregi) și calculînd conform acestei serii valoarea lui y pentru un x oarecare, diferit de zero, se aplică una din metodele expuse mai sus pentru obținerea celorlalte valori. Pentru a face această dezvoltare mai simplu, punem de la început $x=t^4$ și vom avea

$$\frac{dy}{dt} = 4t^5 + 4t^3\sqrt{y}.$$

Făcînd apoi

$$y = t^6\left(\frac{2}{3} + \eta\right)$$

și notînd derivata după t cu un accent, avem:

$$t\eta' + 6\eta = 4t\sqrt{\frac{2}{3} + \eta}.$$

Punînd

$$\eta = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \ldots,$$

avem:

$$t\eta' + 6\eta = t\,[7\alpha + 8\beta t + 9\gamma t^2 + 10\delta t^3 + \ldots];$$

pentru determinarea coeficienţilor α, β, γ, δ,... obţinem:

$$[7\alpha + 8\beta t + 9\gamma t^2 + 10\delta t^3 + \ldots]^2 = 16\left[\frac{2}{3} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots\right].$$

De aici rezultă ecuaţiile

$$49\alpha^2 = \frac{32}{3},$$

$$112\alpha\beta = 16\alpha,$$

$$64\beta^2 + 126\alpha\gamma = 16\beta,$$

$$144\beta\gamma + 140\alpha\delta = 16\gamma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vom avea deci

$$\alpha = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \beta = \frac{1}{7}, \quad \gamma = \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \delta = -\frac{2}{1715}, \ldots$$

Aşadar obţinem

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{1715}x^{\frac{5}{2}} + \ldots$$

Pentru valori mici ale lui x (apropiate de 0,1), termenii obţinuţi sînt suficienţi pentru a găsi valoarea lui y exact pînă la a cincea zecimală, fapt de care ne convingem calculînd pe y', atît din ecuaţia precedentă

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

cît şi din seria

$$y' = x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{7}x + \frac{9}{196}\sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{343}x^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

după cum se vede în tabela 64.

Prin urmare, dacă calculăm cu cinci zecimale, se poate considera, că y trebuie să satisfacă ecuaţia

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

şi că pentru x=0,1, trebuie ca y=0,030898, respectiv y' = 0,49201.

Pentru valorile lui x, mai mici decît 0,1, mărimea y se determină prin seria dată mai sus, iar pentru valori mai mari decît 0,1, vom aplica metoda lui Runge şi metoda lui Adams, pentru a putea compara aceste metode într-un caz concret.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 64

x	y	$y'=\sqrt{x}+\sqrt{y}$	y' după serie
0	0	0	0
0,1	0,030898	0,49201	0,49202
0,2	0,093677	0,75328	0,75331
0,3	0,18020	0,97222	0,97228
0,4	0,28738	1,16857	1,16860
0,5	0,41337	1,35004	1,35004
0,6	0,5570 6	1,52096	1,52108
0,7	0,71738	1,68364	1,68386
0,8	0,89359	1,83973	1,83991
0,9	1,08519	1,99040	1,99067
1,00	1,29158	2,13648	2,13678

Pentru aplicarea metodei lui Runge, cu completarea indicată în § 92, împărțim intervalul dintre $x=0,1$ și $x=1,0$ în două părți: de la $x=0,1$ pînă la $x=0,3$ și de la $x=0,3$ pînă la $x=1$.

Pe prima porțiune luăm $h=\frac{1}{40}=0,025$, pe a doua $h=0,05$; atunci calculul se efectuează după cum este arătat în tabela 65.

Pentru verificare, luăm valorile lui y astfel găsite drept primă aproximație $F_1(x)$, alcătuim cu ajutorul lor funcția

$$y'=\varphi(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=f[x, F_1(x)]$$

și după formula

$$F_2(x)=\int_a^x f[x, F_1(x)]\,dx+b$$

pentru $a=0,1$, $b=0,030898$ găsim a doua aproximație după cum se arată în tabela 66.

Pentru comparație, efectuînd același calcul prin metoda lui Adams, obținem tabela 67.

Compararea rezultatelor obținute arată că metoda lui Adams, cu o muncă de cinci sau șase ori mai mică, dă un rezultat identic cu cel precedent.

Scanned with OKEN Scanner

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	
x	y	$\beta=f(x, y)$	$\frac{1}{2}\beta h$	$\eta=y+\frac{1}{2}\beta h$	$\sqrt{\eta}$	$\sqrt{\xi}$	$\gamma=f(\xi\ \eta)$	$\frac{1}{2}h\gamma$	$z=y+\frac{1}{2}h\gamma$	
0,100	0,03090	0,49201	0,00615	0,03705	0,14248	0,33541	0,52789	0,00660	0,03750	0,1
0,125	0,04410	0,56355	0,00704	0,05114	0,22614	0,37081	0,59695	0,00746	0,05156	0,2
0,150	0,05902	0,63024	0,00788	0,06690	0,25865	0,40311	0,66176	0,00827	0,06729	0,2
0,175	0,07556	0,69321	0,00866	0,08422	0,29020	0,43301	0,72321	0,00904	0,08460	0,2
0,200	0,09364	0,75321	0,00941	0,10305	0,32101	0,46098	0,78199	0,00977	0,10341	0,3
0,225	0,11319	0,81076	0,01013	0,12332	0,35117	0,48734	0,83851	0,01048	0,12367	0,3
0,250	0,13415	0,76627	0,01083	0,14498	0,38076	0,51235	0,89311	0,01116	0,14531	0,3
0,275	0,15647	0,91996	0,01150	0,16797	0,40984	0,53619	0,94605	0,01183	0,16830	0,4
0,300	0,18012	0,97213								
0,300	0,18012	0,97213								
0,350	0,23125	1,07249	0,02430	0,24442	0,45213	0,57009	1,02222	0,02555	0,20517	0,45
0,400	0,28727	1,16843	0,02681	0,25806	0,50799	0,61237	1,12036	0,02801	0,25916	0,50
0,450	0,34800	1,26073	0,02921	0,31648	0,56257	0,65192	1,21449	0,03036	0,31763	0,56
0,500	0,41326	1,34996	0,03152	0,37952	0,61605	0,68920	1,24525	0,03263	0,38063	0,61
0,550	0,48292	1,43654	0,03375	0,44701	0,66859	0,72457	1,39316	0,03483	0,44809	0,66
0,600	0,55685	1,52082	0,03591	0,51883	0,72030	0,75829	1,47859	0,03696	0,51988	0,72
0,650	0,63494	1,60306	0,03802	0,59487	0,77127	0,79057	1,56184	0,03905	0,59590	0,77
0,700	0,71710	1,68348	0,04008	0,67502	0,82160	0,82158	1,64318	0,04108	0,67602	0,82
0,750	0,80324	1,76226	0,04209	0,75919	0,87131	0,85147	1,72278	0,04307	0,76017	0,87
0,800	0,89328	1,83966	0,04406	0,84730	0,92049	0,88534	1,80083	0,04502	0,84826	0,92
0,850	0,98715	1,91550	0,04599	0,93927	0,96916	0,90830	1,87746	0,04693	0,94021	0,96
0,900	1,08479	1,99021	0,04789	1,03504	1,01737	0,93541	1,95278	0,04882	1,03597	0,01
0,950	1,18614	2,06377	0,04975	1,13454	1,06515	0,96177	2,02692	0,05067	1,13546	0,06
1,000	1,29114	2,13628	0,05159	1,23773	1,11254	0,98742	2,09906	0,05250	1,23864	0,11

Scanned with OKEN Scanner

VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
$\sqrt{\xi}$	$\gamma=f(\xi\ \eta)$	$\frac{1}{2}h\gamma$	$z=y+\frac{1}{2}h\gamma$	$\sqrt{z}$	$\delta=f(\xi,z)$	$u=y+h\gamma$	$\sqrt{u}$	$\sqrt{x}$	$\varepsilon=f(x,u)$	$\frac{1}{2}(\beta+\delta)$	$\frac{1}{2}(\beta+\varepsilon)$
						0,03090		0,31623			
,33541	0,52789	0,00660	0,03750	0,19365	0,52906	0,04410	0,21000	0,35355	0,56355	0,51053	0,52778
37081	0,59695	0,00746	0,05156	0,22707	0,59788	0,05902	0,24294	0,38730	0,63024	0,58072	0,59690
40311	0,66176	0,00827	0,06729	0,25940	0,66251	0,07556	0,27488	0,41833	0,69321	0,64638	0,66172
43301	0,72321	0,00904	0,08460	0,29086	0,72387	0,09364	0,30600	0,44721	0,75321	0,70854	0,72321
46098	0,78199	0,00977	0,10341	0,32157	0,78255	0,11318	0,33642	0,47434	0,81046	0,76788	0,78199
48734	0,83851	0,01048	0,12367	0,35157	0,83901	0,13415	0,36627	0,50000	0,86627	0,82488	0,83851
51235	0,89311	0,01116	0,14531	0,38119	0,89354	0,15647	0,39556	0,52440	0,91996	0,87990	0,89311
53619	0,94605	0,01183	0,16830	0,41024	0,94643	0,18013	0,42441	0,54772	0,97213	0,93320	0,94605
						0,18012		0,54772			
57009	1,02222	0,02555	0,20517	0,45350	1,02356	0,23122	0,48085	0,59161	1,07246	0,99786	1,02230
61237	1,12036	0,02801	0,25916	0,50918	1,12155	0,28727	0,53397	0,63246	1,16843	1,09702	1,12046
65192	1,21449	0,03036	0,31763	0,56358	1,21550	0,34799	0,58990	0,67082	1,26072	1,19196	1,21458
68920	1,24525	0,03263	0,38063	0,61695	1,30613	0,41326	0,64285	0,70711	1,34996	1,28344	1,30534
72457	1,39316	0,03483	0,44809	0,66939	1,39396	0,48292	0,69492	0,74162	1,43654	1,37196	1,39325
75829	1,47859	0,03696	0,51988	0,72102	1,47931	0,55684	0,74621	0,77460	1,52081	1,45792	1,47868
79057	1,56184	0,03905	0,59590	0,77195	1,56252	0,63495	0,79684	0,80623	1,60307	1,54167	1,56195
82158	1,64318	0,04108	0,67602	0,82220	1,64378	0,71710	0,84682	0,83666	1,68348	1,62342	1,64328
85147	1,72278	0,04307	0,76017	0,87187	1,72334	0,80324	0,89623	0,86603	1,76226	1,70341	1,72287
88034	1,80083	0,04502	0,84826	0,92101	1,80135	0,89328	0,94518	0,89443	1,83956	1,78180	1,80091
90830	1,87746	0,04693	0,94021	0,96965	1,87795	0,98714	0,99355	0,92195	1,91550	1,85876	1,87753
93541	1,95278	0,04882	1,03597	0,01784	1,95325	1,08479	1,04153	0,94868	1,99021	1,93438	1,95285
96177	2,02692	0,05067	1,13546	0,06558	2,02735	1,18613	1,08909	0,97468	2,06377	2,00879	2,02699
98742	2,09906	0,05250	1,23864	0,11294	2,10036	1,29114	1,13628	1,00000	2,13628	2,08207	2,10002

XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII
$\sqrt{u}$	$\sqrt{x}$	$\varepsilon = f(x,u)$	$\frac{1}{2}(\beta+\delta)$	$\frac{1}{2}(\beta+\varepsilon)$	$\sigma = \gamma - \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)$	$\frac{1}{6}\sigma$	$\frac{1}{3}\sigma$	$\varphi = (XVII)+(XX)$
	0,31623		0,51053	0,52778	0,00011	0,00002	0,00004	0,51055
0,21000	0,35355	0,56355	0,58072	0,59690	0,00005	0,00001	0,00002	0,58073
0,24294	0,38730	0,63024	0,64638	0,66172	0,00001	0,00001	0,00001	0,64639
0,27488	0,41833	0,69321	0,70854	0,72321	0,00000	0,00000	0,00000	0,70854
0,30600	0,44721	0,75321	0,76788	0,78199	0,00000	0,00000	0,00000	0,76788
0,33642	0,47434	0,81046	0,82488	0,83851	0,00000	0,00000	0,00000	0,82488
),36627	0,50000	0,86627	0,87990	0,89311	0,00000	0,00000	0,00000	0,87990
),39556	0,52440	0,91996	0,93320	0,94605	0,00000	0,00000	0,00000	0,93320
),42441	0,54772	0,97213						
	0,54772		0,99786	1,02230	−0,00008	−0,00001	−0,00003	0,99785
48085	0,59161	1,07246	1,09702	1,12046	−0,00010	−0,00002	−0,00003	1,09700
53397	0,63246	1,16843	1,19196	1,21458	−0,00009	−0,00001	−0,00003	1,19195
58990	0,67082	1,26072	1,28344	1,30534	−0,00009	−0,00001	−0,00003	1,28343
64285	0,70711	1,34996	1,37196	1,39325	−0,00009	−0,00001	−0,00003	1,37195
69492	0,74162	1,43654	1,45792	1,47868	−0,00009	−0,00001	−0,00003	1,45791
74621	0,77460	1,52081	1,54167	1,56195	−0,00011	−0,00002	−0,00004	1,54165
79684	0,80623	1,60307	1,62342	1,64328	−0,00010	−0,00002	−0,00003	1,62340
84682	0,83666	1,68348	1,70341	1,72287	−0,00009	−0,00001	−0,00003	1,70340
89623	0,86603	1,76226	1,78180	1,80091	−0,00008	−0,00001	−0,00003	1,78179
94518	0,89443	1,83956	1,85876	1,87753	−0,00007	−0,00001	−0,00002	1,85875
99355	0,92195	1,91550	1,93438	1,95285	−0,00007	−0,00001	−0,00002	1,93437
04153	0,94868	1,99021	2,00879	2,02699	−0,00007	−0,00001	−0,00002	2,00878
08909	0,97468	2,06377	2,08207	2,10002	−0,00006	−0,00001	−0,00002	2,08205
13628	1,00000	2,13628						

Scanned with OKEN Scanner

III	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX
ε)	$\sigma=\gamma-\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)$	$\frac{1}{6}\sigma$	$\frac{1}{3}\sigma$	$\varphi=$ $=$(XVII)+ +(XX)	$\omega=\gamma-$ $-$(XXI)	$\frac{1}{2}h\varphi$	(II)+ +(XXIV)	$h\omega$	$y=y_n=$ $=y_{n-1}+h\omega$	$\sqrt{y}$	$y'=\sqrt{x}+$ $+\sqrt{y}$
3	0,00011	0,00002	0,00004	0,51055	0,52785	0,00638	0,03728	0,01320	0,03090	0,17578	0,49201
)	0,00005	0,00001	0,00002	0,58073	0,59692	0,00726	0,05136	0,01492	0,04410	0,21000	0,56355
	0,00001	0,00001	0,00001	0,64639	0,66175	0,00808	0,06710	0,01654	0,05902	0,24294	0,63024
	0,00000	0,00000	0,00000	0,70854	0,72321	0,00886	0,08442	0,01808	0,07556	0,27488	0,69321
	0,00000	0,00000	0,00000	0,76788	0,78199	0,00960	0,10324	0,01955	0,09364	0,30600	0,75321
	0,00000	0,00000	0,00000	0,82488	0,83851	0,01031	0,12350	0,02096	0,11319	0,33642	0,81076
	0,00000	0,00000	0,00000	0,87990	0,89311	0,01100	0,14515	0,02232	0,13415	0,36672	0,86627
	0,00000	0,00000	0,00000	0,93320	0,94605	0,01166	0,16813	0,02365	0,15647	0,39556	0,91996
									0,18012	0,42441	0,97213
	-0,00008	-0,00001	-0,00003	0,99785	1,02225	0,02495	0,20507	0,05113	0,18012	0,42441	0,97213
	0,00010	-0,00002	-0,00003	1,09700	1,12039	0,02742	0,25867	0,05607	0,23125	0,48088	1,07249
	),00009	-0,00001	-0,00003	1,19195	1,21452	0,02980	0,31707	0,06073	0,28727	0,53597	1,16843
	),00009	-0,00001	-0,00003	1,28343	1,30528	0,03208	0,39008	0,06526	0,34800	0,58991	1,26073
	,00009	-0,00001	-0,00003	1,37195	1,39319	0,03430	0,44756	0,06966	0,41326	0,64285	1,34996
	00009	-0,00001	-0,00003	1,45791	1,47862	0,03645	0,51937	0,07393	0,48292	0,69492	1,43654
	)0011	-0,00002	-0,00004	1,54165	1,56188	0,03854	0,59539	0,07809	0,55685	0,74622	1,52082
	)0010	-0,00002	-0,00003	1,62340	1,64321	0,04057	0,67551	0,08216	0,63494	0,79683	1,60306
	)0009	-0,00001	-0,00003	1,70340	1,72281	0,04259	0,75969	0,08614	0,71710	0,84682	1,68348
	0008	-0,00001	-0,00003	1,78179	1,80086	0,04454	0,84778	0,09004	0,80324	0,89623	1,76226
	)007	-0,00001	-0,00002	1,85875	1,87748	0,04647	0,93975	0,09387	0,89323	0,94513	1,83956
	)007	-0,00001	-0,00002	1,93437	1,95280	0,04836	1,03551	0,09764	0,98715	0,99355	1,91550
	)07	-0,00001	-0,00002	2,00878	2,02604	0,05022	1,13501	0,10135	1,08479	1,04153	1,99021
	006	-0,00001	-0,00002	2,08205	2,09998	0,05205	1,23819	0,10500	1,18614	1,08909	2,06377
									1,29114	1,13628	2,13628

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 66

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
x	Valoarea necorectată a lui y	$y'=\beta$	Sumă (III) cîte două	Sumele (IV) începînd de sus S	$T=\frac{1}{2}hS$	y_0+T	$\Delta\beta$	Corecții $\frac{1}{12}h(\Delta\beta_0-\Delta\beta_1)$	y corectat
0,100	0,03090	0,49201			0,00000	0,03090			
			1,02050				0 03648		0,03090
	0,03728	0,52849		1,02050	0,00638	0,03728		0,00000	
			1,09205				0,03506		0,03728
0,125	0,04410	0,56355		2,11259	0,01320	0,04410		0,00000	
			1,16099				0,03389		0,04410
	0,05136	0,59744		3,27358	0,02046	0,05136		0,00000	
			1,22768				0,03280		0,05136
0,150	0,05902	0,63024		4,50126	0,02813	0,05903		0,00000	
			1,29239				0,03141		0,05903
	0,06710	0,66215		5,79365	0,03621	0,06711		0,00001	
			1,35536				0,03106		0,06712
0,175	0,07556	0,69321		7,14901	0,04468	0,07558		0,00001	
			1,41678				0,03036		0,07559
	0,08442	0,72357		8,56579	0,05354	0,08444		0,00001	
			1,47678				0,02964		0,08445
0,200	0,09364	0,75321		10,04257	0,06276	0,09366		0,00001	
			1,53549				0,02927		0,09367
	0,10324	0,78228		11,57806	0,07236	0,10326		0,00001	
			1,59304				0,02848		0,10327
0,225	0,11319	0,81076		13,17110	0,08232	0,11322		0,00001	
			1,64343				0,02801		0,11323
	0,12350	0,83877		14,82053	0,09263	0,12353		0,00001	
			1,70504				0,02750		0,12354
0,250	0,13415	0,86627		16,52557	0,10328	0,13418		0,00001	
			1,75961				0,02707		0,13419
	0,14515	0,89334		18,28518	0,11428	0,14518		0,00001	
			1,81330				0,02662		0,14519
0,275	0,15647	0,91996		20,09848	0,12561	0,15651		0,00001	
			1,86619				0,02627		0,15652
	0,16813	0,94623		21,46467	0,13728	0,16818		0,00001	
			1,91836				0,02590		0,16819
0,300	0,18012	0,97213		23,88303	0,14927	0,18018		0,00001	
			1,99507				0,05031		0,18019
	0,20507	1,02294		1,99507	0,02494	0,20512		0,00000	
			2,09543				0,04955		0,20512
0,350	0,23125	1,07249		4,09050	0,05113	0,23121		0,00000	
			2,19346				0,04848		0,23134
	0,25867	1,12097		6,28396	0,01855	0,25873		0,00000	
			2,28980				0,04746		0,25873
0,400	0,28727	1,16843		8,57336	0,10717	0,2873 5		0,00001	
			2,38344				0,04658		0,28738
	0,31707	1,21501		10,95680	0,13696	0,31714		0,00001	
			2,47574				0,04572		0,31715
0,450	0,34800	1,26073		13,43254	0,16791	0,34809		0,00001	
			2,56643				0,04497		0,34810
	0,38008	1,30570		15,99897	0,19999	0,38017		0,00001	
			2,65567				0,04426		0,38018
0,500	0,41326	1,34995		18,65463	0,23318	0,41336		0,00001	
			2,74352				0,04360		0,41337
	0,44756	1,39356		21,39815	0,26748	0,44766		0,00001	
			2,83010				0,04318		0,44767
0,550	0,48292	1,43654		24,22825	0,30285	0.48303		0,00002	0,48315

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 66 (continuare)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
x	valoarea necorectată a lui y	$y'=\beta$	Suma (III) cîte două	Sumele (IV) începînd de sus S	$T=\frac{1}{2}hS$	y_0+T	$\Delta\beta$	Corecții $\frac{1}{12}h(\Delta\beta_0-\Delta\beta_1)$	y corectat
			2,91550				0,04238		
	0,51937	1,47896		27,14375	0,33930	0,51948		0,00002	0,51950
			2,99978				0,04186		
0,600	0,55685	1,52082		30,14353	0,37679	0,55697		0,00002	0,55699
			3,08302				0,04138		
	0,59539	1,56220		33,22655	0,41533	0,59451		0,00002	0,59553
			3,16526				0,04086		
0,650	0,63494	1,60306		36,39181	0,45490	0,63508		0,00002	0,63210
			3,24654				0,04044		
	0,67551	1,64348		39,63834	0,49548	0,67566		0,00002	0,67568
			3,32696				0,04090		
0,700	0,71710	1,68348		42,96530	0,53707	0,71725		0,00002	0,71727
			3,40655				0,03959		
	0,75969	1,72307		46,37185	0,57965	0,75983		0,00002	0,75985
			3,48533				0,03919		
0,750	0,80324	1,76226		49,85718	0,62321	0,80339		0,00002	0,80341
			3,56335				0,03883		
	0,84778	1,80109		53,42053	0,66776	0,84794		0,00002	0,84796
			3,64065				0,03847		
0,800	0,89328	1,83956		57,06118	0,71326	0,89344		0,00003	0,89347
			3,71727				0,03815		
	0,93975	1,87771		60,77845	0,75973	0,93991		0,00003	0,93994
			3,79321				0,03779		
0,850	0,98715	1,91550		64,57166	0,80715	0,98733		0,00003	0,98736
			3,86851				0,03751		
	1,03551	1,95301		68,44017	0,85550	1,03568		0,00003	1,03571
			3,94322				0,03720		
0,900	1,08479	1,99021		72,38339	0,90479	1,08497		0,00003	1,08500
			4,01735				0,03693		
	1,13501	2,02714		76,40074	0,95501	1,13519		0,00003	1,13522
			4,09094				0,03663		
0,950	1,18614	2,06377		80,49165	1,00615	1,18633		0,00003	1,18636
			4,16393				0,03639		
	1,23890	2,10016		84,65558	1,05819	1,23837		0,00003	1,26840
			4,23644				0,03612		
1,000	1,29114	1,13628		83,89202	1,11125	1,29133		0,00003	1,29136

Tabela 67

I	II	III	IV	V	VI
x	y	$\Delta y_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$	$\eta=y'h$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0,100	0,03090		0,00615		
		0,00638		0,00045	
	0,03728		0,00660		−0,00001
		0,00682		0,00044	
0,125	0,04410		0,00704		−0,00001
		0,00726		0,00043	

I	II	III
$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
0,31623		
0,33541		
0,35355		

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 67 (continuare)

I	II	III	IV	V	VI	I	II	III
x	y	$\Delta y_n=\eta_n+$ $+\frac{1}{2}\Delta_{\eta n-1}+$ $+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$	$\eta=y'h$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'=$ $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
	0,05136		0,00477		−0,00002	0,37081	0,22661	0,59742
		0,00768		0,00041				
0,150	0,05904		0,00788		−0,00001	0,38730	0,24298	0,63028
		0,00808		0,00040				
	0,06712		0,00828		−0,00002	0,40311	0,25908	0,66219
		0,00848		0,00038				
0,175	0,07560		0,00866		−0,00000	0,41833	0,27495	0,69310
		0,00884		0,00038				
	0,08444		0,00904		−0,00000	0,43301	0,29059	0,72360
		0,00923		0,00038				
0,200	0,09367		0,00942		−0,00002	0,44721	0,30605	0,75326
		0,00961		0,00036				
	0,10328		0,00978		−0,00000	0,46098	0,32138	0,78236
		0,00995		0,00036				
0,225	0,11323		0,01014		−0,00001	0,47434	0,33650	0,81084
		0,01032		0,00035				
	0,12355		0,01049		−0,00001	0,48734	0,35150	0,83884
		0,01066		0,00034				
0,250	0,13421		0,01083		−0,00000	0,50000	0,36634	0,86634
		0,01099		0,00034				
	0,14520		0,01117		−0,00001	0,51235	0,38105	0,89340
		0,01134		0,00033				
0,275	0,15654		0,01150		−0,00000	0,52440	0,39565	0,92005
		0,01166		0,00033				
	0,16820		0,01183		−0,00001	0,53619	0,41012	0,94631
		0,01199		0,00032				
0,300	0,18019		0,01215			0,54772	0,42449	0,97221
0,250	0,13421		0,02166					
				0,00134				
0,275	0,15634		0,02300		−0,00004			
				0,00130				
0,300	0,18019		0,02430		−0,00003	0,54772	0,42449	0,97221
		0,02493		0,00127				
	0,20512		0,02557		−0,00003	0,57009	0,45290	1,02299
		0,02619		0,00124				
0,350	0,23131		0,02681		−0,00002	0,59161	0,48095	1,07256
		0,02742		0,00122				
	0,25873		0,02803		−0,00004	0,61237	0,50865	1,12102
		0,02863		0,00118				
0,400	0,28736		0,02921		−0,00001	0,63246	0,53606	1,16352
		0,02979		0,00117				
	0,31715		0,03038		−0,00003	0,65192	0,56316	1,21508
		0,03096		0,00114				
0,450	0,34811		0,03152		−0,00002	0,67082	0,59001	1,26083
		0,03207		0,00112				
	0,38018		0,03264		−0,00001	0,68920	0,61695	1,30579
		0,03319		0,00111				
0,500	0,41337		0,03375		−0,00002	0,70711	0,64294	1,35005
		0,03430		0,00109				
	0,44767		0,03484		−0,00001	0,72457	0,66908	1,39365
		0,03538		0,00108				

Tabela 67 (continuare)

I	II	III	IV	V	VI	I	II	III
x	y	$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$	$\eta = y'h$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
0,550	0,48305		0,03592		−0,00002	0,74162	0,69509	1,43671
		0,03646		0,00106				
	0,51951		0,03698		−0,00002	0,75829	0,72077	1,47906
		0,03749		0,00104				
0,600	0,55700		0,03802		−0,00000	0,77460	0,74632	1,52092
		0,03851		0,00104				
	0,59551		0,03906		−0,00002	0,79057	0,77169	1,56226
		0,03958		0,00102				
0,650	0,63509		0,04008		−0,00001	0,80623	0,79057	1,60315
		0,04059		0,00101				
	0,67568		0,04109		−0,00001	0,82158	0,82199	1,64357
		0,04159		0,00100				
0,700	0,71727		0,04209		−0,,0001	0,83666	0,84692	1,68358
		0,04258		0,00099				
	0,75985		0,04308		−0,00001	0,85147	0,87169	1,72316
		0,04357		0,00098				
0,750	0,80342		0,04406		−0,00001	0,86603	0,89634	1,76237
		0,04454		0,00097				
	0,84796		0,04503		−0,00001	0,88034	0,92084	1,80116
		0,04551		0,00096				
0,800	0,89347		0,04599		−0,00001	0,89443	0,94523	1,83966
		0,04647		0,00096				
	0,93994		0,04695		−0,00002	0,90830	0,96950	1,87780
		0,04743		0,00094				
0,850	0,98737		0,04789		−0,00000	0,92195	0,99366	1,91561
		0,04835		0,00094				
	1,03572		0,04883		−0,00001	0,93541	1,01770	1,95311
		0,04930		0,00093				
0,900	1,08502		0,04976		−0,00001	0,94868	1,04164	1,99032
		0,05022		0,00092				
	1,13524		0,05068		−0,00000	0,96177	1,06548	2,02725
		0,05113		0,00092				
0,950	1,18637		0,05160		−0,00002	0,97468	1,08920	2,06388
		0,05206		0,00090				
	1,23843		0,05250			0,98742	1,11285	2,10027
		0,05294						
1,000	1,29137					1,00000	1,13638	2,13638

§ 101. Să dăm, încă un exemplu de integrare a unui sistem de ecuații, pe care o facem cu calcule amănunțite, pentru a ilustra ordinea și modul de efectuare a lor, deoarece după cuvintele lui Newton: „exempla non minus doceunt quam precaepta“.

Dintre toate mișcările unui corp liber, după corpurile cerești, mișcarea obuzelor de artilerie este cea mai semnificativă. Este posibil ca aceasta să fie una din cauzele care a condus la cercetarea acestei probleme de către matematicieni care nu au fost nici militari, nici artileriști. În

Scanned with OKEN Scanner

afară de Euler, al cărui geniu atotcuprinzător a creat în toate domeniile accesibile aplicațiilor matematicii, este suficient să amintim pe J. Bernoulli, Lagrange, Poisson, Jacobi și M. V. Ostrogradski, mărginindu-ne numai la numele celor mai cunoscuți dintre cei care au dat metode generale de cercetare a fenomenului amintit.

Matematicienii artileriști au dezvoltat metode generale, au făcut multe experiențe pentru stabilirea legii de rezistență a aerului, au alcătuit tabele ajutătoare și au pus problema calculului traiectoriei obuzului în concordanță cu cerințele practice.

Războiul mondial trecut [1]) a arătat că în condițiile de luptă pot fi folosite în mai mare măsură decît s-a putut presupune înainte, puterea și precizia tunurilor moderne, și s-a ridicat necesitatea calculării traiectoriilor pentru unghiuri de aruncare și viteze inițiale, pentru care folosirea tabelelor existente presupune o serie de ipoteze a căror influență asupra exactității rezultatului final nu poate fi evaluată a priori.

S-a pus problema corectării a posteriori a acestor metode simplificate de calcul al traiectoriei, comparîndu-se rezultatele obținute în ipotezele admise la alcătuirea tabelelor, cu rezultatele obținute cu ajutorul calculelor făcute fără considerarea acestor ipoteze și care, în acest sens, sînt exacte.

Un astfel de calcul exact al traiectoriei, poate fi făcut mai simplu decît pe orice altă cale folosind metoda lui Adams-Störmer pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare și este un bun exemplu pentru modul în care se aplică atît această metodă cît și unele metode de calcul aplicabile în multe probleme inginerești.

§ 102. Să luăm gura țevii drept origine a coordonatelor, planul de tragere drept plan xOy, îndreptînd axa y pe verticală în sus și luăm ca variabilă independentă unghiul de înclinare al traiectoriei, măsurat de la axa Oy. Ecuațiile fundamentale ale balisticei pentru o traiectorie „plană" sînt:

$$\frac{P}{g}\frac{du}{dt} = -\rho \sin\varphi, \tag{1}$$

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = P \sin\varphi, \tag{2}$$

$$v = \frac{r d\varphi}{dt}, \tag{3}$$

$$dx = r \sin\varphi \, d\varphi, \tag{4}$$

$$dy = r \cos\varphi d\varphi, \tag{5}$$

unde P este greutatea obuzului, g — accelerația gravitațională, v — viteza la momentul t, r — raza de curbură a traiectoriei în punctul (x, y), ρ — rezistența aerului, $u = v \sin\varphi$ — proiecția orizontală a vitezei.

[1]) Este vorba de primul război mondial. Nota trad.

Luînd unghiul φ ca variabilă independentă și notînd derivatele cu accente, avem:

$$u' = -\frac{\rho}{P}\frac{u}{\sin\varphi}, \tag{6}$$

$$x' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2, \tag{7}$$

$$y' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \operatorname{ctg}\varphi, \tag{8}$$

$$t' = \frac{1}{g}\frac{u}{\sin\varphi}\operatorname{cosec}\varphi. \tag{9}$$

Mărimea ρ se exprimă prin formula

$$\rho = AK(v)\, v^2 f(y), \tag{10}$$

iar cantitatea $A=\lambda\pi R^2$ este constantă pentru un obuz dat; R — este semicalibrul, λ — un coeficient de formă, $f(y)$ — densitatea relativă a aerului $K(v)$ și $f(y)$ sînt date prin tabele din care dăm mai jos un extras.

Condițiile inițiale sînt: pentru $\varphi=\varphi_0$

$$\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)_0 = v_0,\ (x)_0 = 0,\ (y)_0 = 0,\ (t)_0 = 0. \tag{11}$$

Pentru simplificarea calculelor ce urmează, scriem ecuația (6) astfel:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{\rho}{P}\operatorname{cosec}\varphi,$$

și notînd cu $M=0{,}43429$ modulul logaritmilor obișnuiți punem

$$q = M\ln\frac{u_0}{u} = \lg\frac{u_0}{u}; \tag{12}$$

atunci

$$q' = -M\frac{u'}{u}$$

și ecuația precedentă va fi:

$$q' = \frac{M\rho}{P}\operatorname{cosec}\varphi. \tag{6'}$$

Astfel sistemul de ecuații (6) — (9) va fi

$$q' = CK(v)\, v^2 f(y)\operatorname{cosec}\varphi, \tag{13}$$

$$y' = \frac{1}{g}v^2\operatorname{ctg}\varphi, \tag{14}$$

$$x' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2, \tag{15}$$

$$t' = \frac{1}{g}\frac{u}{\sin\varphi}\operatorname{cosec}\varphi. \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest sistem se descompune evident în două: 1) ecuaţiile (13) şi (14) care conţin variabila independentă φ şi funcţiile necunoscute y şi v, unde $v = u \operatorname{cosec} \varphi$, $q = \lg \frac{u_0}{u}$, astfel încît $\lg u = \lg u_0 - q$ şi 2) ecuaţiile (15) şi (16) care se integrează dintr-o dată prin cuadraturi după ce u a fost găsit.

Astfel va trebui să integrăm după metoda lui Adams-Störmer sistemul (13) şi (14), iar cuadraturile le găsim cu ajutorul unei metode mult mai simple.

§ 103. Inainte de a face această integrare, dăm tabelele logaritmilor funcţiilor $K(v)$ şi $f(y)$ (tabelele 68 şi 69), bazîndu-ne pe cele date de

Tabela 68

v	lg $K(v)$	v	lg $K(v)$	v	lg $K(v)$	v	lg $K(v)$	v	lg $K(v)$
1100	$\bar{2}$,4843	720	$\bar{2}$,5605	580	$\bar{2}$,5889	440	$\bar{2}$,5955	365	$\bar{2}$,5169
1050	$\bar{2}$,4952	710	$\bar{2}$,5623	570	$\bar{2}$,5905	430	$\bar{2}$,5955	360	$\bar{2}$,4996
1000	$\bar{2}$,5062	700	$\bar{2}$,5642	560	$\bar{2}$,5919	425	$\bar{2}$,5955	355	$\bar{2}$,4806
950	$\bar{2}$,5169	690	$\bar{2}$,5661	550	$\bar{2}$,5930	420	$\bar{2}$,5937	350	$\bar{2}$,4609
900	$\bar{2}$,5273	680	$\bar{2}$,5680	540	$\bar{2}$,5938	415	$\bar{2}$,5900	345	$\bar{2}$,4410
850	$\bar{2}$,5372	670	$\bar{2}$,5700	530	2,5944	410	$\bar{2}$,5853	340	$\bar{2}$,4210
800	$\bar{2}$,5465	660	$\bar{2}$,5720	520	$\bar{2}$,5949	405	$\bar{2}$,5802	335	$\bar{2}$,4010
790	$\bar{2}$,5482	650	$\bar{2}$,5740	510	$\bar{2}$,5953	400	$\bar{2}$,5749	330	$\bar{2}$,3810
780	$\bar{2}$,5499	640	$\bar{2}$,5761	500	$\bar{2}$,5955	395	$\bar{2}$,5696	325	$\bar{2}$,3610
770	$\bar{2}$,5516	630	$\bar{2}$,5782	490	$\bar{2}$,5955	390	$\bar{2}$,5643	320	$\bar{2}$,3410
760	$\bar{2}$,5533	620	$\bar{2}$,5803	480	$\bar{2}$,5955	385	$\bar{2}$,5583	315	$\bar{2}$,3210
750	$\bar{2}$,5551	610	$\bar{2}$,5824	470	$\bar{2}$,5955	380	$\bar{2}$,5511	310	$\bar{2}$,3010
740	$\bar{2}$,5569	600	$\bar{2}$,5846	460	$\bar{2}$,5955	375	$\bar{2}$,5421		
730	$\bar{2}$,5587	590	$\bar{2}$,5869	450	$\bar{2}$,5955	370	$\bar{2}$,5306		

Tabela 69

y	lg $f(y)$	y	lg $f(y)$	y	lg $f(y)$	y	lg $f(y)$	y	lg $f(y)$
0	0,0000	5	$\bar{1}$,7551	10	$\bar{1}$,4771	15	$\bar{1}$,1430	20	$\bar{2}$,7993
1	$\bar{1}$,9533	6	$\bar{1}$,7024	11	$\bar{1}$,4150	16	$\bar{1}$,0719	21	$\bar{2}$,7324
2	$\bar{1}$,9053	7	$\bar{1}$,6484	12	$\bar{1}$,3502	17	$\bar{1}$,0000	22	$\bar{2}$,6744
3	$\bar{1}$,8561	8	$\bar{1}$,5933	13	$\bar{1}$,2833	18	$\bar{2}$,9294	23	$\bar{2}$,5964
4	$\bar{1}$,8062	9	$\bar{1}$,5366	14	$\bar{1}$,2148	19	$\bar{2}$,8633	24	$\bar{2}$,5284

Scanned with OKEN Scanner

Zabudski în „Внешняя балистика“ și în lucrarea lui V. M. Trofimov, atenuînd în prima mersul intrucîtva neregulat al diferențelor, în vederea ușurării controlului calculelor. Pentru această atenuare am folosit în parte interpolarea grafică, făcînd figura la o scară mare și, în parte tabelele lui Krupp și tabela lui Bashforth.

§ 104. Pentru exemplul nostru luăm calculul traiectoriei obuzului englez de 12 țoli (304,8 mm), pentru tunul lui Armstrong, aruncat sub un unghi de înălțător de 55° ($\varphi=55°$) cu viteza inițială $v_0=800$ m/s. Considerăm că obuzul este ușor (greutatea $P=360$ kg) și că partea sa anterioară este teșită ($\lambda=1$) pentru ca influența rezistenței aerului să fie cît mai mare și pentru ca toate particularitățile calculului să se manifeste în mod cît mai clar.

Astfel, pentru calculul nostru avem:

1) *Date*:

$$P = 360,\ v_0 = 800,\ g = 9{,}81,\ R = 0{,}1524.$$

2) *Formule*:

$$\rho = \lambda\pi R^2 K\,(v)\,v^2\,f\,(y),$$

$$v = u\ \operatorname{cosec}\varphi,$$

$$q = \lg\frac{u_0}{u},$$

$$\omega = q'h = \frac{M\rho h}{P}\ \operatorname{cosec}\varphi = AK\,(v)\,v^2\,f\,(y)\ \operatorname{cosec}\varphi,$$

unde $A = \dfrac{\pi R^2 l M}{P}$;

$$\eta = hy' = \frac{h}{g}v^2\ \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\Delta q_n = \omega_n + \frac{1}{2}\Delta\omega_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\omega_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3},$$

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}.$$

Intervalul tabelar h se ia atît de mic încît termenul

$$\frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3}$$

să nu depășească zece unități din a cincea zecimală a lui $\lg u$ iar mărimea

$$\frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

să nu depășească 1 m; printr-o astfel de alegere obținem o precizie mai mult decît suficientă pentru practică.

Pentru a începe alcătuirea tabelelor, aplicăm metoda aproximațiilor succesive.

Avem valorile inițiale

$$\varphi_0 = 55°00',\ v_0 = 800,\ R = 0{,}1524,$$

$$\lg u_0 = \lg v_0 \sin\varphi_0 = 2{,}81645.$$

Luăm pentru început

$$h = 0° 15' = 0{,}0043633;$$

atunci avem pentru constante valorile:

$$A = \frac{\pi R^2 h}{P} M \qquad B = \frac{h}{g}$$

$$\lg \pi = 0{,}49715 \qquad \lg h = \bar{3}{,}63982$$

$$2 \lg R = \bar{2}{,}36596 \qquad \operatorname{colg} g = \bar{1}{,}00833$$

$$\lg M = \bar{1}{,}63772 \qquad \lg B = \bar{4}{,}64815$$

$$\lg h = \bar{3}{,}63982$$

$$\operatorname{colg} P = \bar{3}{,}44370$$

$$\lg A = \bar{7}{,}58435$$

sau rotunjind

$$\lg A = \bar{7}{,}5844; \quad \lg B = \bar{4}{,}6481.$$

Apoi alcătuim tabela valorilor lui $\lg A \operatorname{cosec} \varphi$ și $\lg B \operatorname{ctg} \varphi$

Tabela 70

n	φ	$\lg \operatorname{cosec} \varphi$	$\lg \operatorname{ctg} \varphi$	$\lg A \operatorname{cosec} \varphi$	$\lg B \operatorname{ctg} \varphi$
0	55° 00′	0,08664	$\bar{1}$,8452	$\bar{7}$,6710	$\bar{4}$,4933
1	55 15	0,08531	$\bar{1}$,8412	$\bar{7}$,6697	$\bar{4}$,4893
2	55 30	0,08401	$\bar{1}$,8371	$\bar{7}$,6684	$\bar{4}$,4852
3	55 45	0,08271	$\bar{1}$,8331	$\bar{7}$,6671	$\bar{4}$,4812

și calculăm pe ω_0 și η_0:

$$\lg A \operatorname{cosec} \varphi_0 = \bar{7}{,}6710 \qquad \lg B \operatorname{ctg} \varphi_0 = \bar{4}{,}4933$$

$$\lg K(v_0) = \bar{2}{,}5465 \qquad 2 \lg v_0 = 5{,}8062$$

$$2 \lg v_0 = 5{,}8062 \qquad \lg \eta_0 = 2{,}2995$$

$$\lg f(y) = 0{,}0000$$

$$\lg \omega_0 = \bar{2}{,}0237 \qquad \eta_0 = 199{,}3$$

$$\omega_0 = 0{,}01056$$

Prima aproximație

$$\begin{aligned} \Delta q_0 &= \omega_0 \\ \Delta q_0 = \omega_0 &= 0{,}01056 \\ q_0 &= 0{,}00000 \end{aligned}$$

$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0{,}01056$$
$$\lg u_0 = 2{,}81645$$

$$\lg u_1 = \lg u_0 - q_1 = 2{,}80589$$
$$\lg \operatorname{cosec} \varphi_1 = 0{,}08531$$

$$\lg v_1 = 2{,}89120$$
$$v_1 = 778{,}4$$

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= \eta_0 \\ \Delta y_0 = \eta_0 &= 199{,}3 \\ y_0 &= 0{,}0 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 199{,}3$$

A doua aproximație

Folosind valorile lui v_1 și y_1, calculăm pe ω_1 și η_1 și anume:

$$\lg A \operatorname{cosec} \varphi_1 = \bar{7}{,}6697$$
$$\lg K(v_1) = \bar{2}{,}5502$$
$$2 \lg v_1 = 5{,}7824$$
$$\lg f(y_1) = \bar{1}{,}9906$$

$$\lg \omega_1 = \bar{3}{,}9929$$
$$\omega_1 = 0{,}00984$$

$$\lg B \operatorname{ctg} \varphi_1 = \bar{4}{,}4893$$
$$2 \lg v_1 = 5{,}7824$$

$$\lg \eta_1 = 2{,}2717$$
$$\eta_1 = 187{,}0$$

din aceste valori formăm diferențele

$$\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_0 = -0{,}00072; \quad \Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = -12{,}3$$

și luăm apoi

$$\Delta q_0 = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 0{,}01056 - 0{,}00036 = 0{,}01020,$$

$$\Delta q_1 = \omega_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 0{,}00984 - 0{,}00036 = 0{,}00948,$$

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 = 199{,}3 - 6{,}2 = 193{,}1,$$

$$\Delta y_1 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 187{,}0 - 6{,}2 = 180{,}8,$$

după care avem:

$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0{,}01020,$$
$$\lg u_1 = \lg u_0 - q_1 = 2{,}80625, \quad \lg v_1 = 2{,}89156, v_1 = 779{,}0,$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 193{,}1.$$

Valorile

$$v_1 = 779{,}0 \text{ și } y_1 = 193{,}1$$

reprezintă *a doua* aproximație pentru v_1 și y_1.

Scanned with OKEN Scanner

Avem apoi:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 193{,}1 + 180{,}8 = 373{,}9,$$
$$q_2 = q_1 + \Delta q_1 = 0{,}01020 + 0{,}00948 = 0{,}01968,$$
$$\lg u_2 = \lg u_0 - q_2 = 2{,}79677,\ \lg v_2 = 2{,}88078,\ v_2 = 760{,}0.$$

Valorile obținute

$$v_1 = 779{,}0 \text{ și } y_1 = 193{,}1$$

reprezintă a doua aproximație pentru v_1 și y_1; valorile

$$v_2 = 760{,}0 \text{ și } y_2 = 373{,}9$$

formează prima aproximație pentru v_2 și y_2.

A treia aproximație

Din valorile obținute ale lui v_1 și y_1 recalculăm pe ω_1 și η_1 și din valorile lui v_2 și y_2 calculăm din nou ω_2 și η_2:

$$\begin{aligned} \lg A \operatorname{cosec}\varphi_1 &= \overline{7},6697 \\ \lg K(v_1) &= \overline{2},5502 \\ 2\lg v_1 &= 5{,}7831 \\ \lg f(y_1) &= \overline{1},9910 \\ \hline \lg \omega_1 &= \overline{3},9940 \\ \omega_1 &= 0{,}00986 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg B \operatorname{ctg}\varphi_1 &= \overline{4},4893 \\ 2\lg v_1 &= 5{,}7831 \\ \hline \lg \eta_1 &= 2{,}2724 \\ \eta_1 &= 187{,}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg A \operatorname{cosec}\varphi_2 &= \overline{7},6684 \\ \lg K(v_2) &= \overline{2},5533 \\ 2\lg v_2 &= 5{,}7616 \\ \lg f(y_2) &= \overline{1},9826 \\ \hline \lg \omega_2 &= \overline{3},9659 \\ \omega_2 &= 0{,}00925 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg B \operatorname{ctg}\varphi_2 &= \overline{4},4852 \\ 2\lg v_2 &= 5{,}7616 \\ \hline \lg \eta_2 &= 2{,}2468 \\ \eta_2 &= 176{,}5 \end{aligned}$$

Astfel se obține tabela 71

Tabela 71

n	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	0,01056			199,3		
		—70			—12,1	
1	0,00936		9	187,2		1,4
		—61			—10,7	
2	0,00925			176,5		

Pentru calcularea valorilor corectate Δq_0 și Δy_0 se folosesc formulele

$$\Delta q_0 = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\omega_0,$$
$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0,$$

prin urmare vom avea:

$$\Delta q_0 = 1056 - \frac{1}{2} \cdot 70 - \frac{1}{12} \cdot 9 = 1020,$$

$$\Delta y_0 = 199{,}3 - \frac{1}{2} \cdot 12{,}1 - \frac{1}{12} \cdot 1{,}4 = 193{,}1,$$

$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0{,}01020,$$
$$y_0 = y_0 + \Delta y_0 = 193{,}1,$$
$$\lg u_1 = \lg u_0 - q_1 = 2{,}80625.$$

Aceste valori nu se deosebesc practic de cele precedente și prin urmare nu sînt necesare pentru ele corecții suplimentare.

Pentru a obține aproximația următoare a lui v_2 și y_2 trebuie să considerăm că diferențele secunde sînt constante și să aplicăm formulele

$$\Delta q_1 = \omega_1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_1 - \frac{1}{12} \Delta^2\omega_0,$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta\eta_1 - \frac{1}{12} \Delta^2\eta_0;$$

astfel vom avea

$$\Delta q_1 = 986 - \frac{1}{2} \cdot 61 - \frac{1}{12} \cdot 9 = 955,$$

$$\Delta y_1 = 187{,}2 - \frac{1}{2} \cdot 10{,}7 - \frac{1}{12} \cdot 1{,}4 = 181{,}7,$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_1 = 0{,}01975,$$
$$\lg u_2 = \lg u_0 - q_2 = 2{,}79670,$$
$$\lg v_2 = 2{,}88071; \quad v_2 = 759{,}8,$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 374{,}8.$$

Apoi, de asemenea presupunînd constanța diferențelor a doua, avem formulele

$$\Delta q_2 = \omega_2 + \frac{1}{2} \Delta\omega_1 + \frac{5}{12} \Delta^2\omega_0,$$

$$\Delta y_2 = \eta_2 + \frac{1}{2} \Delta\eta_1 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_0,$$

din care obținem

$$\Delta q_2 = 925 - \frac{1}{2} \cdot 61 + \frac{5}{12} \cdot 9 = 898,$$

$$\Delta y_2 = 176{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 107 + \frac{5}{12} \cdot 1{,}4 = 171{,}7,$$

$$q_3 = q_2 + \Delta q_2 = 0{,}01975 + 0{,}00898 = 0{,}02873,$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 374{,}8 + 171{,}7 = 546{,}5,$$
$$\lg u_3 = \lg u_0 - q_3 = 2{,}78772,$$
$$\lg v_3 = 2{,}87043; \quad v_3 = 742{,}1;$$

folosind valorile găsite v_3 și y_3, calculăm pe ω_3 și η_3:

$$\lg A \operatorname{cosec} \varphi_3 = \bar{7},6671 \qquad \lg B \operatorname{ctg} \varphi_3 = \bar{4},4812$$
$$\lg K(v_3) = \bar{2},5565 \qquad 2 \lg r_3 = 5,7420$$
$$2 \lg v_3 = 5,7410 \qquad \lg \eta_3 = 2,2222$$
$$\lg f(y_3) = 1,9745 \qquad \eta_3 = 166,8$$
$$\lg \omega_3 = \bar{3},9391$$
$$\omega_3 = 0,00869$$

Astfel partea de început a tabelei pentru calcule va avea forma tabelei 72

Tabela 72

n	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	$\lg u$	$\lg v$	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y
0	0,01056				2,81645	2,90309	800,0	199,3				0,0
		—70		1020					—12,1		193,1	
1	0,00986		9		2,80625	2,89156	779,0	187,2		1,4		193,1
		—61		955					—10,7		181,7	
2	0,00925		5		2,79670	2,88071	759,8	176,5		1,0		374,8
		—56		898					—9,7		171,7	
3	0,00869				2,78772	2,87043	742,1	166,8				546,5

Observație: diferențele Δq și Δy sînt calculate astfel:

$$\Delta q_0 = 1056 - \frac{1}{2} \cdot 70 - \frac{1}{12} \cdot 9 = 1020, \qquad \Delta y_0 = 199,3 - \frac{1}{2} \cdot 12,1 - \frac{1}{12} \cdot 1,4 = 193,1,$$

$$\Delta q_1 = 986 - \frac{1}{2} \cdot 61 - \frac{1}{12} \cdot 5 = 955, \qquad \Delta y_1 = 187,2 - \frac{1}{2} \cdot 10,7 - \frac{1}{12} \cdot 1,0 = 181,6,$$

$$\Delta q_2 = 925 - \frac{1}{2} \cdot 61 + \frac{1}{12} \cdot 9 = 898, \qquad \Delta y_2 = 176,5 - \frac{1}{2} \cdot 10,7 + \frac{5}{12} \cdot 1,4 = 171,7.$$

După acesta calculul se poate continua după cum se arată în tabelele de mai jos.

§ 105. S-a explicat mai sus în ce mod se începe calculul aplicînd metoda aproximațiilor succesive; putem atinge același scop și pe altă cale, folosind dezvoltarea în serie.

În aplicație la exemplul nostru, această metodă poate fi redată astfel: pentru vitezele v de la 80 pînă la 700 m/s mărimea $K(v)$ se poate exprima prin formula

$$K(v) = 0,0352 + 0,000014v$$

cu întreaga precizie dată de tabelele lui Zabudski, și mărimea $f(y)$ prin formula

$$f(y) = 1 - 0,102y \text{ m} = 1 - 0,000102y \text{ km}.$$

Vom scrie aceste formule pentru prescurtare și pentru generalitate astfel:

$$K_v = a + bv, \quad f(y) = 1 - \alpha y.$$

Prin urmare, vom avea

$$q' = C(a + bv)\, v^2 (1 - \alpha y) \frac{1}{\sin \varphi},$$

unde $C = \frac{A}{h}$

$$y' = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{ctg} \varphi,$$

de unde rezultă, luînd derivata logaritmică

$$\frac{q''}{q'} = \left(\frac{b}{a + bv} + \frac{2}{v}\right) v' - \frac{\alpha y'}{1 - \alpha y} - \operatorname{ctg} \varphi, \qquad (1)$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2}{v} v' - \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi,$$

însă

$$v = \frac{u}{\sin \varphi},$$

ceea ce înseamnă,

$$\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u} - \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{M} q' - \operatorname{ctg} \varphi = -2{,}3026 q' - \operatorname{ctg} \varphi$$

și prin urmare,

$$\frac{y''}{y'} = -\left[\frac{2}{M} q' + \operatorname{tg} \varphi + 3 \operatorname{ctg} \varphi\right] = -[4{,}605 q' + \operatorname{tg} \varphi + 3 \operatorname{ctg} \varphi]. \qquad (2)$$

Luînd mărimea h atît de mică încît să putem considera cu gradul de aproximație cerut

$$q_1 = q_0 + q_0' h + \frac{1}{2} q_0'' h^2,$$

$$y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2$$

și

$$q_2 = q_1 + q_1' h + \frac{1}{2} q_1'' h^2,$$

$$y_2 = y_1 + y_1' h + \frac{1}{2} y_1'' h^2,$$

dispunem acest calcul în ordinea care este indicată în tabela 73.

§ 106. Dăm cîteva lămuriri necesare la tabelele în care este arătat calculul traiectoriei.

1) După ce s-au completat primele patru linii din tabela 74 ($n = 0, 1, 2, 3$), prin metodele date în §§ 104 și 105 pentru control trebuie să fie aplicate ambele metode; calculul se face în continuare.

2) Acest calcul arată imediat că pentru valoarea $h = 0°15'$ a intervalului, diferențele a doua sînt atît de mici, încît fără a periclita exactitatea rezultatului, intervalul poate fi mărit. Această mărire se face prin dublarea intervalului, așa cum se arată în tabela suplimentară.

O astfel de dublare se face şi în cele ce urmează, astfel încît valorile intervalului h sînt:

de la $n = 0$ pînă la $n = 6$,	$h = 0°15' = 0{,}0043633$,
de la $n = 6$ pînă la $n = 13$,	$h = 0°30' = 0{,}0087266$,
de la $n = 13$ pînă la $n = 19$,	$h = 1°00' = 0{,}017453$,
de la $n = 19$ pînă la $n = 57$,	$h = 2°00' = 0{,}034907$.

Conform acestor valori ale lui h factorii constanţi

$$A = \frac{\pi R^2 M}{P} h, \qquad B = \frac{h}{g}$$

au următoarele valori:

	$\lg A$	$\lg B$
de la $n = 0$ pînă la 6	$\bar{7}{,}58435$	$\bar{4}{,}64815$
de la $n = 6$ pînă la 13	$\bar{7}{,}88538$	$\bar{4}{,}94918$
de la $n = 13$ pînă la 19	$\bar{6}{,}18641$	$\bar{3}{,}25021$
de la $n = 19$ pînă la 57	$\bar{6}{,}48744$	$\bar{3}{,}55124$

3) Pentru verificarea rezultatelor, mărimea y este calculată în tabela 75, folosindu-se pentru aceasta formula

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n \qquad y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$

analogă formulelor

$$\Delta x_n = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_n - \frac{1}{12}\Delta^2\xi_n,$$

$$\Delta t_n = \tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau_n - \frac{1}{12}\Delta^2\tau_n,$$

care servesc pentru calcularea lui x şi t.

Formulele

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2},$$

$$\Delta x_n = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2},$$

$$\Delta t_n = \tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\tau_{n-2}$$

se aplică numai la extremitatea finală a fiecărui interval parţial.

4) Pentru a obţine valorile Φ, X, V, T pentru punctul de cădere ($y = 0$) se face o interpolare pentru unghiul φ folosind diferenţele a doua, iar pentru celelalte mărimi folosind valorile găsite pentru φ.

5) Sumarea mărimilor ξ_n şi τ_n dă mărimile x_n şi t_n ; aici corecţiile $\frac{1}{2}\Delta^2\xi_n$ se dovedesc a fi atît de mici, încît pentru majoritatea tabelelor ele nu

Calculul valo

Formule:

$$q' = CK(v)\, v^2 f(y) \operatorname{cosec} \varphi,$$

$$\frac{v'}{v} = -2{,}30 q' - \operatorname{ctg} \varphi.$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{2v'}{v} - \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{h^2}{2} y_n'',$$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
lg C cosec φ	$\bar{4}$,0312	$\bar{4}$,0299	$\bar{4}$,0280	$\bar{4}$,0273
2 lg v	5,8062	5,7833	5,7618	5,7414
lg $K(v)$	$\bar{2}$,5465	$\bar{2}$,5502	$\bar{2}$,5534	$\bar{2}$,5565
lg $f(y)$	0,0000	1,9910	$\bar{1}$,9825	$\bar{1}$,9745
lg q_n'	0,3839	0,3544	0,3263	0,2997
q_n'	2,420	2,260	2,119	1,993
$q_n' h$	0,01056	0,00985	0,00923	0,00870
$-2{,}30\ q_n'$	−5,70	−5,20	−4,87	−4,58
$-\operatorname{ctg} \varphi_n$	−0,70	−0,69	−0,69	−0,68
$v_n' : v_n$	− 6,27	−5,89	− 5,56	−5,26
v_n'	− 5020	−4590	− 4280	−3905
$bv_n' : (a + bv_n)$	− 1,52	−1,40	− 1,30	−1,23
$2v_n' : v_n$	−12,54	−11,78	−11,12	−10,52
$-\alpha y' : (1 - \alpha y)$	− 4,65	−4,40	− 4,29	− 4,12
$-\operatorname{ctg} \varphi_n$	− 0,70	−0,69	− 0,69	− 0,68
$q_n'' : q_n'$	−19,14	−18,27	−17,40	−16,55
q_n''	−47,0	−41,3	−36,8	−32,9
$\frac{1}{2} q_n'' h^2$	− 0,00045	− 0,00039	− 0,00033	−0,00030
$q_{n+1} - q_n$	0,0102	0,0095	0,0089	0,0084
lg u_n	2,8165	2,8064	2,7969	2,7885
lg cosec φ	0,0866	0,0853	0,0840	0,0827
lg v	2,9031	2,8917	2,8809	2,8704
v	800,0	779,3	760,1	742,7

Observație. Comparînd aceste valori v și y_n cu cele precedente, vedem că

Tabela 73

rilor inițiale q_n, y_n, v_n,

$$y' = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{ctg} \varphi, \quad \lg C = 5{,}9446,$$

$$\frac{q''}{q'} = \frac{bv'}{a + bv} + \frac{2v'}{v} - \frac{ay'}{1 - \alpha y} - \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$q_{n+1} = q_n + hq'_n + \frac{h^2}{2} \cdot q''_n,$$

$$h = 0{,}004363; \quad \frac{h^2}{2} = 0{,}0000095,$$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\lg \frac{1}{g} \operatorname{ctg} \varphi$	$\bar{2}{,}8535$	$\bar{2}{,}8495$	$\bar{2}{,}8454$	$\bar{2}{,}8414$
$2 \lg v$	5,8062	5,7833	5,7618	5,7414
$\lg y'_n$	4,6597	4,6328	4,6072	4,5828
y'_n	45 680	42 930	40 460	38 250
$\lg y'_n h$	2,2995	2,2726	2,2470	2,2226
$y'_n h$	199,3	187,3	176,6	166,9
$-\operatorname{ctg} \varphi$	− 0,70	− 0,69	− 0,69	− 0,68
$2v'_n : v_n$	− 12,54	−11,78	− 11,12	− 10,52
$-\operatorname{tg} \varphi$	− 1,43	− 1,44	− 1,45	− 1,47
$y''_n : y'_n$	− 14,67	− 13,91	− 13,26	− 12,67
y''_n	− 671 000	−598 000	− 537 000	−484 900
$\frac{1}{2} y''_n h^2$	− 6,4	− 5,6	− 5,1	− 4,6
$y_{n+1} - y_n$	192,9	181,7	171,5	162,3
y_n	0,0	192,9	374,6	546,1

concordanța este pe deplin satisfăcătoare

Calculul traiec
Integrarea ecua

$$dq = C.K\ (v)\ v^2 f\ (y)\ \text{cosec}\ \varphi\ d\varphi,$$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	$2\lg v$	$\lg K(v)$	$\lg f(y)$	$\lg \text{cosec}\ \varphi$	$\lg \text{ctg}\ \varphi$	$\lg \omega = (III)+(IV)+(V)+(VI)+A$	$\lg \eta$	η
0	55° 00′	5,8062	$\bar{2}$,5465	0,0000	0,0866	$\bar{1}$,8451	$\bar{2}$,0237	2,2995	199,3
1	55 15	5,7832	$\bar{2}$,5502	$\bar{1}$,9910	0,0853	$\bar{1}$,8412	$\bar{3}$,9941	2,2725	187,2
2	55 30	5,7616	$\bar{2}$,5533	$\bar{1}$,9826	0,0840	$\bar{1}$,8371	$\bar{3}$,9659	2,2468	176,5
3	55 45	5,7410	$\bar{2}$,5565	$\bar{1}$,9745	0,0827	$\bar{1}$,8331	$\bar{3}$,9391	2,2222	166,8
4	56 00	5,7216	$\bar{2}$,5595	$\bar{1}$,9669	0,0814	$\bar{1}$,8290	$\bar{3}$,9138	2,1987	158,0
5	56 15	5,7032	$\bar{2}$,5622	$\bar{1}$,9598	0,0802	$\bar{1}$,8249	$\bar{3}$,8898	2,1762	150,0
6	56 30	5,6854	$\bar{2}$,5649	$\bar{1}$,9529	0,0789	$\bar{1}$,8208	$\bar{2}$,1675	2,4553	285,3
7	57 00	5,6524	$\bar{2}$,5700	$\bar{1}$,9400	0,0764	$\bar{1}$,8125	$\bar{2}$,1242	2,4140	259,4
8	57 30	5,6222	$\bar{2}$,5746	$\bar{1}$,9282	0,0740	$\bar{1}$,8042	$\bar{2}$,0844	2,3755	237,4
9	58 00	5,5940	$\bar{2}$,5788	$\bar{1}$,9173	0,0716	$\bar{1}$,7958	$\bar{2}$,0471	2,3389	218,2
10	58 30	5,5678	$\bar{2}$,5828	$\bar{1}$,9071	0,0692	$\bar{1}$,7873	$\bar{2}$,0121	2,3042	201,5
11	59 00	5,5436	$\bar{2}$,5866	$\bar{1}$,8978	0,0669	$\bar{1}$,7788	$\bar{3}$,9803	2,2715	186,9
12	59 30	5,5206	$\bar{2}$,5898	$\bar{1}$,8891	0,0647	$\bar{1}$,7701	$\bar{3}$,9496	2,2398	173,7
13	60 00	5,4990	$\bar{2}$,5916	$\bar{1}$,8810	0,0625	$\bar{1}$,7614	$\bar{2}$,2205	2,5105	324,0
14	61 00	5,4594	$\bar{2}$,5940	$\bar{1}$,8661	0,0582	$\bar{1}$,7438	$\bar{2}$,1641	2,4533	284,0
15	62 00	5,4238	$\bar{2}$,5951	$\bar{1}$,8530	0,0541	$\bar{1}$,7257	$\bar{2}$,1124	2,3996	251,0
16	63 00	5,3912	$\bar{2}$,5955	$\bar{1}$,8412	0,0501	$\bar{1}$,7072	$\bar{2}$,0644	2,3496	223,1
17	64 00	5,3614	$\bar{2}$,5955	$\bar{1}$,8308	0,0463	$\bar{1}$,6882	$\bar{2}$,0203	2,2997	199,4
18	65 00	5,3338	$\bar{2}$,5955	$\bar{1}$,8213	0,0427	$\bar{1}$,6687	$\bar{3}$,9797	2,2526	178,9
19	66 00	5,3086	$\bar{2}$,5955	$\bar{1}$,8127	0,0393	$\bar{1}$,6486	$\bar{3}$,9425	2,2073	161,2
20	68 00	5,2634	$\bar{2}$,5955	$\bar{1}$,7981	0,0328	$\bar{1}$,6064	$\bar{2}$,1762	2,4209	263,6
21	70 00	5,2238	$\bar{2}$,5849	$\bar{1}$,7859	0,0270	$\bar{1}$,5611	$\bar{2}$,1090	3,3360	216,8
22	72 00	5,1900	$\bar{2}$,5681	$\bar{1}$,7757	0,0218	$\bar{1}$,5118	$\bar{2}$,0430	2,2529	179,0
23	74 00	5,1606	$\bar{2}$,5518	$\bar{1}$,7674	0,0172	$\bar{1}$,4575	$\bar{3}$,9844	2,1692	147,6
24	76 00	5,1340	$\bar{2}$,5278	$\bar{1}$,7598	0,0131	$\bar{1}$,3968	$\bar{3}$,9221	2,0819	120,8
25	78 00	5,1114	$\bar{2}$,4977	$\bar{1}$,7544	0,0096	$\bar{1}$,3275	$\bar{3}$,8605	1,9900	97,7

Scanned with OKEN Scanner

toriei

ției hodografului

$$dy = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{ctg} \varphi \, d\varphi$$

Tabela 74

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII
$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	Δy	y	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	lg u	lg v = (XX) + + (VI)	v
					0,0			0,0			
—12,1	1,4		193,1	0,0	1056	— 70		102	2,8165	2,9031	800,0
—10,7	1,0	—0,4	181,7	193,1	986	— 61	9	95	2,8063	2,8916	779,1
— 9,7	0,9	—0,1	171,7	374,8	925	— 56	5	90	2,7968	2,8808	760,0
— 8,8	0,8	—0,1	162,4	546,5	869	— 49	7	84	2,7878	2,8705	742,0
— 8,0	0,8	—0,1	154,0	708,9	820	— 44	5	80	2,7794	2,8608	725,8
— 8,0	0,8	—0,1	146,3	862,9	776	— 44	5	76	2,7714	2,8516	710,5
—25,9	3,9	—0,1	271,6	1009,2	1471	—140	5	140	2,7638	2,8427	696,1
—22,0	2,8	—1,1	248,1	1280,8	1331	—116	24	127	2,7498	2,8262	670,2
—19,2	2,5	—0,3	227,3	1528,9	1215	—100	16	117	2,7371	2,8111	647,3
—16,7	2,1	—0,4	209,4	1756,2	1115	— 87	13	107	2,7254	2,7970	626,6
—14,6	1,4	—0,7	194,1	1965,6	1028	— 72	15	98	2,7147	2,7839	608,0
—13,2	1,4	0	180,5	2159,7	956	— 65	7	93	2,7049	2,7718	591,3
—13,2	1,4	0	167,5	2340,2	891	— 65	7	86	2,6956	2,7603	575,9
—40,0	7,0	0	302,7	2507,7	1662	—203	7	155	2,6870	2,7495	561,7
—33,0	5,1	—1,9	266,9	2810,4	1459	—164	39	137	2,6715	2,7297	536,7
—27,9	4,2	—0,9	236,5	3077,3	1295	—135	29	123	2,6578	2,7119	515,1
—23,7	3,2	—1,0	210,4	3313,8	1160	—112	23	111	2,6455	2,6956	496,2
—20,5	2,8	—0,4	188,3	3524,2	1048	— 94	18	102	2,6344	2,6807	479,4
—17,7	2,8	—0,4	169,7	3712,5	954	— 78	16	92	2,6242	2,6669	464,4
—17,7	2,8	—0,4	292,0	3882,2	876	— 78	16	161	2,6150	2,6543	451,1
—46,8	9,0	—0,4	239,3	4174,2	1500	—215	16	140	2,5989	2,6317	428,3
—37,8	6,4	—2,6	196,3	4413,5	1285	—181	34	117	2,5849	2,6119	409,2
—31,4	4,6	—1,8	162,7	4609,8	1104	—139	42	101	2,5732	2,5950	393,6
—26,8	3,7	—0,9	143,5	4772,5	965	—129	10	92	2,5631	2,5803	380,5
—23,1	2,9	—0,8	108,2	4916,0	836	—111	18	78	2,5539	2,5670	369,0
—20,2		—0,8	87,3	5024,6	725	— 90	21	68	2,5461	2,5557	359,5

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	$2\lg v$	$\lg K(v)$	$\lg f(y)$	$\lg \operatorname{cosec}\varphi$	$\lg \operatorname{ctg}\varphi$	$\lg\omega = (III)+(IV)+(V)+(VI)+A$	$\lg\eta$	η
26	80°00′	5,0918	$\bar{2}$,4668	$\bar{1}$,7498	0,0066	$\bar{1}$,2463	$\bar{3}$,8024	1,8892	77,5
27	82 00	5,0750	$\bar{2}$,4402	$\bar{1}$,7463	0,0042	$\bar{1}$,1478	$\bar{3}$,7531	1,7735	59,4
28	84 00	5,0606	$\bar{2}$,4174	$\bar{1}$,7436	0,0024	$\bar{1}$,0216	$\bar{3}$,7114	1,6333	43,0
29	86 00	5,0480	$\bar{2}$,3978	$\bar{1}$,7417	0,0011	$\bar{2}$,8446	$\bar{3}$,6760	1,4437	27,8
30	88 00	5,0370	$\bar{2}$,3810	$\bar{1}$,7404	0,0003	$\bar{2}$,5431	$\bar{3}$,6461	1,1312	13,5
31	90 00	5,0278	$\bar{2}$,3670	$\bar{1}$,7400	0,0000	$-\infty$	$\bar{3}$,6222	$-\infty$	0,0
32	92 00	5,0202	$\bar{2}$,3558	$\bar{1}$,7403	0,0003	$\bar{2}$,5431	$\bar{3}$,6040	1,1144	13,0
33	94 00	5,0138	$\bar{2}$,3462	$\bar{1}$,7418	0,0011	$\bar{2}$,8446	$\bar{3}$,5903	1,4095	25,7
34	96 00	5,0088	$\bar{2}$,3386	$\bar{1}$,7432	0,0024	$\bar{1}$,0216	$\bar{3}$,5802	1,5813	38,1
35	98 00	5,0050	$\bar{2}$,3334	$\bar{1}$,7456	0,0042	$\bar{1}$,1478	$\bar{3}$,5756	1,7039	50,6
36	100 00	5,0022	$\bar{2}$,3290	$\bar{1}$,7485	0,0066	$\bar{1}$,2468	$\bar{3}$,5737	1,8001	63,1
37	102 00	5,0006	$\bar{2}$,3266	$\bar{1}$,7522	0,0096	$\bar{1}$,3275	$\bar{3}$,5764	1,8792	75,7
38	104 00	5,0000	$\bar{2}$,3258	$\bar{1}$,7565	0,0131	$\bar{1}$,3968	$\bar{3}$,5828	1,9479	88,8
39	106 00	5,0006	$\bar{2}$,3266	$\bar{1}$,7614	0,0172	$\bar{1}$,4575	$\bar{3}$,5932	2,0092	102,1
40	108 00	5,0020	$\bar{2}$,3290	$\bar{1}$,7670	0,0218	$\bar{1}$,5118	$\bar{3}$,6072	2,0649	116,1
41	110 00	5,0042	$\bar{2}$,3322	$\bar{1}$,7733	0,0270	$\bar{1}$,5611	$\bar{3}$,6241	2,1164	130,7
42	112 00	5,0072	$\bar{2}$,3366	$\bar{1}$,7805	0,0328	$\bar{1}$,6064	$\bar{3}$,6445	2,1647	146,1
43	114 00	5,0112	$\bar{2}$,3422	$\bar{1}$,7884	0,0393	$\bar{1}$,6486	$\bar{3}$,6685	2,2109	162,5
44	116 00	5,0156	$\bar{2}$,3490	$\bar{1}$,7971	0,0463	$\bar{1}$,6882	$\bar{3}$,6954	2,2549	178,8
45	118 00	5,0210	$\bar{2}$,3570	$\bar{1}$,8067	0,0541	$\bar{1}$,7257	$\bar{3}$,7262	2,2978	198,5
46	120 00	5,0268	$\bar{2}$,3654	$\bar{1}$,8172	0,0625	$\bar{1}$,7614	$\bar{3}$,7593	2,3393	218,4
47	122 00	5,0330	$\bar{2}$,3750	$\bar{1}$,8288	0,0716	$\bar{1}$,7958	$\bar{3}$,7958	2,3799	239,8
48	124 00	5,0396	$\bar{2}$,3850	$\bar{1}$,8415	0,0814	$\bar{1}$,8290	$\bar{3}$,8349	2,4197	262,9
49	126 00	5,0464	$\bar{2}$,3954	$\bar{1}$,8550	0,0920	$\bar{1}$,8613	$\bar{3}$,8762	2,4588	287,6
50	128 00	5,0534	$\bar{2}$,4062	$\bar{1}$,8697	0,1035	$\bar{1}$,8928	$\bar{3}$,9202	2,4973	314,3
51	130 00	5,0606	$\bar{2}$,4174	$\bar{1}$,8858	0,1158	$\bar{1}$,9238	$\bar{3}$,9670	2,5355	343,2
52	132 00	5,0672	$\bar{2}$,4278	$\bar{1}$,9032	0,1289	$\bar{1}$,9544	$\bar{2}$,0145	2,5727	373,6
53	134 00	5,0738	$\bar{2}$,4382	$\bar{1}$,9219	0,1431	$\bar{1}$,9848	$\bar{2}$,0644	2,6097	407,1
54	136 00	5,0794	$\bar{2}$,4470	$\bar{1}$,9426	0,1482	$\bar{0}$,0152	$\bar{2}$,1146	2,6457	442,3
55	138 00	5,0844	$\bar{2}$,4549	$\bar{1}$,9644	0,1745	$\bar{0}$,0456	$\bar{2}$,1656	2,6811	479,8
56	140 00	5,0866	$\bar{2}$,4617	$\bar{1}$,9876	0,1919	$\bar{0}$,0762	$\bar{2}$,2172	2,7159	519,9
57	142 00	5,0866	$\bar{2}$,4617	$\bar{1}$,9876	0,1919	$\bar{0}$,0762	$\bar{2}$,2172	2,7159	519,9

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 74 (continuare)

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII
$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	Δy	y	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	lg u	lg v=(XX)+ +(VI)	v
	2,1			5111,9	635		21		2,5393	2,5459	351,5
—18,1		—0,4	68,2			—69		60			
	1,7			5180,1	566		18		2,5333	2,5375	344,8
—16,4		—0,5	51,9			—51		54			
	1,2			5232,0	515		10		2,5279	2,5303	339,1
—15,2		—0,3	35,4			—41		50			
	0,9			5267,4	474		10		2,5229	2,5240	334,2
—14,3		—0,1	20,6			—31		47			
	0,8			5288,0	443		7		2,5182	2,5185	330,0
—13,5		—0,3	6,6			—24		43			
	0,5			5294,3	419		7		2,5139	2,5139	326,5
—13,0		—0,2	— 6,4			—17		41			
	0,3			5287,9	402		4		2,5098	2,5101	323,7
—12,7		—0,2	— 19,4			—13		40			
	0,3			5268,5	389		4		2,5058	2,5069	321,3
—12,4		—0,2	— 32,0			— 9		38			
	—0,1			5236,5	380		5		2,5020	2,5044	319,4
—12,5		—0,2	— 44,2			— 4		37			
	—0,0			5192,3	376		3		2,4933	2,5025	318,1
—12,5		—0,2	— 56,8			— 1		38			
	—0,1			5135,5	375		3		2,4945	2,5011	317,0
—12,6		—0,2	— 69,4			2		38			
	—0,4			5066,1	377		3		2,4907	2,5003	316,4
—13,0		—0,2	— 82,0			5		38			
	—0,4			4984,1	382		5		2,4869	2,5000	316,2
—13,4		—0,2	— 95,3			10		38			
	—0,6			4838,8	392		3		2,4831	2,5003	316,4
—14,0		—0,2	—108,8			13		39			
	—0,6			4780,0	405		3		2,4792	2,5010	317,0
—14,6		—0,2	—123,4			16		41			
	—0,8			4656,6	421		4		2,4751	2,5021	317,8
—15,4		—0,2	—138,3			20		43			
	—1,0			4518,3	441		5		2,4708	2,5036	318,9
—16,4		—0,2	—154,1			25		45			
	—0,9			4364,2	466		5		2,4663	2,5056	320,3
—17,3		—0,2	—171,1			30		48			
	—1,4			4193,1	496		6		2,4615	2,5078	322,0
—18,7		—0,2	—188,9			36		51			
	—1,2			4004,2	532		7		2,4564	2,5105	324,0
—19,9		—0,2	—208,5			43		55			
	—1,5			3795,7	575		7		2,4509	2,5134	326,1
—21,4		—0,2	—228,9			50		60			
	—1,7			3566,8	625		9		2,4449	2,5165	328,5
—23,1		—0,2	—251,1			59		65			
	—1,6			3315,7	684		9		2,4384	2,5198	331,0
—24,7		—0,2	—275,2			68		72			
	—2,0			3040,5	752		12		2,4312	2,5232	333,6
—26,7		—0,2	—300,6			80		79			
	—2,2			2739,9	832		15		2,4233	2,5267	336,3
—28,9		—0,2	—328,5			95		88			
	—1,7			2411,4	927		12		2,4145	2,5303	339,1
—30,6		—0,2	—358,7			107		98			
	—2,7			2052,7	1034		19		2,4047	2,5336	341,7
—33,3		—0,2	—389,8			126		109			
	—1,9			1662,9	1160		16		2,3938	2,5369	344,3
—35,2		—0,2	—424,9			142		123			
	—2,3			1238,9	1302		20		2,3815	2,5397	346,5
—37,5		—0,2	—460,7			162		138			
	—2,6			777,3	1464		23		2,3677	2,5422	348,5
—40,1		—0,2	—499,5			185		153			
	—2,6			277,8	1649		23		2,3524	2,5443	350,2
—40,1		—0,2	—541,1			185		175			
	—2,6			263,3			23		2,3349	2,5456	351,2

Scanned with OKEN Scanner

Calculu

Calculul coordonatelor x, y

$$dx = \frac{v^2}{g} d\varphi\,;\quad dy = \frac{v^2}{g} \operatorname{ctg} \varphi\, d\varphi,$$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y	$\lg \xi$	ξ
0	55° 00′	800,0	199,3	—12,1		193,1	0,0	2,4543	284,7
1	55 15	779,1	187,2		1,4	181,7	193,1	2,4313	270,0
2	55 30	760,0	176,5	—10,7	1,0	171,6	374,8	2,4097	256,9
3	55 45	742,2	166,8	— 9,7	0,9	162,3	546,4	2,3891	245,0
4	56 00	725,8	158,0	— 8,8	0,8	154,0	708,7	2.3697	234,3
5	56 15	710,5	150,0	— 8,0	0,8	146,3	862,7	2,3513	224,5
6	56 30	696,1	285,3	— 8,0	0,8	272,0	1009,0	2,6345	431,0
7	57 00	670,2	259,4	—25,9	3,9	248,2	1281,0	2,6015	399,5
8	57 30	647,3	237,4	—22,0	2,8	228,0	1529,2	2,5713	372,7
9	58 00	626,6	218,2	—19,2	2,5	209,7	1757,0	2,5431	349,2
10	58 30	608,0	201,5	—16,7	2,1	194,1	1966,7	2,5169	328,8
11	59 00	591,3	186,9	—14,6	1,4	180,5	2160,8	2,4927	311,0
12	59 30	575.9	173,7	—13,2	1,4	167,7	2341,3	2,4697	294,9
13	60 00	561,7	324,0	—13,2	1,4	303,4	2509,0	2,7491	561,4
14	61 00	536,7	284,0	—40,0	7,0	267,1	2812,3	2,7095	512,3
15	62 00	515,1	251,0	—33,0	5,1	236,7	3079,5	2,6739	472,0
16	63 00	496,2	223,1	—27,9	4,2	211,0	3316,2	2,6413	437,8
17	64 00	479,4	199,4	—23,7	3,2	188,9	3527,0	2,6115	408,8
18	65 00	464,4	178,9	—20,5	3,2	170,0	3715,9	2,5839	383,6
19	66 00	451,1	322,4	—20,5	3,2	292,0	3885,9	2,8597	724,0
20	68 00	428,3	263,6	— 8,0	12,0	239,4	4177,9	2,8145	652,4
21	70 00	409,2	216,8	—46,8	9,0	197,4	4417,3	2,7749	595,5
22	72 00	393,6	179,0	—37,8	6,4	162,9	4614,7	2,7411	551,0
23	74 00	380,5	147,6	—31,4	4,6	143,9	4777,6	2,7117	514,9
24	76 00	369,0	120,8	—26,8	3,7	109,0	4921,5	2,6851	484,3
25	78 00	359,5	97,7	—23,1	2,9	87,4	5030,5	2,6625	459,7
26	80 00	351,5	77,5	—20,2	2,1	68,4	5117,9	2,6429	439,4
27	82 00	344,8	59,4	—18,1	1,7	51,1	5186,3	2,6261	422,8
28	84 00	339,1	43,0	—16,4 —15,2	1,2	35,3	5237,4	2,6177	409,0

traiectoriei
și al timpului de zbor t

$$dt = \frac{v}{g} \operatorname{cosec} \varphi \cdot d\varphi$$

Tabela 75

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	$\lg \tau$	τ	$\Delta\tau$	$\Delta^2\tau$	Δt	t
			0,0	$\bar{1}$,6378	0,434				0,000
—14,7		277,3				— 12		0,428	
	1,6		277,3	$\bar{1}$,6250	0,422		0		0,428
—13,1		263,4				— 12		0,416	
	1,2		540,7	$\bar{1}$,6129	0,410		1		0,844
—11,9		250,9				— 11		0,404	
	1,2		791,6	$\bar{1}$,6013	0,399		1		1,248
—10,7		239,6				— 10		0,394	
	0,9		1031,2	$\bar{1}$,5903	0,389		1		1,642
— 9,8		229,4				— 9		0,384	
	0,9		1260,6	$\bar{1}$,5799	0,380		1		2,026
— 9,8		220,0				— 9		0,375	
	0,9		1480,6	$\bar{1}$,8707	0,743		1		2,401
—31,5		415,0				— 32		0,727	
	4,7		1895,6	$\bar{1}$,8517	0,711		4		3,128
—26,8		385,8				— 28		0,697	
	3,3		2281,4	$\bar{1}$,8342	0,683		2		3,825
—23,5		360,7				— 26		0,670	
	3,1		2642,1	$\bar{1}$,8177	0,657		3		4,495
—20,4		338,6				— 23		0,645	
	2,6		2980,7	$\bar{1}$,8022	0,634		3		5,140
—17,8		319,8				— 20		0,624	
	1,7		3300,2	$\bar{1}$,7878	0,614		0		5,764
—16,1		303,2				— 20		0,604	
	1,7		3603,7	$\bar{1}$,7741	0,594		0		6,368
—16,1		287,5				— 20		0,584	
	1,7		3891,2	0,0621	1,154		0		6,952
—48,9		536,0				— 62		1,122	
	8,6		4427,2	0,0380	1,092		8		8,074
—40,3		591,7				— 54		1,065	
	6,1		5018,9	0,0161	1,038		6		9,139
—34,2		454,5				— 48		1,013	
	5,2		5473,4	$\bar{1}$,9958	0,990		7		10,152
—29,0		423,0				— 41		0,969	
	3,8		5896,4	0,9771	0,949		3		11,121
—25,2		396,4				— 38		0,932	
	3,8		6292,8	$\bar{1}$,9597	0,911		3		12,053
—25,2		372,6				— 38		0,893	
	3,8		6665,4	0,2447	1,757		3		12.946
—71,6		687,0				—114		1,698	
	14,5		7352,4	0,2156	1,643		20		14,644
—56,9		622,9				— 94		1,595	
	12,4		7975,3	0,1900	1,549		17		16,239
—44,5		572,5				— 77		1,510	
	8,4		8547,8	0,1679	1,472		13		17,749
—36,1		532,5				— 64		1,439	
	5,5		9080,3	0,1486	1,408		9		19,188
—30,6		499,1				— 55		1,380	
	6,0		9579,4	0,1312	1,353		9		20,568
—24,6		471,7				— 46		1,329	
	4,3		10051	0,1164	1,307		8		21,897
—20,3		449,3				— 38		1,287	
	3,7		10500	0,1036	1,269		7		23,184
—16,6		430,9				— 31		1,254	
	2,8		10931	0,0928	1,238		6		24,438
—13,8		415,8				— 25		1,225	
	2,1		11347	0,0838	1,213		4		25,663
—11,7		403,1				— 21		1,202	

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y	$\lg \xi$	ξ
29	86° 00′	334,2	27,8		0,9		5272,7	2,5991	397,3
				—14,3		20,6			
30	88 00	330,0	13,5		0,8		5293,3	2,5881	387,4
				—13,5		6,7			
31	90 00	326,5	13,5		0,5		5300,0	2,5789	379,2
				—13,0		— 6,5			
32	92 00	323,7	—13,0		0,3		5293,5	2,5713	372,7
				—12,7		— 19,4			
33	94 00	321,3	—25,7		0,3		5274,1	2,5649	367,2
				—12,4		— 31,9			
34	96 00	319,4	—38,1		0,1		5242,2	2,5599	363,0
				—12,5		— 44,3			
35	98 00	318,1	— 50,6		0,0		5197,9	2,5561	359,8
				—12,5		— 56,8			
36	100 00	317,0	— 63,1		0,1		5141,1	2,5533	357,5
				—12,6		— 69,4			
37	102 00	316,4	— 75,7		0,4		5071,7	2,5517	356,2
				—13,0		— 82,2			
38	104 00	316,2	— 88,7		0,4		4989,5	2,5511	355,7
				—13,4		— 95,4			
39	106 00	316,4	—102,1		0,6		4894,1	2,5517	356,2
				—14,0		—109,1			
40	108 00	317,0	—116,1		0,6		4785,0	2,5531	357,4
				—14,6		—123,3			
41	110 00	317,8	—130,7		0,8		4661,7	2,5553	359,2
				—15,4		—138,3			
42	112 00	318,9	—146,1		1,0		4523,4	2,5583	361,7
				—16,4		—154,2			
43	114 00	320,3	—162,5		0,9		4369,2	2,5623	365,0
				—17,3		—171,0			
44	116 00	322,0	—179,8		1,4		4198,2	2,5667	368,7
				—18,7		—189,0			
45	118 00	324,0	—198,5		1,2		4009,2	2,5721	373,3
				—19,9		—208,4			
46	120 00	326,1	—218,4		1,5		3800,8	2,5779	378,4
				—21,4		—229,0			
47	122 00	328,5	—239,8		1,7		3571,8	2,5841	383,8
				—23,1		—251,3			
48	124 00	331,0	—262,9		1,6		3320,5	2,5907	389,7
				—24,7		—275.0			
49	126 00	333,6	—287,6		2,0		3045,5	2,5975	395,8
				—26,7		—300,7			
50	128 00	336,3	—314,3		2,2		2744,8	2,6045	402,3
				—28,9		—328,7			
51	130 00	339,1	—343,2		1,7		2416,7	2,6117	409,0
				—30,6		—358,3			
52	132 00	341,7	—373,8		2,7		2058,4	2,6183	415,2
				—33,3		—390,3			
53	134 00	344,3	—407,1		1,9		1668,1	2,6249	421,6
				—35,2		—424,5			
54	136 00	346,5	—442,3		2,3		1243,6	2,6305	427,1
				—37,5		—460,9			
55	138 00	348,5	—479,8		2,6		782,7	2,6355	432,0
				—40,1		—499,5			
56	140 00	350,2	—519,9		2,6		283,2	2,6397	436,2
				—40,1		—541,1			
57	142 00	351,2	—519,9				--257,9	2,6397	436,2

Punctul de cădere

Înclinarea $\Phi = 140° + \alpha \cdot 120' = 141° 3',9$

Viteza $V = 350,5$ m/s

Depărtarea $X = 21956 + 436\alpha = 22188$ m

Timpul de zbor $T = 63,075 + 1,940\alpha = 64,108$s.

Tabela 75 (continuare)

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	$\lg\tau$	τ	$\Delta\tau$	$\Delta^2\tau$	Δt	t
			11750	0,0762	1,192				26,865
— 9,9	1,8	392,3				—17	4	1,183	
— 8,2	1,7	383,1	12142	0,0699	1,175	—14	3	1,168	28,048
— 6,5	1,7	375,9	12525	0,0650	1,161	— 9	5	1,156	29,216
— 5,5	1,0	369,9	12901	0,0615	1,152	— 6	3	1,149	30,372
— 4,2	1,3	365,2	13271	0,0591	1,146	— 3	3	1,144	31,521
— 3,2	1,0	361,5	13636	0,0579	1,143	— 1	2	1,143	32,665
— 2,3	0,9	358,7	13997	0,0578	1,142	3	4	1,143	33,808
— 1,3	1,0	356,9	14356	0,0588	1,145	6	3	1,148	34,951
— 0,5	0,8	356,0	14713	0,0610	1,151	8	2	1,155	36,099
0,5	1,0	355,9	15069	0,0642	1,159	12	4	1,165	37,254
1,2	0,7	356,8	15325	0,0686	1,171	14	2	1,178	38,419
1,8	0,6	358,3	15682	0,0739	1,185	18	4	1,194	39,597
2,5	0,7	360,5	16040	0,0802	1,203	20	2	1,213	40,791
3,3	0,8	364,4	16400	0,0875	1,223	24	4	1,235	42,004
3,7	0,4	366,9	16764	0,0960	1,247	27	3	1,260	43,239
4,6	0,9	371,0	17121	0,1052	1,274	31	4	1,290	44,499
5,1	0,5	375,9	17492	0,1157	1,305	35	4	1,323	45,789
5,4	0,3	381,1	17868	0,1270	1,340	38	3	1,359	47,112
5,9	0,5	386,7	18249	0,1392	1,378	42	4	1,399	48,471
6,1	0,2	397,8	18636	0,1523	1,420	47	5	1,443	49,870
6,5	0,4	399,1	19034	0,1663	1,467	51	4	1,493	51,313
6,7	0,2	405,6	19433	0,1813	1,518	57	6	1,546	52,806
6,2	—0,5	412,1	19839	0,1972	1,575	60	3	1,605	54,352
6,4	0,2	418,4	20251	0,2136	1,635	68	8	1,669	55,957
5,5	—0,9	424,3	20669	0,2311	1,703	71	3	1,739	57,626
4,9	—0,6	429,5	21093	0,2490	1,774	79	8	1,814	59,365
4,2	—0,7	434,1	21552	0,2678	1,853	85	6	1,896	61,179
4,2	—0,7	438,0	21956	0,2873	1,938	85	6	1,984	63,075
									65,159

$$0 = 283{,}2 - 541{,}1\alpha - 41{,}6\,\frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

$$\alpha = 0{,}5326$$

Completare la tabela 74

Dublarea intervalelor

n	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta\gamma$	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	$\Delta^3\omega$	$\Delta\eta$
0	398,6					0,02112				
		−45,6					−262			
2	353,0		8,6			1850		52		
		−37,0		− 2,3			−210		−11	
4	316,0		6,3			1640		41		
		−30,7		− 2,5			−169		−12	
6	285,3		4,8			1471		29		
		−25,9			271,6		−140			0,0140
7	259,4					1331				
					248,1					127
7	518,8					2662				
		−82,4					−432			
9	436,4		19,8			2230		114		
		−62,6		−7,0			−318		−46	
11	373,8		12,8			1912		68		
		−49,8		−3,0			−250		−21	
13	324,0		9,8			1662		47		
		−40,0		−2,8	302,7		−203		− 8	155
14	284,0		7,0			1459		39		
		−33,0		−1,9	266,9		−164		−10	137
15	251,0		5,1			1295		29		
		−27,9			236,5		−135			123
16	223,1					1120				
					210,4					111
13	648					3324				
		−146					− 734			
15	502		42,8			2590		240		
		−103,2		−16,0			− 494		− 90	
17	398,8		26,4			2096		150		
		−76,4		− 9,2			− 344		− 58	
19	322,4		17,6			1752		92		
		−58,8		− 5,6	292,0		− 252		− 55	161
20	263,6		12,0			1500		37		
		−46,8		− 3,0	239,3		− 215		− 3	140
21	216,8		9,0			1285		34		
		−37,8		− 2,6	196,3		− 181		8	117
22	179,0		6,4			1104		42		
		−31,4			162,7		− 139			101
23	147,6					965				
					143,5					92

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 76

Tabelă rezumativă

n	θ	v	x	y	t	n	θ	v	x	y	t
0	35°00′	800,0	0,0	0,0	0,000	29	4°00′	334,2	11750	5267,4	26,865
1	34 45	779,1	277,3	193,1	0,428	30	2 00	330,0	12142	5288,0	28,048
2	34 30	760,0	540,7	374,8	0,844	31	0 00	326,5	12525	5294,3	29,216
3	34 15	742,2	791,6	546,5	1,248	32	− 2 00	323,7	12901	5287,9	30,372
4	34 00	725,8	1031,2	708,9	1,642	33	— 4 00	321,3	13271	5268,5	31,521
5	33 45	710,5	1260,6	862,9	2,026	34	− 6 00	319,4	13636	5236,3	32,665
6	33 30	696,1	1480,6	1009,2	2,401	35	− 8 00	318,1	13997	5192,3	33,808
7	33 00	670,2	1895,6	1280,8	3,128	36	−10 00	317,0	14356	5135,5	34,951
8	32 30	647,3	2281,4	1528,9	3,825	37	−12 00	316,4	14713	5066,1	36,099
9	32 00	626,6	2642,1	1756,2	4,495	38	−14 00	316,2	15069	4984,1	37,254
10	31 30	608,0	2980,7	1965,6	5,140	39	−16 00	316,4	15325	4888,8	38,419
11	31 00	591,3	3300,5	2159,7	5,764	40	−18 00	317,0	15682	4780,0	39,527
12	30 30	575,9	3603,7	2340,2	6,368	41	−20 00	317,8	16040	4656,6	40,791
13	30 00	561,7	3891,2	2507,7	6,952	42	−22 00	318,9	16400	4518,3	42,004
14	29 00	536,7	4427,2	2810,4	8,074	43	−24 00	320,3	16764	4364,2	43,239
15	28 00	515,1	5018,9	3077,3	9,139	44	−26 00	322,0	17121	4193,1	44,449
16	27 00	496,2	5473,4	3313,8	10,152	45	−28 00	324,0	17492	4004,2	45,789
17	26 00	479,4	5896,4	3524,2	11,121	46	−30 00	326,1	17868	3795,7	47,112
18	25 00	464,4	6292,8	3712,5	12,053	47	−32 00	323,5	18249	3566,8	48,471
19	24 00	451,1	6665,4	3882,3	12,946	48	−34 00	331,0	18636	3315,7	49,870
20	22 00	428,3	7352,4	4174,2	14,644	49	−36 00	333,6	19034	3040,5	51,313
21	20 00	409,2	7975,3	4413,5	16,239	50	−38 00	336,3	19433	2739,9	52,806
22	18 00	393,6	8547,8	4609,8	17,749	51	−40 00	339,1	19839	2411,4	54,352
23	16 00	380,5	9080,3	4772,5	19,188	52	−42 00	341,7	20251	2052,7	55,957
24	14 00	369,0	9579,4	4916,0	20,568	53	−44 00	344,3	20669	1662,9	57,626
25	12 00	359,5	10051	5024,6	21,897	54	−46 00	346,5	21093	1238,0	59,365
26	10 00	351,5	10500	5111,9	23,184	55	−48 00	348,5	21552	777,3	61,179
27	8 00	344,8	10931	5180,1	24,438	56	−50 00	350,2	21956	277,8	63,075
28	6 00	339,1	11347	5232,0	25,663	57	−52 00	351,2		−263,3	65,159

Depărtarea 22 188 m
Unghiul de cădere 51°3′,9

Viteza 350,7 m/s
Timpul de zbor 64,108 s

depășesc 1 m în valorile lui x și 0,001 s în valorile lui t, adică nu este necesar să le calculăm. Însă trebuie să calculăm totuși diferențele

$$\Delta\xi_n,\ \Delta^2\xi_n,\ \Delta\tau_n \text{ și } \Delta^2\tau_n,$$

pentru ca din variația lor regulată să ne convingem că în calcul nu s-a introdus vre-o eroare.

6) Atunci cînd calculatorul efectuează acest calcul pentru prima oară, mărimile Δy, Δq nu trebuie calculate în gînd, ci pe o foaie de hîrtie separată.

7) În exemplul nostru mărimea q se exprimă prin trei sau patru cifre semnificative, ce se referă la a cincea zecimală a logaritmului mărimii u sau v singurele de care avem nevoie; astfel în calcule se cîștigă o zecimală, cu alte cuvinte precizia acestora se înzecește; mulțumită acestui fapt în cazurile în care nu este necesară o precizie deosebită, mărimile q și ω se pot calcula folosind rigla de calcul și apoi u și v din tabelele de logaritmi cu patru zecimale.

Calculul este făcut aici în toate amănuntele, adică în acea formă în care se face, pentru ca cititorul să-și poată da bine seama de modul în care trebuie să fie făcute operațiile, de cîtă muncă este nevoie și ce prescurtări se pot face dacă se urmăresc rezultate mai puțin exacte.

§ 107. Am mai amintit că metoda lui Adams a fost dezvoltată de el pentru determinarea formei secțiunii meridiane a unei picături de lichid situate pe un plan orizontal.

Ecuația generală a suprafeței capilare care mărginește picătura este

$$z = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right), \tag{1}$$

unde z este ordonata verticală a punctului de pe suprafață, ρ_1 și ρ_2 razele principale de curbură, a^2 este o anumită constantă pentru lichidul dat, avînd dimensiunea unei lungimi.

În cazul nostru suprafața este o suprafață de rotație în jurul axei verticale, adică a axei z, îndreptată în jos.

Observație. Comparînd aceste valori v și y_n cu cele precedente, vedem că concordanța este pe deplin satisfăcută.

Pentru fiecare punct al unei astfel de suprafețe, una din razele principale de curbură este raza de curbură a meridianului în acest punct, de exemplu ρ_1; a doua rază de curbură ρ_2 este egală cu segmentul de normală în punctul considerat, cuprins între acest punct și axa de rotație. Notînd cu r raza paralelei ce trece prin punctul considerat și cu φ —unghiul dintre normală și axa z vom avea:

$$\rho_2 = \frac{r}{\sin\varphi}$$

și prin urmare ecuația va fi:

$$z = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sin\varphi}{r}\right], \tag{2}$$

sau

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r}. \tag{2'}$$

Însă, deoarece în general $dz = ds \sin\varphi$, $dr = ds\cos\varphi$ unde ds este diferenţiala arcului de meridian şi $\rho_1 = \frac{ds}{d\varphi}$, vom avea:

$$dz = \rho_1 \sin\varphi\, d\varphi, \quad dr = \rho_1 \cos\varphi\, d\varphi. \tag{3}$$

Luînd pe φ drept variabilă independentă şi notînd derivatele prin accente, vedem că problema se reduce la integrarea sistemului de ecuaţii:

$$z' = \rho_1 \sin\varphi, \quad r' = \rho_1\cos\varphi, \quad \text{unde } \frac{1}{\rho_1} = \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r}. \tag{4}$$

Este uşor de văzut că aceste ecuaţii sînt omogene în mărimile z, ρ, r şi a, şi ele pot fi scrise sub forma următoare:

$$\left(\frac{z}{a}\right)' = \left(\frac{\rho_1}{a}\right)\sin\varphi, \quad \left(\frac{r}{a}\right)' = \left(\frac{\rho_1}{a}\right)\cos\varphi, \quad \frac{1}{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)} = 2\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{r}{a}\right)},$$

prin urmare z, r şi ρ_1 se pot exprima ca fracţiuni de a; cu alte cuvinte, putem, fără a prejudicia generalitatea, să punem $a = 1$ şi să considerăm sistemul

$$z' = \rho_1 \sin\varphi, \quad r' = \rho_1\cos\varphi, \quad \frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}. \tag{5}$$

În punctul superior al picăturii care, evident, se găseşte pe axa de rotaţie, vom avea $\varphi = 0$ ceea ce înseamnă că condiţiile iniţiale vor fi: pentru $\varphi = 0$, $r = 0$ şi $z = b$, unde b este o anumită constantă.

Deoarece pentru φ infinit mic, r va fi şi el infinit mic, rezultă că

$$\lim\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \lim\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) = \lim\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_{\varphi=0},$$

şi prin urmare pentru $\varphi = 0$ vom avea:

$$\frac{1}{\rho_1} = b.$$

Ca exemplu numeric să luăm cazul cînd $b = 1$ şi punînd $\zeta = z'h$, $\lambda = r'h$, unde h este intervalul ales între valorile vecine ale lui φ pe care îl luăm de $5^\circ = 0{,}087266$; dispunem calculul nostru aşa cum s-a făcut mai sus, efectuîndu-l cu rigla de calcul (de 50 cm).

Pentru obţinerea valorilor de început z şi r cel mai simplu este să dezvoltăm pe z şi r după puterile lui φ, lucru pe care îl facem astfel: este uşor de văzut că ρ_1 este o funcţie pară de φ; de aceea punem $\rho_1 = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \cdots$; atunci

$$\rho_1 \sin\varphi = \varphi + \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\varphi^3 + \left(\beta - \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{120}\right)\varphi^5 + \cdots,$$

$$\rho_1 \cos\varphi = 1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{24}\right)\varphi^4 + \cdots,$$

Prin urmare, în virtutea condiției că pentru $\varphi = 0$ trebuie ca $z = 1$ și $r = 0$ pe baza ecuației (5) avem:

$$z = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{24}\right)\varphi^4 + \left(\frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{36} + \frac{1}{720}\right)\varphi^6 + \cdots$$

$$r = \varphi + \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{6}\right)\varphi^3 + \left(\frac{\beta}{5} - \frac{\alpha}{10} + \frac{1}{120}\right)\varphi^5 + \cdots$$

Avem apoi:

$$2rz - \sin\varphi = \varphi + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{6}\right)\varphi^3 + \left(\frac{19}{30}\alpha + \frac{2}{5}\beta - \frac{29}{120}\right)\varphi^5 + \cdots$$

și

$$(2rz - \sin\varphi)\,\rho_1 = \varphi + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{6} + \alpha\right)\varphi^3 + \left(\frac{22}{15}\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{7}{5}\beta - \frac{29}{120}\right)\varphi^5 + \cdots$$

Egalînd această ultimă mărime cu mărimea r obținem pentru determinarea coeficienților necunoscuți α și β ecuațiile

$$\frac{5}{3}\alpha + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{6}, \quad \frac{7}{5}\beta + \frac{22}{15}\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{29}{120} = \frac{1}{5}\beta - \frac{1}{10}\alpha + \frac{1}{120},$$

care dau

$$\alpha = -\frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{7}{8}.$$

Tabela 77

φ	z	r	ρ_1
0°	1,0000	0,0000	1,0000
5	1,0033	0,0870	0,9943
10	1,0150	0,1723	0,9780
15	1,0332	0,2546	0,9527

Substituind, avem

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= 1 - \frac{3}{4}\varphi^2 + \frac{7}{8}\varphi^4 + \cdots, \\ z &= 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{11}{48}\varphi^4 + \frac{121}{720}\varphi^6 \cdots, \\ r &= \varphi - \frac{5}{12}\varphi^3 + \frac{31}{120}\varphi^5 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Punînd în aceste expresii succesiv $\varphi = 0°, 5°, 10°, 15°$, adică făcînd pe φ egal cu 0; 0,087266; 0,17453; 0,26180, obținem tabela 77 a valorilor de plecare. Cu ajutorul lor continuăm calculul după schema generală dată mai jos în tabela 78.

Formele picăturilor sînt calculate cu mare exactitate și pentru ele sînt alcătuite tabele detailate în lucrarea lui Bashforth[1]) în care cunoscutul astronom Adams a elaborat metoda sa de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale și la p. 18 a lucrării citate este dată o formulă care se deosebește numai prin notații de formula noastră fundamentală (16) și anume:

$$y_1 - y_0 = \omega\left(q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 + \frac{251}{720}\Delta^4 q_0 + \frac{95}{288}\Delta^5 q_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{19\,087}{60\,480}\Delta^6 q_0 + \frac{5257}{17\,280}\Delta^7 q_0 + \frac{1\,070\,017}{3\,628\,800}\Delta^8 q_0 + \frac{2\,082\,753}{7\,257\,600}\Delta^9 q_0 + \cdots\right),$$

[1]) Bashforth, „An attempt to test the theories of capillary action" (Cambridge, 1883).

Aici ω este intervalul dintre valorile consecutive ale variabilei independente t; ecuația, dată spre integrare, Adams o scrie sub forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = q$$

și prin $q_0, \Delta q_0, \ldots, \Delta^9 q_0$ sînt notate valori particulare ale mărimii q și ale diferențelor ei pînă la ordinul al nouălea.

Însă Adams, pentru calcule, ia înloc de această formulă, o alta, care dă diferența $y_0 - y_{-1}$; în această formulă coeficienții lui $\Delta^2 q_0, \ldots, \Delta^9 q_0$ sînt considerabil mai mici decît în cea precedentă; drept urmare a acestui fapt, calculul poate fi efectuat cu o exactitate mai mare, însă procesul însuși este mai complicat.

Ecuația,care definește forma suprafeței este scrisă de Adams sub forma

$$\frac{b}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{x}{b}\right)} = 2 + \beta\left(\frac{z}{b}\right),$$

adică exprimă cantitățile ρ, z și x sau, în notațiile noastre, cantitatea r prin fracțiuni ale razei de curbură în vîrf, adică b și ia drept origine a coordonatelor vîrful.

Astfel, în tabelele lui Bashforth cazul nostru corespunde valorii $\beta = 2$ și valoarea noastră pentru z se obține dacă se adaugă 1 la cea indicată în tabelă. Comparația arată că diferența nu depășește două sau trei unități ale celei de a patra zecimale (tabelele lui Bashforth sînt calculate cu cinci zecimale), astfel încît rezultatul obținut de noi este mai bun decît ne-am fi putut aștepta de la un calcul cu patru zecimale și aceasta cu ajutorul riglei de calcul.

§ 108. Să mai spunem cîteva cuvinte despre numeroasele ecuații ale fizicei matematice, a căror integrare se reduce la găsirea așa numitelor funcții *fundamentale*. Aceste funcții se determină pentru fiecare problemă printr-o ecuație diferențială ordinară liniară, care cuprinde un parametru necunoscut ale cărui valori sînt date de o anumită ecuație transcendentă obținută pe baza condițiilor la limită.

Astfel, de exemplu, studiul oscilațiilor unei bare elastice a cărei secțiune transversală este de arie variabilă se reduce la studiul funcției X, determinate de ecuația

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right] - \lambda q(x) X = 0 \qquad (*)$$

și de anumite condiții la limită.

Aici λ este un anumit parametru, a cărui valoare trebuie de asemenea găsită, iar $p(x)$ și $q(x)$ sînt funcții date.

Condițiile la limită se exprimă în mod diferit în funcție de faptul dacă bara este încastrată, rezemată sau liberă la capătul considerat pentru care abscisa este $x = 0$ sau $x = l$.

Să considerăm, de exemplu, capătul pentru care $x = 0$; atunci condițiile inițiale se exprimă astfel:

a) dacă capătul este *încastrat*, pentru $x = 0$, trebuie să avem

$$X = 0 \quad \text{și} \quad \frac{dX}{dx} = 0;$$

Tabela 78

Calculul formei picăturii
Integrarea sistemului:

$$dz = \rho_1 \sin\varphi \cdot d\varphi,\quad dr = \rho_1 \cos\varphi \cdot d\varphi,\quad \frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}.$$

Condiții inițiale: pentru $\varphi = 0$ trebuie să avem: $r = 0, z = 1$

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	r	$2z$	$\frac{\sin\varphi}{r}$	$\frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}$	z	Δz	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	r	Δr	λ	$\Delta\lambda$	$\Delta^2\lambda$	După tabela lui Bashforth	
																	r	z
0°	0,0000	1,0000	0,0000	2,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,000	0,0000	0,00	0,00	0,0000	0,000	0,0873	0,00	0,00	0,00000	1,00000
								0,038		0,76			0,870		−0,09			
5	0,0872	0,9962	0,0870	2,0076	1,0023	1,0053	1,0038		0,0076		−0,04	0,0870		0,0864		−0,15	0,08699	1,00379
10	0,1736	0,9848	0,1723	2,0300	1,0075	1,0225	1,0150	0,112	0,0148	0,72	−0,05	0,1723	0,853	0,0840	−0,24	−0,13	0,17236	1,01502
15	0,2588	0,9659	0,2546	2,0664	1,0165	1,0499	1,0332	0,182	0,0215	0,67	−0,08	0,2546	0,823	0,0803	−0,37	−0,12	0,25462	1,03324
20	0,3420	0,9397	0,3327	2,1156	1,0279	1,0877	1,0578	0,246	0,0274	0,59	−0,08	0,3327	0,781	0,0754	−0,49	−0,07	0,33255	1,05779
25	0,4226	0,9063	0,4051	2,1758	1,0432	1,1326	1,0879	0,301	0,0325	0,51	−0,08	0,4051	0,724	0,0698	−0,56	−0,04	0,40523	1,08787
30	0,5000	0,8660	0,4718	2,2452	1,0597	1,1855	1,1226	0,347	0,0368	0,43	−0,09	0,4718	0,661	0,0638	−0,60	−0,05	0,47203	1,11262
35	0,5736	0,8192	0,5324	2,3222	1,0764	1,2458	1,1611	0,385	0,0402	0,34	−0,06	0,5324	0,606	0,0574	−0,65	0,03	0,53260	1,16117
40	0,6428	0,7660	0,5864	2,4050	1,0963	1,3087	1,2026	0,415	0,0430	0,28	−0,10	0,5864	0,540	0,0512	−0,62	−0,02	0,58681	1,20274
45	0,7071	0,7071	0,6346	2,4934	1,1142	1,3792	1,2467	0,442	0,0448	0,18	−0,06	0,6346	0,482	0,0448	−0,64	0,04	0,63469	1,24658
50	0,7660	0,6428	0,6761	2,5840	1,1330	1,4510	1,2920	0,453	0,0460	0,12	−0,04	0,6761	0,415	0,0388	−0,60	0,00	0,67636	1,29203
55	0,8192	0,5736	0,7120	2,6762	1,1507	1,5255	1,3381	0,461	0,0468	0,08	−0,04	0,7120	0,359	0,0328	−0,60	0,06	0,71206	1,33851
60	0,8660	0,5000	0,7418	2,7702	1,1678	1,6024	1,3851	0,470	0,0472	0,0	−0,07	0,7418	0,298	0,0274	−0,54	−0,01	0,74203	1,38552
65	0,9063	0,4226	0,7668	2,8646	1,1821	1,6824	1,4323	0,472	0,0469	−0,03	−0,01	0,7668	0,250	0,0219	−0,55	0,05	0,76656	1,43261
								0,470		−0,04			0,192		−0,50			

Scanned with OKEN Scanner

70	0,9397	0,3420	0,7860	2,9586	1,1956	1,7630	1,4793	0,463	0,0465	−0,08	−0,04	0,7860	0,146	0,0169	−0,47	0,03	0,78596	1,47939
75	0,9659	0,2588	0,8006	3,0512	1,2068	1,8444	1,5256	0,451	0,0457	−0,10	−0,02	0,8006	0,098	0,0122	−0,43	0,04	0,80052	1,52552
80	0,9848	0,1736	0,8104	3,1414	1,2149	1,9265	1,5707	0,441	0,0447	−0,14	−0,04	0,8104	0,060	0,0079	−0,41	0,02	0,81055	1,57070
85	0,9962	0,0872	0,8164	3,2296	1,2204	2,0092	1,6148	0,426	0,0433	−0,16	−0,02	0,8164	0,018	0,0038	−0,38	0,03	0,81635	1,61466
90	1,0000	0,0000	0,8182	3,3148	1,2225	2,0923	1,6574	0,410	0,0417	−0,17	−0,01	0,8182	−0,019	0,0000	−0,35	0,03	0,81822	1,65717
95	0,9962	−0,0872	0,8164	3,3968	1,2204	2,1764	1,6984	0,390	0,0400	−0,20	−0,03	0,8164	−0,052	−0,0035	−0,32	0,03	0,81645	1,69802
100	0,9848	−0,1736	0,8112	3,3748	1,2142	2,2606	1,7374	0,369	0,0380	−0,21	−0,01	0,8112	−0,082	−0,0067	−0,30	0,02	0,81133	1,73702
105	0,9659	−0,2588	0,8030	3,5486	1,2027	2,3459	1,7743	0,348	0,0359	−0,22	−0,01	0,8030	−0,111	−0,0097	−0,26	0,04	0,80314	1,77401
110	0,9397	−0,3420	0,7919	3,6182	1,1868	2,4314	1,8091	0,324	0,0337	−0,24	−0,02	0,7919	−0,134	−0,0123	−0,24	0,02	0,79216	1,80886
115	1,9063	−0,4226	0,7786	3,6830	1,1663	2,5167	1,8415	0,301	0,0313	−0,24	−0,00	0,7786	−0,158	−0,0147	−0,20	0,04	0,77868	1,84143
120	0,8660	−0,5000	0,7628	3,7432	1,1372	2,6060	1,8716	0,277	0,0289	−0,25	−0,01	0,7628	−0,175	−0,0167	−0,18	0,02	0,76297	1,87162
125	0,8192	−0,5736	0,7453	3,7986	1,0992	2,6994	1,8993	0,251	0,0264	−0,25	0,00	0,7453	−0,193	−0,0185	−0,16	0,02	0,74531	1,89935
130	0,7660	−0,6428	0,7260	3,8488	1,0554	2,7934	1,9244	0,227	0,0239	−0,25	0,00	0,7260	−0,208	−0,0201	−0,13	0,03	0,72598	1,92456
135	0,7071	−0,7071	0,7052	3,8942	1,0030	2;8912	1,9471	0,201	0,0214	−0,26	−0,01	0,7052	−0,219	−0,0214	−0,09	0,04	0,70525	1,94720
140	0,6428	−0,7660	0,6833	3,9342	0,9407	2,9935	1,9672	0,175	0,0188	−0,26	0,00	0,6833	−0,227	−0,0223	−0,07	0,02	0,68339	1,96723
145	0,5736	−0,8192	0,6606	3,9694	0,8727	3,0967	1,9847	0,149	0,0162	−0,26	0,00	0,6608	−0,223	−0,0230	−0,05	0,02	0,66068	1,98467
150	0,5000	−0,8660	0,6373	3,9992	0,7847	3,2145	1,9996	0,123	0,0136	−0,25	−0,01	0,6373	−0,236	−0,0235	−0,02	0,03	0,63738	1,99952
155	0,4226	−0,9063	0,6137	4,0238	0,6900	3,3338	2,0119	0,099	0,0111	−0,24	0,01	0,6137	−0,237	−0,0237	0,01	0,03	0,61375	2,01183
160	0,3420	−0,9397	0,5900	4,0436	0,5822	3,4614	2,0218	0,075	0,0087	−0,25	0,00	0,5900	−0,236	−0,0236	0,03	0,02	0,59003	2,02166
165	0,2588	−0,9659	0,5664	4,0586	0,4585	3,6001	2,0293	0,050	0,0062	−0,22	0,03	0,5664	−0,231	−0,0233	0,03	0,00	0,56647	2,02910
170	0,1736	−0,9848	0,5433	4,0686	0,3197	3,7488	2,0343	0,030	0,0041	−0,22	−0,00	0,5433	−0,227	−0,0230	0,08	0,05	0,54329	2,03425
175	0,0872	−0,9962	0,5206	4,0746	0,1682	3,9064	2,0373	0,008	0,0019	−0,19	0,03	0,5206	−0,217	−0,0222			0,52069	2,03713
180	0,0000	−1,0000	0,4989	4,0762	0,0000	4,0762	2,0381		0,0000			0,4989					0,49885	2,03819

Scanned with OKEN Scanner

b) dacă capătul este *rezemat*, pentru $x = 0$, trebuie să avem

$$X = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0;$$

c) dacă capătul este liber, pentru $x = 0$, trebuie să avem

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0.$$

Exact la fel se exprimă aceste condiții și pentru celălalt capăt, pentru care $x = l$.

Să presupunem, de exemplu, că ambele capete ale barei sînt libere (o navă care plutește pe apă); atunci, condițiile inițiale vor fi:

pentru $x = 0$:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \qquad (**)$$

pentru $x = l$:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0. \qquad (***)$$

Deoarece ecuația care servește pentru determinarea lui X este liniară, integrala ei generală este o funcție liniară de constantele arbitrare, adică

$$X = AY + BZ + CU + DV,$$

unde Y, Z, U, V, sînt soluții particulare ale ecuației (*), iar A, B, C, D sînt constante arbitrare. Evident, Y, Z, U, V sînt funcții atît de variabila x cît și de parametrul λ.

Condițiile la limită dacă notăm derivatele în raport cu x cu accente, vor fi:

$$\begin{aligned}
&AY''(0,\lambda) + BZ''(0,\lambda) + CU''(0,\lambda) + DV''(0,\lambda) = 0,\\
&AY'''(0,\lambda) + BZ'''(0,\lambda) + CU'''(0,\lambda) + DV'''(0,\lambda) = 0,\\
&AY''(l,\lambda) + BZ''(l,\lambda) + CU''(l,\lambda) + DV''(l,\lambda) = 0,\\
&AY'''(l,\lambda) + BZ'''(l,\lambda) + CU'''(l,\lambda) + DV'''(l,\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

Pentru ca aceste ecuații, în A, B, C, D, să admită o soluție diferită de soluția banală, este necesar ca determinantul sistemului, $F(\lambda)$, să fie egal cu zero, adică trebuie să avem:

$$F(\lambda) = |Y''(0,\lambda), Z'''(0,\lambda), U''(l,\lambda), V'''(l,\lambda)| = 0. \qquad (1)$$

Aceasta este ecuația transcendentă despre care s-a vorbit mai sus și care determină valorile parametrului λ.

Este clar însă că numai pentru puține forme particulare ale funcțiilor $p(x)$ și $q(x)$ problema poate fi dusă pînă la capăt, pe cale analitică; în restul cazurilor, în special cînd funcțiile $p(x)$ și $q(x)$ sînt date grafic sau prin tabele este imposibilă nu numai rezolvarea, dar chiar scrierea în formă dezvoltată a ecuației (1); prin urmare trebuie să se recurgă la metode de aproximație.

Pentru a găsi valorile lui λ care verifică ecuația (1) nu este necesar să avem expresia analitică a funcției $F(\lambda)$, ci este suficient să existe posibilitatea de a calcula valoarea ei particulară corespunzătoare oricărei valori particulare alese a parametrului $\lambda = n$.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, dacă pe baza unor anumite considerente, a căror expunere nu o facem aici, s-ar ști că valoarea aproximativă a lui λ este n, atunci calculînd pe $F(n)$, punem apoi $\lambda = n+k$ și calculăm $F(n+k)$; dacă aceste mărimi se dovedesc a fi de semne contrarii, atunci valoarea căutată a lui λ se găsește între n și $n+k$, după care cu ajutorul metodelor obișnuite λ poate fi găsit cu orice grad de aproximație. Nu este greu de văzut în ce mod trebuie procedat dacă $F(x)$ și $F(x+k)$ se dovedesc a fi de același semn.

Trebuie să arătăm mersul acestui calcul al valorii numerice $F(n)$.

Constantele arbitrare ni le putem închipui alese astfel încît ele să reprezinte valorile particulare ale funcției X și ale primelor ei trei derivate pentru $x=0$.

Pentru aceasta trebuie numai să admitem că Y, Z, U, V sînt acele soluții particulare ale ecuației

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right] - nq(x)X = 0,$$

care pentru $x=0$ iau, împreună cu derivatele lor, următoarele valori:

$$\begin{array}{llll} Y=1, & Y'=0, & Y''=0, & Y'''=0, \\ Z=0, & Z'=1, & Z''=0, & Z'''=0, \\ U=0, & U'=0, & U''=1, & U'''=0, \\ V=0, & V'=0, & V''=0, & V'''=1. \end{array}$$

Deoarece X trebuie să satisfacă condițiile (**), pentru asemenea alegere a funcțiilor Y, Z, U, V vom avea

$$C=0 \quad \text{și} \quad D=0$$

și trebuie numai să determinăm funcțiile Y și Z.

Pentru a găsi funcția Y, punem

$$\frac{1}{p(x)} = f(x) \tag{2}$$

și transformăm ecuația care determină pe Y, în sistemul

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = f(x)\,y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = nq(x)\,Y. \tag{3}$$

Valorile inițiale pentru $x=0$ trebuie să fie:

$$\begin{aligned} y=0, \quad y'=0, \\ Y=1, \quad Y'=0. \end{aligned} \tag{4}$$

La sistemul (3) cu condițiile (4) este aplicabilă direct metoda lui Störmer, cu ajutorul căreia alcătuim tabela valorilor funcțiilor Y și y pe intervalul de la $x=0$ pînă la $x=l$; cu această ocazie se obține și tabela valorilor lui Y''.

Exact la fel alcătuim și tabela valorilor funcției Z și împreună cu aceasta și ale lui Z''.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția căutată X va fi:

$$X = AY + BZ.$$

Folosind tabelele alcătuite pentru valorile funcțiilor Y'' și Z'' găsim valorile lor corespunzătoare $x=l$; fie aceste valori P și Q. Folosind valorile lui Y'' și Z'' și formulele cunoscute care exprimă legătura între diferențe și derivate, alcătuim valorile lui Y''' și Z''' pentru $x=l$ [dacă funcțiile $p(x)$ și $q(x)$ sînt date analitic și nu prin tabele, atunci aceste valori le găsim și din ecuația dată prin derivare]; fie ele M și N; atunci pe baza condițiilor (**) și (***) trebuie ca:

$$AP + BQ = 0,$$
$$AM + BN = 0,$$

și valoarea particulară a determinantului $F(n)$ este

$$F(n) = PN - QM.$$

Dacă este egală cu zero, atunci $\lambda=n$ este una din valorile adevărate ale parametrului, iar dacă nu, atunci trebuie să repetăm procesul punînd $\lambda=n+K$ etc., aplicînd cunoscuta metodă pentru căutarea valorii rădăcinii apropiate de numărul dat.

Astfel, metoda expusă dă posibilitatea practică ca la rezolvarea problemelor fizice să se alcătuiască efectiv tabele și să se calculeze valorile funcțiilor fundamentale, a căror existență și proprietăți se stabilesc pe alte căi. Nu dăm un exemplu de calcul numeric, deoarece nu apare nici o deosebire față de cele arătate mai sus și nu pot apare nici un fel de dificultăți, exceptînd caracterul oarecum obositor al calculului datorită uniformității sale.

§ 109. Să facem o observație cu caracter istoric asupra metodelor expuse.

În anul 1826 a apărut în două volume mari în 4° opera lui A. Legendre „Traité des fonctions élliptiques et des intégrales Euleriennes" în care acest renumit matematician face sinteza cercetărilor sale de patruzeci de ani în teoria integralelor eliptice și euleriene.

În volumul al doilea sînt cuprinse tabele ale valorilor integralelor de speța întîia și a doua, adică ale funcțiilor

$$F(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}; \quad E(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

În aceste tabele valorile funcțiilor F și E sînt date pentru toate valorile amplitudinii φ din grad în grad de la 0 pînă la 90°, pentru toate valorile unghiului modular θ (determinat prin egalitatea $\sin\theta=c$) de asemenea din grad în grad, adică tabelele conțin $2 \cdot 90 \cdot 90 = 16\,200$ rezultate.

Toate aceste numere sînt date cu zece zecimale pentru θ de la 0 pînă la 45° și cu nouă zecimale de la 45° pînă la 90°. Calculul a fost făcut cu patrusprezece și cu douăsprezece zecimale.

În afară de aceste tabele Legendre dă o serie de alte tabele foarte detailate, calculate de asemenea cu douăsprezece și patrusprezece zecimale; toate calculele au fost făcute de *el însuși*.

Rezultă clar de aici cît de mare a fost experiența și rutina lui Legendre în efectuarea calculelor numerice.

Lămurind metoda alcătuirii tabelelor sale, el dezvoltă metoda diferențelor pentru calculul integralelor simple și multiple. Între altele, el consideră și integrala dublă, adică găsirea funcției y determinată de ecuația

$$y'' = f(x)$$

cu condițiile inițiale y_0 și y_0'.

Formula pe care el o dă pentru aceasta se scrie cu notațiile noastre astfel:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - \frac{1}{240}\Delta^4\eta_{n-2} + \frac{31}{60\,480}\Delta^6\eta_{n-3}, \qquad (*)$$

unde

$$\eta_n = h^2 f(x_n).$$

El recomandă ca intervalul h să fie luat astfel încît în această formulă să fie suficient să se mențină numai primii trei termeni.

Pentru a folosi această formulă, el alcătuiește paralel două tabele perfect analoge tabelelor 53 și 54 date în § 96 dintre care una conține mărimea y și diferențele ei prime și secunde, iar a doua conține, după cum spune Legendre, mărimea „ajutătoare" η și diferențele ei pînă la ordinul al patrulea. Presupunînd că în prima parte a tabelei s-a ajuns pînă la valoarea y_n corespunzătoare valorii $x = x_n$, el calculează pentru a doua parte mărimile η_{n+1} și η_{n+2} pe care folosindu-le, găsește diferențele $\Delta^2\eta_{n-1}$ și $\Delta^4\eta_{n-2}$ ce stau în aceeași linie dreaptă ca și η_n; cu ajutorul lor, el formează din formula (*) mărimea $\Delta^2 y_{n-1}$, și apoi

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1} \quad \text{și} \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y_n.$$

Expunînd această metodă, el spune: „Ar fi fost de dorit ca, cu metode asemănătoare și cu ajutorul unor serii ce converg tot atît de repede, să existe posibilitatea de a calcula valorile succesive ale funcției u determinată de ecuația diferențială

$$\frac{du}{d\varphi} = F(u, \varphi)$$

sau de o ecuație de ordin superior. Această problemă este de același gen ca și problema referitoare la calculul integralelor simple și multiple, *dar rezolvarea ei prezintă dificultăți cu mult mai mari și pînă acum nu vedem o altă metodă pentru realizarea ei decît aplicarea formulei lui Taylor*", după care el expune metoda lui Euler.

Însă Legendre nu ar fi avut decît să exprime mărimile $\Delta^2\eta_{n-1}$ și $\Delta^4\eta_{n-2}$ prin diferențele existente în tabela lui, situate în ultima linie oblică care pleacă de la η_n în sus și să observe că omiterea tuturor diferențelor al căror ordin este mai mare decît patru este echivalentă cu presupunerea că diferențele de ordinul al patrulea sînt constante pentru ca să obțină:

$$\Delta^4\eta_{n-2} = \Delta^4\eta_{n-3} = \Delta^4\eta_{n-4} = \dots,$$

$$\Delta^2\eta_{n-1} = \Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-3} =$$
$$= \Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-4},$$

și după substituire, formula lui ar fi luat forma

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\eta_{n-1} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\eta_{n-4}\right].$$

Aceasta este formula lui Störmer care rezolvă tocmai problema menționată de Legendre și anume, așa cum vedea Legendre acest lucru.

Această observație poate să servească drept exemplu a faptului că o soluție care, după ce a fost dată, se dovedește a fi foarte simplă și evidentă, poate să scape atenției unor matematicieni ca Legendre.

§ 110. În probleme cu caracter ingineresc se întîlnesc ecuații de forma

$$y^{IV} = f(x, y)$$

(încovoierea grinzii cu bază elastică). Pentru ecuațiile de această formă se poate folosi metoda pe care o aplică Legendre pentru calculul integralei cuadruple, adică se poate pleca de la formula

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2} - \frac{1}{720}\Delta^4\eta_{n-3} + \frac{421}{4755\cdot 1024}\Delta^6\eta_{n-4} - \cdots,$$

unde

$$\eta_n = h^4 y^{IV} = h^4 f(x_n, y_n).$$

Mărginindu-ne la diferențele de ordinul al patrulea, putem pune

$$\Delta^4\eta_{n-3} = \Delta^4\eta_{n-4},$$

și formula noastră va fi:

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2} - \frac{1}{720}\Delta^4\eta_{n-4}.$$

Pentru un interval h suficient de mic, ultimul termen poate fi făcut, de asemenea, foarte mic încît el să nu exercite nici o influență asupra rezultatului și obținem formula

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2},$$

cu ajutorul căreia calculele se fac atît de simplu încît nu sînt necesare lămuriri suplimentare.

Mai observăm că la rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale după metoda lui Störmer, în forma în care ea a fost expusă aici, nu se efectuează derivarea funcției $f(x, y)$ din membrul al doilea al ecuației, ci se lucrează numai cu valorile particulare ale acestei funcții; prin urmare această funcție poate cuprinde elemente care se dau grafic, ceea ce este foarte important pentru problemele matematicei aplicate.

§ 111. Am dat o întreagă serie de metode de integrare numerică aproximativă a ecuațiilor diferențiale; ne putem întreba ce metodă să aplicăm într-un caz concret oarecare, în special dacă nu se cere apoi efectuarea unui calcul, ci a unei întregi serii de calcule uniforme.

În acest caz trebuie de la început să studiem detailat prin exemple amănunțite gradul de aproximație care poate fi atins cu o metodă sau alta, munca și timpul cerut și să ne decidem pentru acea metodă cu care precizia cerută de necesitățile practice se obține cu cea mai puțină muncă. Drept exemplu al unui astfel de studiu, dăm aplicația metodelor expuse

Scanned with OKEN Scanner

la integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare a trenului, în cazul în care el ieșind dintr-o stație străbate la început un teren drept și apoi o pantă.

Toate datele și notațiile le luăm din lucrarea profesorului I. V. Lomonosov „Тяговые расчемы".

Pentru mișcarea trenului pe terenul drept avem ecuația

$$\frac{dv}{dt} = \zeta [f - w_0], \tag{1}$$

iar

$$\zeta = 120, \quad f = \frac{F}{P+Q}, \quad w_0 = 1{,}5 + 0{,}05v,$$

unde F este forța de tracțiune a locomotivei, $P+Q$ — greutatea trenului, w_0 — rezistența specifică, v — viteza. Ca unități se iau kilometrul, ora, tona, pentru greutatea trenului, kilogramul pentru forța de tracțiune.

La trecerea trenului de pe terenul drept pe pantă, ecuația lui de mișcare va fi

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \zeta [f - w_0 - ks], \tag{2}$$

unde s este lungimea acelei părți din tren care se găsește deja pe pantă,

$$k = \frac{i_2}{L}$$

iar i_2 este înclinarea în miimi, L — lungimea trenului.

În sfîrșit, mișcarea trenului pe pantă este dată de ecuația

$$\frac{dv}{dt} = \zeta [f - w_0 - i_2]. \tag{3}$$

Toate aceste trei ecuații pot fi reunite într-un sistem

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \zeta [f - w_0 - k(x-l)], \\ \frac{dx}{dt} &= v, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

convenind să considerăm:

$$\left.\begin{aligned} k(x-l) &= 0, \text{ pentru } x \leqslant l, \\ k(x-l) &= \frac{i_2}{L} s \text{ pentru } l \leqslant x \leqslant L+l, \\ k(x-l) &= i_2 \text{ pentru } x > L+l; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

aici x este distanța capului trenului de la gară (drumul parcurs), l — lungimea porțiunii orizontale. Condițiile inițiale sînt: pentru $t=0$

$$x = 0, \quad v = 0.$$

§ 112. Pentru exemplul nostru particular, datele numerice sînt:

$$\begin{aligned} \zeta &= 120, \\ P+Q &= 1830 \text{ t}, \\ i_2 &= 6, \\ l &= 0{,}640 \text{ km}, \\ L &= 0{,}560 \text{ km}, \\ \zeta k &= 1280. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom pune pentru a prescurta scrierea

$$p = \zeta (f - w_0) = \zeta \left[\frac{F}{P + Q} - w_0 \right], \qquad (6)$$

atunci luînd mărimea forței de tracțiune F a locomotivei de marfă cu seria „Э" într-o cursă cu regulatorul complet deschis și cu umplere 0,4 avem tabela 79 a valorilor funcției p.

Tabela 79

Valorile funcției $p=\zeta (f-w_0)$

v	p	v	p	v	p	v	p
0	830	10	676	20	446	30	266
2	808	12	625	22	408	32	235
4	796	14	575	24	370	34	205
6	784	16	528	26	334	36	188
8	735	18	486	28	299	38	148
10	676	20	446	30	266	40	122

Aceste valori sînt date printr-o curbă construită la o scară mare, a cărei fotografie micșorată este dată în fig. 69 și anume: pentru $v=1$ cm ca unitate, pentru $p=1$ cm ca douăzeci de unități. Porțiunea de la $v=0$ pînă la $v=6$ reprezintă o linie dreaptă.

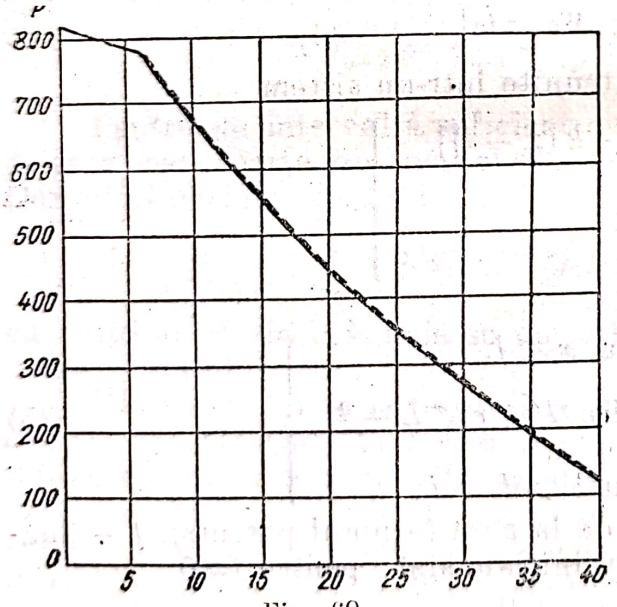

Fig. 69

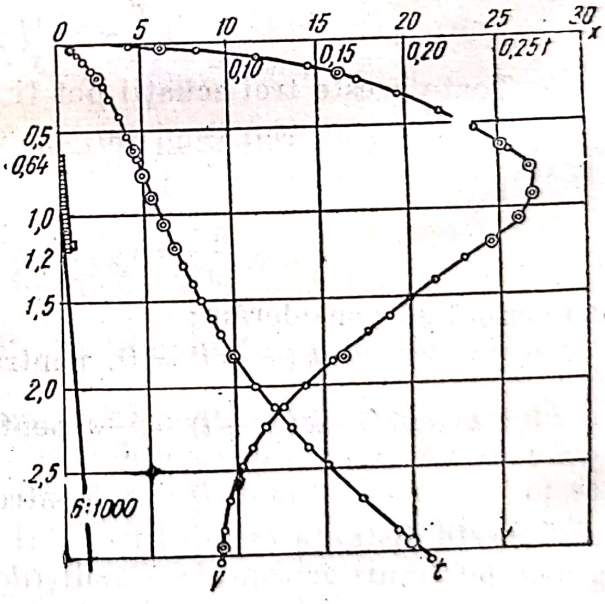

Fig. 70

Luînd timpul t drept variabilă independentă, îl considerăm la intervale egale cu $\tau=0{,}005$, iar valorile p le luăm corespunzătoare argumentului v de pe curba amintită sau din tabela dată mai sus și facem calculele așa cum este arătat în tabela 80.

Acest calcul s-a făcut cu ajutorul unei rigle de calcul de 50 cm.

Dînd lui x valorile indicate în tabelă și luînd valorile lui v și t corespunzătoare construim curba (fig. 70) ce reprezintă grafic mișcarea trenului; v și t vor fi exprimate ca funcții de distanța x.

Mișcarea trenului

Tabela 80

Ecuații

$$\frac{dv}{dt} = p - \zeta k(x-l); \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

Formule

$$\eta_n = [p_n - \zeta k(x-l)]; \; \tau = q_n \tau,$$

$$\Delta v_n = \eta_n + \frac{1}{2}\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-1}; \; \Delta x_n = \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1})\tau$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta v_n; \; x_{n+1} = x_n + \Delta x_n,$$

n	v_n	Δv_n	q_n	η_n	$\Delta\eta_n$	$\Delta^2\eta_n$		x_n	Δx_n	$\zeta k(x_n-l)$	t_n
0	0							0			0
		4,10	820	4,10					0,010		
1	4,10				—0,12	—0,19		0,010			0,005
		3,92	795	3,93					0,031		
2	8,02				—0,31	—0,17		0,041			0,010
		3,41	735	3,67					0,048		
3	11,43				—0,48	0,12		0,089			0,015
		2,88	638	3,19					0,065		
4	14,31				—0,36	0,06		0,154			0,020
		2,70	567	2,83					0,079		
5	17,01				—0,30	0,06		0,233			0,025
		2,41	507	2,53					0,092		
6	19,42				—0,24	0,03		0,325			0,030
		2,20	458	2,29					0,103		
7	21,62				—0,21	0,02		0,428			0,035
		1,98	415	2,08					0,113		
8	23,60				—0,19	—0,14		0,541			0,040
		1,80	378	1,89					0,123		
9	25,40				—0,33	—0,63		0,664		34	0,045
		1,32	311	1,56					0,133		
10	25,72				—0,96	0,12		0,797		201	0,050
		—0,13	120	0,60					0,134		
11	26,59				—0,84	0,05		0,931		373	0,055
		—0,61	— 49	—0,24					0,133		
12	25,98				—0,79	0,07		1,064		541	0,060
		—0,40	—207	—1,03					0,129		
13	24,58				—0,72	—		1,193		710	0,065
		—1,71	—350	—1,75					0,116		
14	22,87				0,10	—		1,299		720	0,070
		—1,61	—329	—1,65					0,108		
15	21,26				0,16	—		1,407		720	0,075
		—1,42	—298	—1,49					0,103		
16	19,84				0,10	—		1,510		720	0,080
		—1,35	—277	—1,39					0,096		
17	18,49				0,12	—		1,606		720	0,085
		—1,17	—224	—1,22					0,090		
18	17,32							1,696		720	0,090
				—2,77							
18	17,32		—220	—2,29	0,57			1,696		720	0,090
		—1,92				—0,15			0,167		
20	15,40			—1,78	0,42	—0,04		1,863		720	0,100
		—1,63	—178						0,146		
22	13,77			—1,40	0,38	—0,07		2,009		720	0,110
		—1,20	—140						0,132		
24	12,57			—1,09	0,31	—0,09		2,141		720	0,120
		—0,96	—109						0,121		
26	11,61			—0,87	0,22	—0,01		2,262		720	0,130
		—0,80	— 87						0,112		
28	10,81			—0,66	0,21			2,374		720	0,140
		—0,56	— 66						0,105		
30	10,25							2,479		720	0,150
26				—1,74	0,70	—					
30	10,25	—0,69	— 52	—1,04				2,479		720	0,150
									0,198		
34	9,56		— 32	—0,64	0,40	—		2,677		720	0,170
		—0,44							0,186		
38	9,12		— 14	—0,23	0,36			2,863		720	0,190
		—0,10							0,181		
42	9,02							3,044		720	0,210

Scanned with OKEN Scanner

§ 113. Calculul arătat în tabela 80 este făcut cu o exactitate care depășește cu mult nu numai cea care se poate obține în practică, dar chiar necesitățile practice; rostul unui asemenea calcul constă numai în a putea compara rezultatele obținute prin alte metode simplificate cu acestea care sînt mult prea exacte și aprecierea în acest mod a aproximației date acestor metode și procedee simplificate.

Pentru a clarifica cele spuse să dăm cîteva exemple numerice:

Luăm metoda lui Cecet „Тяговые расчеты" (p. 135) a cărei esență constă în faptul că curba

$$p = f - w_0,$$

este înlocuită printr-un poligon înscris în ea (fig. 69) sau circumscris; pentru fiecare porțiune rectilinie ecuația de mișcare se integrează în forma finită și prin urmare se capătă drept rezultat o tabelă asemănătoare tabelei 81.

Se înțelege că înlocuirea curbei p printr-un poligon se poate face într-o infinitate de moduri și că luînd latura poligonului suficient de mică se poate atinge o aproximație oricît de bună; problema constă nu însă atît în atingerea acestei aproximații, cît în caracterul simplu al calculului, cu gradul de precizie limitat care se cere pentru practică. De această problemă nu ne vom ocupa aici.

Pe fiecare latură a poligonului vom avea:

$$p = a - bv,$$

iar a și b sînt constante pentru fiecare latură în parte, însă se schimbă de la latură la latură. Vom însemna prin a_n, b_n, valorile lui a și b în porțiunea n a curbei, adică pentru porțiunea cuprinsă între punctele

$$v = v_n,\ p = p_n \text{ și } v = v_{n+1} \text{ și } p = p_{n+1}.$$

Vom avea atunci:

$$b_n = \frac{p_n - p_{n+1}}{v_{n+1} - v_n},$$

$$a_n = p_n + b_n v_n = p_{n+1} + b_n v_{n+1} = \frac{p_n v_{n+1} - p_{n+1} v_n}{v_{n+1} - v_n}. \tag{8}$$

Ecuația de mișcare a trenului va fi:

$$\frac{dv}{dt} = a_n - b_n v, \tag{9}$$

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

și condițiile inițiale: pentru $t = t_n$

$$x = x_n \quad \text{și} \quad v = v_n. \tag{10}$$

De aici rezultă

$$t - t_n = \frac{1}{b_n} \lg \frac{a_n - b_n v_n}{a_n - b_n v} = \frac{1}{b_n} \lg \frac{p_n}{p}. \tag{11}$$

Apoi avem

$$a_n - b_n v = (a_n - b_n v_n)\, e^{-b_n(t-t_n)},$$

$$v - v_n = \frac{1}{b_n}(a_n - b_n v_n)\,[1 - e^{-b_n(t-t_n)}], \tag{11'}$$

$$x - x_n = v_n(t-t_n) + \frac{1}{b_n}(a_n - b_n v_n)\left[(t-t_n) - \frac{1}{b_n}(1 - e^{-b_n(t-t_n)})\right],$$

adică

$$x - x_n = \frac{1}{b_n}[a_n(t-t_n) - (v - v_n)]. \tag{12}$$

Din formulele (11) și (12) se vede că pentru folosirea lor este mai comod ca să fie date valorile lui v. Însă atunci nu se obține dintr-odată acea valoare $x=l$ pentru care trenul începe urcușul și valorile lui v și t corespunzătoare acestei valori a lui x vor trebui determinate sau prin metoda aproximațiilor succesive sau printr-o interpolare. Se va arăta aceasta în exemplul în care este indicată ordinea și schema efectuării calculelor pe baza formulelor (11) și (12) (tabela 81).

§ 114. După ce au fost calculate valorile

$$v = v_0 \text{ și } t = t_0$$

corespunzătoare valorii $x=l$ sau $s=0$ adică corespunzătoare intrării trenului pe pantă, ecuația sa de mișcare va fi:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + ks = a, \tag{13}$$

și condițiile inițiale: pentru $t=t_0$

$$s = 0,$$

$$v = v_0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0,$$

presupunînd că pentru intervalul respectiv de viteză

$$p = a - bv.$$

Integrala ecuației (13) cu condițiile indicate este

$$s = e^{h(t-t_0)}\left\{C_1 \cos\frac{2\pi(t-t_0)}{\tau} + C_2 \sin\frac{2\pi(t-t_0)}{\tau}\right\} + \frac{a}{k}, \tag{14}$$

$$h = \frac{b}{2}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{k-h^2}},$$

$$C_1 = -\frac{a}{k}, \quad C_2 = \left(v_0 - \frac{ha}{k}\right)\frac{1}{\sqrt{k-h^2}}. \tag{15}$$

Formulele (14) și (15) nu pot fi privite drept comode pentru calculele în care se cere numai un număr mic de valori ale lui s.

Ecuația (13) trebuie să o folosim numai în cursul intervalului de timp în care trenul a intrat complet pe pantă, adică pentru valorile lui s

de la $s=0$ pînă la $s=L$, cînd L nu depășește 0,6; de aceea, este mai util să se înlocuiască ecuația (13) prin sistemul

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a - bv - ks, \\ \frac{ds}{dt} &= v \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

și să se ia s ca variabilă independentă, adică să se scrie acest sistem astfel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v\,dv}{ds} &= a - bv - ks, \\ dt &= \frac{1}{v}\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{13''}$$

Să ne închipuim că intervalul L este împărțit în cîteva subintervale egale sau inegale și notăm cu $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n \ldots$ valorile lui s corespunzătoare începutului fiecărui subinterval; atunci pentru intervalul $s_{n+1} - s_n$ avem ecuația

$$\frac{v\,dv}{ds} = a - bv_n - ks_n - b\,(v - v_n) - k\,(s - s_n)$$

sau

$$\frac{v\,dv}{ds} = p_n - ks_n - b\,(v - v_n) - k\,(s - s_n). \tag{16}$$

Pe de altă parte, pentru valorile $s - s_n$ suficient de mici în dezvoltarea lui $v - v_n$ în serie taylorianăputem păstra numai primul termen și putem scrie:

$$v - v_n = (s - s_n)\,v'_n.$$

Însă din ecuația (16) rezultă

$$v'_n = \frac{p_n - ks_n}{v_n} = \frac{q_n}{v_n},$$

de aceea ecuația (16) se scrie astfel:

$$\frac{v\,dv}{ds} = q_n\left[1 - \frac{b}{v_n}(s - s_n)\right] - k\,(s - s_n),$$

ceea ce prin integrare dă:

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_n) = q_n(s - s_n) - \frac{1}{2}\left(q_n\frac{b}{v_n} + k\right)(s - s_n)^2. \tag{17}$$

Formula obținută (17) servește pentru calculul succesiv al vitezelor; după ce vitezele

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots$$

au fost calculate, calculăm timpul după formula

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_{n+1}} + \frac{1}{v_n}\right] \cdot [s_{n+1} - s_n] \tag{18}$$

și sumăm aceste intervale.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a aprecia gradul de aproximație dat de formula (17) este suficient să calculăm cea mai mare valoare a primului termen omis, care va fi:

$$-b\frac{(s-s_n)^3}{6}\varphi''_n.$$

Din ecuația (16) rezultă:

$$\varphi\varphi'' + \varphi'^2 = -b\varphi' - k,$$

de unde

$$\varphi''_n = -\frac{1}{v_n}[b\varphi'_n + k + \varphi'^2_n].$$

În cazul nostru, cea mai mare valoare a lui q_n este 360, a lui φ_n aproximativ 26, $k = 1280$, $b = 19{,}3$; deci

$$\varphi'_n = \frac{q_n}{v_n} = 14,$$

$$\varphi''_n = -\frac{1}{36}[270 + 1280 + 196] = -67.$$

Dacă luăm

$$s - s_n \leqslant 0{,}2,$$

atunci vom avea

$$\frac{1}{6}b\varphi''_n(s-s_n)^3 \leqslant \frac{1}{6}19{,}3 \cdot 67 \cdot 0{,}008 \leqslant 1{,}7 < 2.$$

O astfel de aproximație poate fi considerată mai mult decît suficientă; prin urmare, lungimea poate fi împărțită în trei părți, deoarece erorii egale cu 2 în valoarea lui φ^2 îi corespunde pentru $\varphi=25$ o eroare relativă în valoarea lui φ egală cu $\frac{1}{25} = 0{,}04$. Dacă ne mulțumim în valoarea lui φ cu o eroare de 0,1, atunci în valoarea lui φ^2 pentru $\varphi=25$ eroarea va fi 5 (în adevăr, $\sqrt{625}=25$; $\sqrt{630}=25{,}0998$, prin urmare, am fi putut lua:

$$\frac{1}{6}b \cdot \varphi''_n(s-s_n)^3 \leqslant 5,$$

adică, pentru valorile date mai sus,

$$s - s_n \leqslant \sqrt[3]{\frac{30}{19{,}3 \cdot 67}} \leqslant 0{,}28,$$

adică este suficient să împărțim lungimea L în două.

Astfel, în cazul nostru înlocuim curba p printr-un poligon format din următoarele laturi:

$$\begin{aligned}
0 < \varphi \leqslant\ 6;&\quad a = 820;&\quad b =\ 6{,}00,\\
6 \leqslant \varphi \leqslant 16;&\quad a = 937;&\quad b = 25{,}6,\\
16 \leqslant \varphi \leqslant 26;&\quad a = 837;&\quad b = 19{,}3,\\
26 \leqslant \varphi \leqslant 36;&\quad a = 746;&\quad b = 15{,}8.
\end{aligned}$$

Atunci dispunem calculul în modul arătat în tabelele următoare.

Tabela 81

Mișcarea pe terenul drept

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
v	p	$\lg p$	$\lg \frac{p_n}{p_{n+1}}$	$t_{n+1}-t_n=\frac{2,302}{b_n}\cdot(IV)$	$a_n\cdot(V)$	$x_{n+1}-x_n$	t	x
0	820	2,9138					0,0000	0,000
			0,0195	0,0075	6,15	0,025		
6	784	2,8913					0,0075	0,025
			0,1717	0,0154	14,50	0,175		
16	528	2,7226					0,0229	0,201
			0,1976	0,0237	19,80	0,507		
26	335	2,5250					0,0466	0,708

Tabela 82

Intrarea trenului pe pantă

Calculul vitezelor prin formula (17)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	hs_n	$q_n=(II)-(III)$	$(IV)\cdot h$ $(h=0,140)$	$q_n\cdot\frac{h}{v_n}$	$(VI+k)$	$-(VII)\cdot\frac{h^2}{2}$	$2[(V)+(VIII)]$	v_n^2	v_n
0	350	0	350	49,0	267	1547	—15,1		632	25,13
								69,8		
0,140	325	130	195	20,3	106	1386	—13,6		702	26,50
								13,4		
0,280	321	360	— 39	—5,6	—28,2	1252	—12,5		715	26,74
								—36,2		
0,420	334	540	—206	—28,1	—152	1128	—11,2		679	26,06
								—78,6		
0,560		720							600	24,52

Interpolare : $0,708-0,640=0,068,$

$$\tau=\frac{0,068}{26}=0,0026,$$

$$v=26-335\cdot 0,0026=26-0,87=25,13.$$

$$\tau_1=\frac{0,068}{25,26}=0,00266,$$

$$v_1=26-325\cdot 0,00266=26-0,87=25,13.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 83

Intrarea trenului pe pantă
Calculul timpului (formula 18)

s	$\frac{1}{v}$	$\frac{h}{2}\left[\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_{n+1}}\right]$	t
0	0,0389		0,0440
		0,0054	
0,140	0,0378		0,0493
		0,0053	
0,280	0,0374		0,0546
		0,0053	
0,420	0 0384		0,0599
		0,0055	
0,560	0,0408		0,0654

Tabela 84

Mersul pe pantă

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
v	$p-720$	lg II	$\lg\frac{p_n}{p_{n+1}}$	$t_{n+1}-t_n=$ (IV)$\frac{2,302}{b}$	(V)·$(a-720)$	$x_{n+1}-x_n$	t	x
24,52	—361	2,5575					0,0654	1,200
			0,2742	0,0248	3,86	0,642		
16,0	—192	2,2333					0,0982	1,842
			1,1372	0,0985	21,70	1,100		
9,0	—14	1,1461					0,1967	2,942
8,15	0	—	—	—	—	—	∞	∞

Așadar, pentru

$$x = 0,640$$

vom avea:

$$v = 25,13, \quad t = 0,0440.$$

Viteza limită $V = \frac{a-720}{b} - \frac{217}{25,6} = 8,15.$

Concordanța rezultatelor calculate după această metodă cu rezultatele obținute prin prima metodă se vede, de exemplu, din compararea următoarelor numere:

x	t după metoda I	t după metoda II
0,640	0,0437	0,0440
1,200	0,0653	0,0654
2,900	0,194	0,193

Pentru a pune mai bine în evidență cum se prezintă situația, s-a construit după rezultatele obținute prin prima metodă o curbă (fig. 70), pe care punctele respective sînt notate prin cercuțe mici. Rezultatele calculelor obținute prin a doua metodă sînt notate pe aceeași curbă cu cercuțe duble.

Scanned with OKEN Scanner

Am văzut că în calculul timpului și al vitezei după formulele (17) și (18) la intrarea trenului pe pantă se pot lua intervale $\leqslant 0{,}28$ adică lungimea L poate fi împărțită în două; în acest caz, calculul se reduce la următorul.

Tabela 85

Intrarea trenului pe pantă

Calculul vitezelor

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	q_n=(II)—(III)	$\frac{(IV)\cdot h}{(h=0{,}280)}$	$\frac{q_n b}{v_n}$	(VI)+h	(VII)$\cdot\frac{h^2}{2}$	2[(V)+(VIII)]	v_n^2	v_n
0	350	0	350	98	264	1544	—60		632	25,13
								76		
0,280	323	360	—37	—10	—27	1253	—49		708	26,61
								—118		
0,560									504	24.29

Tabela 86

Intrarea trenului pe pantă

Calculul timpului

s_n	$\frac{1}{v_n}$	$\frac{h}{2}\left(\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_{n+1}}\right)$	t
0	0,0308		0,0440
		0,0103	
0,280	0,0376		0,0548
		0,0110	
0,560	0,0412		0,0658

Acest calcul de control arată în mod clar că la folosirea formulelor (17) și (18) este suficient să împărțim lungimea trenului în două pentru calculul începerii urcușului.

§ 115. Observăm cu privire la formulele (17) și (18) că practic, cu ajutorul lor se rezolvă problema integrării ecuației

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \zeta\,[f - w_0 - ks],$$

de mișcare a trenului la intrarea sa pe pantă cu gradul de aproximație necesar în practică, oricare ar fi forma funcției f. În adevăr, mărimea b ce apare în aceste formule, în cazul în care funcția f este dată analitic, nu este altceva decît

$$b = f'(v_n);$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă funcția f este dată grafic, atunci mărimea b se obține din formula

$$b = \frac{f(v_n - \alpha) - f(v_n + \alpha)}{2\alpha},$$

unde α este o mărime suficient de mică. În acest din urmă caz, este suficient să cunoaștem mărimea b cu o aproximație grosolană, deoarece termenul $\frac{bq_n}{v}$, în care figurează este mic în comparație cu k și are un coeficient mic $\frac{h^2}{2}$.

Astfel, în cazul nostru viteza v_n este apropiată de 25; din tabela valorilor funcției p se vede, că

$$b = \frac{370 - 334}{2} = 18;$$

repetînd calculul cu această valoare a lui b, obținem, calculînd toate numerele din tabela 85, exact același rezultat ca și mai sus, pentru $b=19{,}3$ care este luat pentru intervalul de la $v=16$ pînă la $v=26$; o dată cu aceasta este clar că valoarea lui b luată pentru un interval mai restrîns este mai aproape de realitate.

Tabela 87

Intrarea trenului pe pantă

Calculul vitezelor ($b=18$)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	q_n=(II)—(III)	(IV)·h	$\frac{b}{v_n}q_n$	(IV)+k	—(VII)$\frac{h^2}{2}$	2[(V)+(VIII)]	v_n^2	v_n
0	350	0	350	98	249	1529	—60		632	25,13
								76		
0,280	323	360	—37	—10	—27	1253	—49		708	26,61
								—118		
0,560									590	24,29

§ 116. Să vedem acum, care va fi eroarea, dacă formulele (17) și (18) se aplică fără a mai face subdiviziunea, adică luînd $h=L$; în acest caz, formulele vor fi:

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 &= v_0^2 + 2p_0L - \left(p_0\frac{b}{v_0} + k\right)L^2, \\ t_1 &= t_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right)L, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

unde notațiile sînt evidente.

În cazul nostru vom avea:

$$v_0 = 25{,}13;\ p_0 = 350;\ b = 18;\ k = 1280;\ t_0 = 0{,}0440,$$

Scanned with OKEN Scanner

și obținem:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= 633 \\ 2p_0L &= 392 \\ -\left(\frac{p_0b}{v_0}+k\right)L^2 &= -480 \\ \hline v_1^2 &= 545\,;\ v_1 = 23{,}32. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{v_0} = 0{,}0398$$

$$\frac{1}{v_1} = 0{,}0429$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}\right)L &= 0{,}0231 \\ t_0 &= 0{,}0440 \\ \hline t_1 &= 0{,}0671 \end{aligned}$$

Astfel

$$\begin{aligned} \frac{2L}{v_0+v_1} &= 0{,}0231 \\ t_0 &= 0{,}0440 \\ \hline t_1 &= 0{,}0671, \end{aligned}$$

în vreme ce prin subîmpărțirea intervalului s-au obținut valorile adevărate,

$$v_1 = 24{,}52 \text{ și } t_1 = 0{,}0654.$$

O astfel de aproximație nu este satisfăcătoare și în formula (17) trebuie să luăm și termenul următor; atunci formula (17) se transformă în următoarea:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2p_0L - \left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 + \frac{1}{3}\frac{b}{v_0}\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k + \frac{p_0^2}{v_0^3}\right]L^3, \qquad (20)$$

pe care este mai comod pentru calcule să o scriem sub forma:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2p_0L - \left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 + \frac{1}{3}\frac{bL}{v_0}\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k\right]L^2 + \frac{1}{3}b\frac{p_0^2}{v_0^3}L^3. \qquad (20')$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, pentru datele noastre vom avea:

$$v_0 = 25{,}13, \qquad v_0^2 = \quad 632$$
$$2p_0L = \quad 392$$
$$-\left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 = -480$$
$$\frac{1}{3}\frac{bL}{v_0}\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k\right]L^2 = +\ 64$$
$$\frac{1}{3}\frac{bL_0^2}{v_0^3}\cdot L^3 = +\ 8$$

$$v_1^2 = \quad 616, \qquad v_1 = 24{,}84$$

$$t_1 - t_0 = \frac{2L}{v_0 + v_1} = 0{,}0224$$
$$t_0 = 0{,}0440$$
$$t_1 = 0{,}0664$$

Aceste valori, după cum se vede, sînt cu mult mai apropiate de cele adevărate $v_1 = 24{,}52$ și $t_1 = 0{,}0654$, și formula (20), cu tot caracterul aparent complicat al calculelor rezolvă problema simplu dacă se folosește rigla de calcul.

§ 117. Tabelele 80—84 (§§ 112—114) și curba din fig. 70 arată în ce măsură concordă rezultatele calculelor efectuate după diferite metode. Pentru scopurile practice, în general nici nu este necesară o asemenea exactitate, care este pur teoretică și reprezintă numai o verificare a calculelor care ne poate convinge de absența unor erori grosolane.

Laplace, în prefața vastei sale lucrări „Calculul probabilităților", spune: „... la théorie des probabilités n'est que le bon sens confirmé par le calcul". Tehnicianul, aplicînd matematica la probleme practice, trebuie el însuși să se îngrijească ca aceasta să servească drept sprijin al intuiției; el trebuie să-și amintească că calculul poate fi făcut oricît de exact, însă rezultatul nu poate fi mai exact decît datele și ipotezele pe care este bazat; de aceea, exactitatea calculelor trebuie să corespundă exactității datelor și scopului practic pentru care se fac aceste calcule.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

§ 118. În cea mai veche și mai precisă dintre științele bazate pe măsurători și observații — astronomia — se folosesc de mai mult de 100 de ani, pentru prelucrarea observațiilor și obținerea rezultatelor celor mai sigure, anumite reguli, care alcătuiesc așa numita „metodă a celor mai mici pătrate".

Această metodă a fost inventată de *Gauss* în anul 1794, la vîrsta de 17 ani, dar nu a fost publicată decît în renumita sa lucrare „Teoria mișcării corpurilor cerești de-a lungul unor secțiuni conice în jurul soarelui", editată în 1808.

Trebuie să se menționeze aici, că încă în 1806 *Legendre* a propus în lucrarea sa „O metodă nouă pentru determinarea orbitelor cometelor", această metodă, însă într-un mod cu mult mai incomplet decît acela în care a tratat-o Gauss în monografia sa.

Gauss a revenit apoi în decursul lungii sale vieți (el a murit în anul 1855) de nenumărate ori la expunerea metodei sale din diferite puncte de vedere, ducînd-o la cel mai înalt grad de perfecțiune.

Vom da aici o expunere scurtă a acestei metode, avînd în vedere prelucrarea observațiilor și a măsurătorilor extrem de simple, cu care avem de-a face în problemele tehnice cele mai simple.

§ 119. Fiecare măsurătoare, oricare ar fi obiectul ei și oricare ar fi instrumentele cu care se efectuează, conține totdeauna o anumită eroare. Se înțelege că, cu cît această eroare este mai mică, cu atît este mai *precisă* și măsurătoarea, însă practica tuturor măsurătorilor arată că este *imposibil* să se evite erorile. Acest lucru se manifestă prin faptul că, la repetarea de cîteva ori a aceleiași măsurători, cu același aparat, se obțin rezultate care nu coincid între ele. După mărimea acestor diferențe ne putem da seama de precizia măsurătorii și a rezultatului, însă pentru ca această apreciere să devină obiectivă trebuie să fie efectuată după anumite reguli și să fie exprimată prin numere. Scopul nostru constă în expunerea acestor reguli.

Înainte de toate trebuie să convenim care erori reprezintă obiectul analizei noastre.

La diferitele măsurători, erorile se pot datora unor cauze diferite, de exemplu:

Scanned with OKEN Scanner

1) O citire greșită (să zicem în locul lui 17 s-a notat 12), dar acest fel de erori sînt pur și simplu scăpări și nu se referă la obiectul analizei noastre. La prelucrarea observațiilor, aceste greșeli sînt de obicei descoperite de la sine și pot fi rectificate.

2) Se poate întîmpla ca însăși măsurătoarea să fie efectuată cu un aparat puțin precis, să zicem de exemplu că s-au măsurat anumite ordonate pe un grafic, care a fost desenat cu ajutorul unei rigle milimetrice „juste" și că această măsurătoare s-a efectuat cu o altă riglă, la care 500 de diviziuni corespund numai la 498 ale primei rigle. Evident, că toate ordonatele măsurate vor conține o eroare, proporțională cu mărimea ordonatei, astfel încît această eroare este supusă unei legi *bine determinate*, pe baza căreia ea poate fi luată în considerare și eliminată. Această eroare se numește *eroare sistematică*; determinarea ei, precum și calculul și eliminarea ei, depind în fiecare caz particular de studiul și de verificarea aparatului cu care s-a efectuat măsurătoarea, prin urmare nici acest caz nu se referă la problema noastră.

3) Erorile pot proveni de la o cauză ce acționează permanent; în acest caz este posibil să se observe o lege bine determinată în variația acestor erori, după care se poate apoi determina însăși cauza erorilor.

Să dăm două exemple de erori de acest fel citînd din cursul de astronomie ținut la școala politehnică din Paris de cunoscutul astronom Fay.

1. La determinarea latitudinii observatorului din Paris prin observarea trecerii la meridian a diferitelor stele, s-a remarcat că latitudinea este diferită, în funcție de distanța zenitală, așa cum se vede din tabela următoare:

Distanța zenitală	Latitudinea	Distanța zenitală	Latitudinea
0°	48°50′10″,9	40	48°50′13″,2
10	48 50 11, 8	53	48 50 13, 3
22	48 50 11, 9	63	48 50 13, 5
31	48 50 12, 1	74	48 50 14, 3

Regularitatea se vede aici foarte clar — latitudinea determinată este cu atît mai mare, cu cît este mai mare distanța zenitală care servește la determinarea ei.

Această regularitate devine și mai clară, dacă tabela este reprezentată grafic (fig. 71) Din această figură se poate observa că curba „conformă" dusă cît se poate de aproape de punctele înregistrate, are un caracter sinusoidal foarte pronunțat.

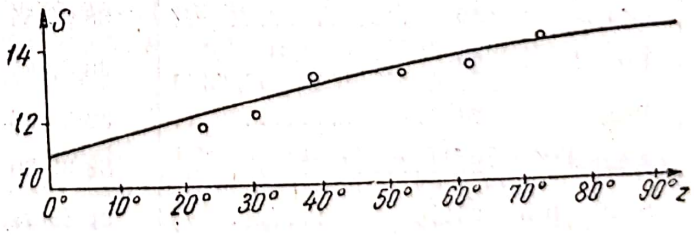

Fig. 71

În adevăr, punînd

$$\delta = 3'',5 \cdot \sin Z,$$

$$\varphi_1 = \varphi - \delta,$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem „tabela rectificată".

Z	φ	δ	$\varphi_1=\varphi-\delta$
0°	48°50′10″,9	0″,0	48°50′10″,9
10	48 50 11, 8	0, 6	48 50 11, 2
22	48 50 11, 9	1, 3	48 50 10, 6
31	48 50 12, 1	1, 8	48 50 10, 3
40	48 50 13, 2	2, 2	48 50 11, 0
53	48 50 13, 3	2, 8	48 50 10, 5
63	48 50 13, 5	3, 1	48 50 10, 4
74	48 50 14, 3	3, 4	48 50 10, 3

Variația mărimii φ_1 nu mai prezintă o regularitate pronunțată și pe lîngă aceasta, toate valorile acestei mărimi sînt cu mult mai apropiate între ele decît valorile necorectate.

Studiul ulterior a arătat că eroarea δ era cauzată de flexiunea țevii cercului meridian sub acțiunea propriei ei greutăți și a greutății obiectivului ei.

2. Un alt exemplu, citat în același curs, se referă la observațiile lui Bradley, referitoare la declinația stelei γ Draconis, efectuată în anul 1736, și care au dus la descoperirea fenomenului de aberație.

Aceste observații sînt arătate în tabela 88.

Tabela 88

Luna și data		Distanța polară observată δ	Deviația de la valoarea medie $\varepsilon=\delta-\delta_0$	Numărul zilelor de la începutul observațiilor t
Decembrie	31.....	38°39′54″,1	5″,4	0
Ianuarie	30.....	38 39 63,5	13,8	30
Februarie	29.....	38 39 69,2	20,5	60
Martie	30.....	38 39 69,2	20,5	90
Aprilie	29.....	38 39 64,0	15,3	120
Mai	29.....	38 39 54,9	6,2	150
Iunie	28.....	38 39 44,1	— 4,6	180
Iulie	28.....	38 39 36,8	—11,9	210
August	27.....	38 39 30,3	—18,4	240
Septembrie	26.....	38 39 28,8	—19,9	270
Octombrie	26.....	38 39 31,4	—17,3	300
Noembrie	25.....	38 39 39,1	— 9,6	330
	Media $\delta_0=$	38°39′48″,7	—	—
	Ianuarie 4	38°39′52″,2	3,5	370

Scanned with OKEN Scanner

Şi aici se poate observa în mod clar variaţia sistematică a abaterilor, putîndu-se găsi chiar o perioadă anuală, din care cauză punînd

$$\varepsilon = a \sin \frac{2\pi}{365} (t + \alpha),$$

aflăm uşor

$$a = 20'', \quad \alpha = 17 \text{ zile},$$

şi adăugînd „corecţia“, se observă că „abaterile“ rămase sînt cu mult mai mici şi nu au un caracter regulat.

Erorile şi abaterile care au un caracter regulat ţin şi ele de erorile sistematice şi nu formează obiectul studiului nostru, care se ocupă numai cu erorile care rămîn după eliminarea celor sistematice şi care se numesc *aleatorii* (*întîmplătoare*).

Erorile aleatorii nu urmează nici o lege, care să exprime mărimea erorii în funcţie de timp sau de orice altă variabilă independentă; ele se supun numai legilor care sînt deduse în calculul probabilităţilor şi care se referă la *repetarea* aşa-numitelor fenomene *aleatorii*.

§ 120. În calculul probabilităţilor se examinează fenomenele, sau cum se numesc de obicei „evenimentele“, pentru a căror apariţie nu putem indica o cauză bine determinată şi nu sîntem în stare să spunem cu siguranţă că aceste evenimente vor avea loc sau nu, ci putem indica numai numărul cazurilor favorabile apariţiei evenimentului dat, din numărul total de cazuri egal posibile, furnizate de experienţă.

Astfel, de exemplu, să presupunem că avem un pachet de 52 de cărţi bine amestecate şi că se scoate din acest pachet o carte la întîmplare; numărul cazurilor favorabile ca această carte să fie de o culoare dată, să zicem de culoarea caro, este 13, iar numărul total de cazuri egal posibile este 52.

Avem deci următoarea definiţie: *probabilitatea unui eveniment se numeşte raportul dintre numărul de cazuri favorabile apariţiei lui şi numărul tuturor cazurilor egal posibile*. Astfel, în exemplul nostru probabilitatea ca cartea scoasă să fie de culoare caro, este $13/52 = 1/4$; probabilitatea că aceasta va fi un as caro este de $1/52$, iar probabilitatea apariţiei unui „nouă“ de orice culoare, va fi $4/52 = 1/13$, etc.

Din această definiţie, rezultă că probabilitatea este totdeauna exprimată printr-o fracţie subunitară, adică o fracţie cuprinsă între 0 şi 1.

Noţiunea de probabilitate se extinde şi la aceste limite, şi anume cînd probabilitatea unui eveniment este egală cu zero, aceasta înseamnă că nu există cazuri favorabile, adică evenimentul nu se poate întîmpla. Cînd probabilitatea unui eveniment este egală cu 1, aceasta înseamnă că toate cazurile sînt favorabile, adică el se va produce neapărat, ceea ce înseamnă că avem certitudine.

Pe calculul probabilităţii sînt bazate o mulţime de aplicaţii practice, de exemplu, asigurările, loteria, diferitele feluri de jocuri, tragerea la ţintă şi evaluarea preciziei tirului etc. Această ştiinţă este foarte vastă; astfel tratatul de calculul probabilităţilor a lui Laplace reprezintă un volum mare de 980 p. în 4°; evident că nu putem nici măcar încerca să dăm o privire scurtă asupra acestei ştiinţe în cursul nostru, ci va trebui să ne mărginim la acele noţiuni elementare, care ne vor fi necesare nouă.

Două evenimente se numesc *independente*, dacă apariţia unuia din ele nu modifică probabilitatea apariţiei celuilalt.

Scanned with OKEN Scanner

Să demonstrăm următoarea teoremă: *probabilitatea apariției simultane a două evenimente independente este egală cu produsul probabilităților apariției fiecăruia din ele în parte.*

Să presupunem că $p_1 = m_1/n_1$ este probabilitatea primului eveniment și că $p_2 = m_2/n_2$ este probabilitatea celui de al doilea. Să aducem aceste fracții la același numitor, scriindu-le în felul următor:

$$p_1 = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}; \quad p_2 = \frac{m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Apariția simultană a ambelor evenimente poate fi considerată ca un eveniment nou; pentru a determina probabilitatea lui, trebuie să calculăm numărul tuturor cazurilor egal posibile și numărul cazurilor favorabile apariției lui.

Fiecare din cele $n_1 n_2$ cazuri, în care poate apărea primul eveniment poate fi asociat cu fiecare din cele $n_1 n_2$ cazuri egal posibile, în care poate să apară al doilea eveniment, din care cauză numărul *tuturor* cazurilor egal posibile este $n_1 n_2 \cdot n_1 n_2 = (n_1 n_2)^2$.

În același fel, se observă că numărul cazurilor favorabile apariției simultane a ambelor evenimente, este $m_1 n_2 \cdot m_2 n_1$, ceea ce înseamnă că probabilitatea p a apariției lor simultane va fi:

$$p = \frac{m_1 n_2 \cdot m_2 n_1}{(n_1 n_2)^2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = p_1 \cdot p_2,$$

ceea ce demonstrează teorema de mai sus.

Se înțelege de la sine că această teoremă se generalizează la orice număr de evenimente independente; probabilitatea apariției lor simultane va fi:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k,$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt probabilitățile fiecăruia din aceste evenimente în parte.

§ 121. Să trecem acum la una din deducerile cele mai simple ale renumitei formule a lui Gauss, denumită „Legea probabilității erorilor aleatorii".

În conformitate cu explicațiile de mai sus cu privire la deosebirea dintre erorile aleatorii și cele sistematice, se atribuie primelor, adică erorilor aleatorii, următoarele proprietăți:

1) La un număr mare de încercări, numărul erorilor pozitive și al celor negative este același, cu alte cuvinte, erorile egale în valoare absolută însă opuse ca semn se produc la fel de des.

2) În aceeași serie de experiențe, frecvența apariției erorilor mici este mai mare decît frecvența apariției celor mari.

Să presupunem că s-a efectuat un număr foarte mare N de încercări și că eroarea cea mai mare în valoare absolută este a; să ne închipuim, că intervalul dintre $-a$ și $+a$ este subîmpărțit într-un număr foarte mare de n părți egale, apoi acest număr îl vom mări nemărginit (fig. 72).

Evident că din numărul total de erori N, o anumită parte va fi cuprinsă între x și $x + dx$. Această parte va fi:

1) proporțională cu dx;
2) proporțională cu N;
3) va depinde de valoarea lui x.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel notînd acest număr parţial cu ds, vom avea:

$$ds = N \cdot f(x)\, dx, \tag{1}$$

şi aceasta înseamnă că probabilitatea dp ca eroarea să fie cuprinsă între x şi $x + dx$ va fi:

$$dp = f(x)\, dx. \tag{2}$$

După prima proprietate, vom avea aceeaşi probabilitate şi ca eroarea să fie cuprinsă între $-x$ şi $-x-dx$, din care cauză funcţia $f(x)$ este o funcţie simetrică în raport cu variabila x. Să admitem că aceasta va fi o funcţie de x^2, adică să punem

$$f(x) = \varphi(x^2), \tag{3}$$

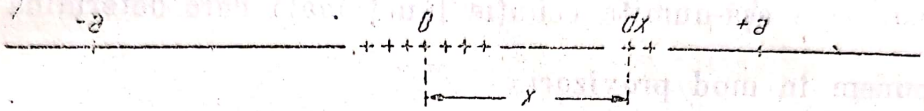

Fig. 72

astfel încît vom avea:

$$dp = \varphi(x^2)\, dx. \tag{4}$$

Totul s-a redus acum la determinarea formei funcţiei $\varphi(x^2)$.

Să presupunem că încercările noastre pot fi asemănate cu tragerea la ţintă, ştiind că originea coordonatelor serveşte ca punct de ochire iar abaterea de la originea coordonatelor a punctului atins la tragere reprezintă eroarea ce apare la aceste încercări.

Să presupunem că pe ţintă este aplicată o hîrtie împărţită în dreptunghiuri elementare dx, dy, aşa cum se poate vedea în fig. 73 *a*.

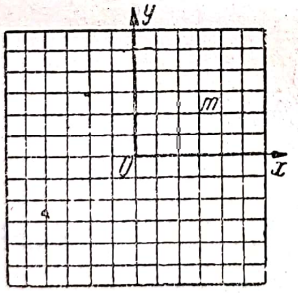

Fig. 73 a

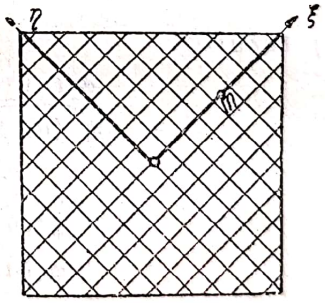

Fig. 73 b

Probabilitatea ca punctul de tragere să fie situat în dreptunghiul al cărui vîrf cel mai apropiat de origine va avea coordonatele (x, y) este egală cu produsul dintre probabilitatea ca eroarea să se afle între x şi $x + dx$, adică $\varphi(x^2)\, dx$ şi probabilitatea devierii cu acelaşi y pe axa Oy, adică $\varphi(y^2)\, dy$, astfel încît probabilitatea va fi:

$$dp = \varphi(x^2)\, \varphi(y^2)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Să ne mai închipuim că s-a mai pus o altă ţintă, haşurată aşa cum se arată în fig. 73 *b* în dreptuughiuri elementare $d\xi\, d\eta$ astfel încît axa $O\xi$ este dusă prin punctul m; vom avea atunci:

$$\xi^2 = x^2 + y^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

și probabilitatea dp se exprimă de asemenea prin produsul dintre probabilitatea $\varphi(0)\, d\eta$, ca punctul de tragere să se afle în fîșia învecinată cu axa $O\xi$ (pentru care $\eta = 0$), și probabilitatea ca el să se afle în fîșia $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$; această probabilitate este egală cu

$$\varphi(\xi^2)\, d\xi = \varphi(x^2 + y^2)\, d\zeta.$$

Avem astfel:

$$dp = \varphi(0)\, \varphi(x^2 + y^2)\, d\xi\, d\eta, \tag{6}$$

însă $\xi\, d\eta = dx\, dy$, prin urmare avînd în vedere relațiile (5) și (6) găsim:

$$\varphi(x^2)\, \varphi(y^2) = \varphi(0)\, \varphi(x^2 + y^2). \tag{7}$$

Aceasta este așa-numita ecuație funcțională care determină funcția $\varphi(x^2)$.

Să punem în mod provizoriu

$$x^2 = u,\ y^2 = v,\ \varphi(0) = c; \tag{8}$$

și atunci ecuația (7) se va scrie în felul următor:

$$\varphi(u)\, \varphi(v) = c\varphi(u + v). \tag{9}$$

Să presupunem acum că v ia o valoare oarecare constantă k independentă de u; vom avea deci:

$$\varphi(u)\, \varphi(k) = c\varphi(u + k); \tag{10}$$

derivînd această egalitate, obținem:

$$\varphi'(u)\, \varphi(k) = c\varphi'(u + k); \tag{11}$$

din (10) și (11) rezultă:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi'(u + k)}{\varphi(u + k)}; \tag{12}$$

punînd

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \Omega(u),$$

putem scrie egalitatea precedentă în felul următor

$$\Omega(u) = \Omega(u + k),$$

care trebuie să fie valabilă oricare ar fi valorile lui u și k; punînd $u = 0$, obținem:

$$\Omega(0) = \Omega(k),$$

ceea ce înseamnă că *oricare* ar fi valoarea argumentului k, funcția Ω își păstrează valoarea ei $\Omega(0)$, de unde rezultă că ea este *o constantă*; notînd cu b, avem:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = b,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă prin integrare

$$\ln \varphi(u) = bu + \ln C, \tag{13}$$

unde C este o constantă arbitrară, ca şi b.

Astfel,

$$\varphi(u) = Ce^{bu}, \tag{13'}$$

adică

$$\varphi(x^2) = Ce^{bx^2}.$$

După a doua proprietate a erorilor aleatorii, funcţia $\varphi(x^2)$ trebuie să fie descrescătoare, adică constanta b trebuie să fie negativă. Să punem

$$b = -\frac{1}{h^2},$$

şi atunci vom avea

$$\varphi(x^2) = Ce^{-\frac{x^2}{h^2}}.$$

Evident, că, oricare ar fi numărul încercărilor N, toate erorile al căror număr este N, sînt cuprinse între $-\infty$ şi $+\infty$ din care cauză vom avea pe baza formulelor (1) şi (3):

$$s_\infty = N = N\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\,dx,$$

adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\,dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx = 1.$$

Însă integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx = h\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = h\sqrt{\pi},$$

prin urmare

$$C = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

de unde rezultă însfîrşit

$$f(x) = \varphi(x^2) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{h^2}}. \tag{14}$$

Aceasta este celebra formulă a lui Gauss.

Scanned with OKEN Scanner

§ 122. Deducerea de mai sus a formulei lui Gauss se bazează pe o serie de ipoteze mai mult sau mai puțin arbitrare, iar alte moduri de deducere ale acestei formule nu înlătură acest neajuns, din care cauză formula lui Gauss a fost de nenumărate ori supusă verificării experimentale.

Toate verificările de acest fel sînt bazate pe compararea repartiției efective a erorilor la un număr mare de încercări cu repartiția lor, calculată după formula lui Gauss.

Să presupunem că numărul total al încercărilor este N; numărul erorilor, care se află între $-l$ și $+l$, se va exprima atunci pe baza formulelor (1) și (3) prin:

$$s_l = N\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx = \frac{N}{h\sqrt{\pi}}\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{l}{h}} e^{-z^2}dz. \tag{15}$$

Observăm că aceasta reprezintă în același timp și numărul erorilor, a căror valoare absolută este cuprinsă între 0 și l.

Pentru funcția

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz = \Theta(t)$$

sînt alcătuite tabele, din care dăm un extras în tabela 89.

Astfel vom avea

$$s_l = N\cdot\Theta\left(\frac{l}{h}\right). \tag{16}$$

Evident că numărul erorilor, a căror valoare absolută se află între 0 și m, va fi

$$s_m = N\cdot\Theta\left(\frac{m}{h}\right), \tag{17}$$

și prin urmare numărul erorilor, cuprinse între l și m (în valoare absolută), va fi:

$$s_l - s_m = N\left[\Theta\left(\frac{l}{h}\right) - \Theta\left(\frac{m}{h}\right)\right]. \tag{18}$$

Din această cauză, cunoscîndu-se pentru o serie de observații mărimea h și dîndu-se valorile lui l și m, putem repartiza numărul erorilor după mărimea lor.

§ 123. Se vede, că pentru a ne folosi de formulele precedente trebuie să determinăm valoarea lui h pentru seria considerată de observații.

Această valoare se află cel mai bine din suma pătratelor erorilor, care s-au produs la seria dată de încercări, admițîndu-se că această sumă este egală cu valoarea ei care rezultă din formula lui Gauss.

În adevăr, *numărul erorilor* cuprinse între x și $x + dx$, este

$$ds = N f(x)\,dx = N\frac{1}{h\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{h^2}}dx,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar valoarea acestei erori este x, ceea ce înseamnă că în suma pătratelor îi va corespunde mărimea

$$x^2 ds = N \frac{1}{h\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx.$$

Prin urmare valoarea teoretică a sumei pătratelor erorilor va fi

$$S = \frac{N}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = \frac{2N}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx.$$

însă

$$\frac{1}{h} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = h^2 \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = -\frac{h^2}{2} \left[z e^{-z^2} \right]_0^{\infty} + \frac{h^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{h^2}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

de unde rezultă

$$\frac{h^2}{2} = \frac{S}{N}. \tag{19}$$

După cum s-a mai spus, mărimea S este *luată* astfel încît să fie egală cu suma pătratelor erorilor abţinute în realitate la încercările date, adică cu

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2,$$

unde

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_N$$

sînt erorile menţionate.

Astfel vom avea:

$$\frac{h^2}{2} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2}{N}. \tag{20}$$

Mărimea

$$\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2}{N}} \tag{21}$$

se numeşte *eroarea pătratică medie* sau pur şi simplu *eroarea medie* a seriei date de observaţii, iar formula (19) se scrie deseori în felul următor:

$$h = \sqrt{2} \cdot \mu = 1{,}414\,\mu \tag{22}$$

şi în locul lui h se pune μ.

§ 124. Pentru a vedea forma generală a funcţiei

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz,$$

dăm mai jos o tabelă scurtă a valorilor ei (tabela 89).

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 89

Valorile funcției $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz$

t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$
0,00	0,0000	0,50	0,5205	1,00	0,8427	1,50	0,9661	2,00	0,9953
0,05	0,0564	0,55	0,5633	1,05	0,8624	1,55	0,9716	2,05	0,9963
0,10	0,1125	0,60	0,6039	1,10	0,8802	1,60	0,9763	2,10	0,9970
0,15	0,1680	0,65	0,6420	1,15	0,8961	1,65	0,9804	2,15	0,9976
0,20	0,2227	0,70	0,6778	1,20	0,9103	1,70	0,9838	2,20	0,9981
0,25	0,2763	0,75	0,7112	1,25	0,9229	1,75	0,9867	2,25	0,9985
0,30	0,3286	0,80	0,7421	1,30	0,9340	1,80	0,9891	2,30	0,9989
0,35	0,3794	0,85	0,7707	1,35	0,9438	1,85	0,9911	2,35	0,9991
0,40	0,4284	0,90	0,7969	1,40	0,9523	1,90	0,9928	2,40	0,9993
0,45	0,4755	0,95	0,8209	1,45	0,9597	1,95	0,9942	2,45	0,9995
0.50	0.5205	1,00	0,8427	1,50	0,9661	2,00	0.9953	2,50	0.9996
2,60	0,99976	2,90	0,999959	3,20	0,9999940	3,50	0,99999926	3,80	0,999999922
2,70	0,99987	3,00	0,999978	3,30	0,9999969	3,60	0,99999963	3,90	0,999999965
2,80	0,999925	3,10	0,999988	3,40	0,9999985	3,70	0,99999982	4,00	0,999999985

Se observă din această tabelă că funcția $\Theta(t)$ se apropie foarte repede de 1.

Observăm de asemenea că, punînd în (16) $l = \mu$, obținem în urma faptului că $\frac{\mu}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$s_\mu = N\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

de unde găsim prin interpolare:

$$\Theta(0{,}707) = 0{,}6827,$$

adică aproximativ 68% din numărul total de erori sînt *mai mici* decît eroarea medie.

Punînd $t = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}414$, adică $l = 2\mu$, obținem:

$$\Theta(1{,}41) = 0{,}953,$$

adică 95% din numărul erorilor nu depășesc 2μ.

Scanned with OKEN Scanner

Luînd $t = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}12$, se observă că 99,70 % din toate erorile nu depăşesc 3μ, şi în sfîrşit luînd $t = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2{,}83$ găsim că din 100 000 erori, care se supun legii lui Gauss numai 7 erori vor depăşi 4μ, adică de patru ori eroarea medie.

§ 125. Dăm acum cîteva rezultate referitoare la verificarea formulei lui Gauss.

Prima verificare de acest fel a fost efectuată în 1818 de renumitul astronom Bessel la prelucrarea observaţiilor lui Bradley precum şi ale sale proprii. Numerele din coloana a treia a tabelei 90 sînt calculate după formulele (16)—(18).

Tabela 90

Limita erorilor	Numărul erorilor		Diferenţa teoretic — real
	real	teoretic	
0″,0—0″,4	66	58,5	—7,5
0,4—0,8	58	54,9	—3,1
0,8—1,2	55	48,6	—6,4
1,2—1,6	28	40,8	12,8
1,6—2,0	27	31,8	4,8
2,0—2,4	23	22,7	—0,3
2,4—2,8	10	16,5	6,5
2,8—3,2	15	10,8	—4,2
3,2—3,6	8	6,6	—1,2
3,6—4,0	4	3,9	—0,1
4,0 şi mai mult	6	4,2	—2,8

Astfel de exemplu, prima din ele

$$h = 1{,}414, \quad \mu = 2{,}295, \quad l = 0{,}4, \quad \frac{l}{h} = 0{,}174, \quad N = 300,$$

$$\Theta\,(0{,}174) = 0{,}195, \quad N \cdot \Theta\left(\frac{l}{h}\right) = 300 \cdot 0{,}195 = 58{,}5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 91

Observațiile ascensiunii drepte
Numărul observațiilor $N = 300$; $\mu = 0'',2283$

Limitele erorilor	Numărul erorilor		Diferența teoretic — real
	real	teoretic	
0″,0—0″,1	114	100,5	—13,5
0,1—0,2	84	84,0	0,0
0,2—0,3	53	57,6	4,6
0,3—0,4	24	32,7	8,7
0,4—0,5	14	15,3	1,3
0,5—0,6	6	6,0	0,0
0,6—0,7	3	2,1	—0,9
0,7—0,8	1	0,6	—0,4
0,8—0,9	1	0,0	—1,0

Tabela 92

Observațiile ascensiunii drepte
Numărul observațiilor $N = 470$; $\mu = 0'',4033$

Limitele erorilor	Numărul erorilor		Diferența teoretic — real
	real	teoretic	
0″,0—0″,1	94	92,3	—1,7
0,1—0,2	88	86,5	—1,5
0,2—0,3	78	76,7	—1,3
0,3—0,4	58	64,0	6,0
0,4—0,5	51	49,8	—1,2
0,5—0,6	36	36,7	0,7
0,6—0,7	26	25,4	—0,6
0,7—0,8	14	16,9	2,9
0,8—0,9	9	9,0	0,0
0,9—1,0	7	6,1	—0,9
1,0 și mai mult	9	6,1	—2,9

Să dăm încă două exemple: la efectuarea lucrărilor de geodezie din Italia de nord au fost determinate erorile în sumele celor trei unghiuri ale unui triunghi, observîndu-se în prima serie 661 triunghiuri, iar în a doua 1577.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele sînt arătate în tabelele 93 şi 94.

Tabela 93

Observaţiile unghiurilor
Numărul observaţiilor $N=661$; $\mu=14'',08$

Limitele erorilor	Numărul erorilor		Diferenţa teoretic—real
	real	teoretic	
De la 0 la 1'',768	68	$N\cdot0,1000=66$	—2
0 " 3,566	139	$N\cdot0,2000=132$	—7
0 " 5,424	200	$N\cdot0,3000=198$	—2
0 " 7,383	265	$N\cdot0,4000=264$	—1
0 " 9,500	333	$N\cdot0,5000=331$	—2
0 " 14,08	457	$N\cdot0,6827=451$	—6
0 " 23,16	586	$N\cdot0,9000=595$	9
0 " 36,27	653	$N\cdot0,9900=654$	1
0 " 46,35	661	$N\cdot0,9990=660$	—1
0 " 54,79	661	$N\cdot0,9999=661$	0

Tabela 94

Observaţiile unghiurilor
Numărul observaţiilor $N=1577$; $\mu=17'',13$

Limitele erorilor	Numărul erorilor		Diferenţa teoretic—real
	real	teoretic	
De la 0 la 2'',141	133	$N\cdot0,1000=158$	25
0 " 4,334	303	$N\cdot0,1000=315$	12
0 " 6,595	473	$N\cdot0,3000=472$	—1
0 " 8,976	672	$N\cdot0,4000=631$	—1
0 " 11,564	760	$N\cdot0,5000=788$	28
0 " 17,13	1044	$N\cdot0,6827=1077$	33
0 " 28,08	1408	$N\cdot0,9000=1419$	11
0 " 44,12	1570	$N\cdot0,9900=1561$	—9
0 " 56,39	1577	$N\cdot0,9990=1575$	—2
0 " 66,65	1577	$N\cdot0,9999=1577$	0

Aceste exemple arată cu o claritate suficientă gradul de concordanţă între formula lui Gauss şi realitate. Această formulă a fost verificată de o mulţime de ori în cele mai diferite ocazii, iar concordanţa a fost totdeauna

aproximativ aceeaşi ca şi în exemplele de mai sus; din aceste motive se poate admite că formula lui Gauss corespunde realităţii, putîndu-se folosi concluziile ce rezultă din ea, la prelucrarea observaţiilor de orice fel.

§ 126. Înainte de a arăta aplicaţiile amintite, vom defini cîţiva termeni folosiţi.

S-a arătat că pentru o serie dată de observaţii, se numeşte eroare medie, mărimea determinată de egalitatea

$$\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2}{N}},$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_N$ — sînt erorile obţinute la observaţii, iar N — numărul de observaţii.

Din tabelele valorilor funcţiilor $\Theta(t)$ (tabela 89) şi formula (16) reiese, că din numărul total de erori N

$$0{,}843\,N$$

vor fi cuprinse între limitele $-h$ şi $+h$.

Din aceeaşi tabelă se observă că argumentului

$$t = 0{,}477$$

îi corespunde valoarea $\Theta(t) = 0{,}500$, prin urmare $0{,}50\,N$, ceea ce înseamnă că jumătate din numărul erorilor, vor fi cuprinse între

$$-0{,}477\,h \quad \text{şi} \quad +0{,}477\,h$$

şi deoarece $h = \sqrt{2}\,\mu = 1{,}414\,\mu$, urmează că valoarea precedentă va fi:

$$-0{,}674\,\mu \quad \text{şi} \quad +0{,}674\,\mu,$$

adică jumătatea din numărul erorilor vor fi cuprinse între aceste limite, iar cealaltă jumătate în afara lor.

Mărimea

$$r = 0{,}674\,\mu$$

se numeşte *eroare probabilă*.

Oricare din mărimile h, r, μ, care sînt legate între ele prin relaţiile

$$\begin{aligned} h &= 1{,}414\,\mu = 2{,}097\,r, \\ r &= 0{,}674\,\mu = 0{,}477\,h, \\ \mu &= 0{,}707\,h = 1{,}483\,r, \end{aligned} \tag{23}$$

poate servi pentru caracterizarea preciziei seriei date de observaţii deoarece cunoscînd oricare din ele şi avînd la îndemînă tabelele valorilor funcţiei $\Theta(t)$, se calculează uşor — aşa cum s-a arătat mai sus — repartiţia erorilor pentru un număr mare de observaţii.

Acest calcul nu se efectuează de obicei ci se indică numai pentru a caracteriza o serie de observaţii, sau valoarea erorii probabile r sau valoarea erorii medii.

§ 127. Să admitem deci legea lui Gauss şi să vedem ce consecinţe rezultă din aceasta în cazul aplicării ei la prelucrarea observaţiilor.

Să presupunem că, la o măsurătoare, efectuată de k ori în aceleași condiții și cu același aparat, s-au obținut următoarele rezultate:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k;$$

se pune întrebarea, care este valoarea cea mai probabilă a acestei mărimi?

Să admitem că această valoare este x; în acest caz erorile măsurătorilor vor fi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x - a_1, \\ \varepsilon_2 &= x - a_2, \\ &\cdots\cdots \\ \varepsilon_k &= x - a_k. \end{aligned} \qquad (*)$$

Probabilitatea apariției simultane a acestor k erori, care se presupun independente între ele, va fi proporțională cu mărimea

$$\left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)^k e^{-\frac{1}{h^2}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_k^2\right)}; \qquad (**)$$

prin urmare, valoarea cea mai probabilă a lui x va fi aceea la care mărimea (**) va fi maximă, adică la care suma

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_k^2$$

a pătratelor erorilor va fi *minimă*.

Înlocuind mărimile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$, prin expresiile lor (*) se observă că determinarea lui x s-a redus la aflarea valorii pentru care expresia

$$V = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_k)^2$$

devine minimă.

De aici rezultă pentru determinarea lui x ecuația

$$0 = \frac{dV}{dx} = 2\left[(x - a_1) + (x - a_2) + \cdots + (x - a_k)\right],$$

care ne dă

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k},$$

ceea ce ne arată, că *valoarea cea mai probabilă este media aritmetică a valorilor observate*.

Prin urmare, legea lui Gauss a dus la o regulă care s-a folosit și instinctiv fără nici un fel de teorie.

Observăm că și reciproc, dacă se admite ca postulat sau ca ipoteză fundamentală că dintr-o serie de observații ale aceleiași mărimi, valoarea cea mai probabilă este media lor aritmetică, atunci din această ipoteză rezultă legea lui Gauss (așa a dedus-o însuși Gauss). Mai mult, Cebîșev a arătat că dacă valoarea cea mai probabilă din trei observații este media lor aritmetică, se poate deduce legea lui Gauss pentru probabilitatea erorilor[1]).

[1]) P. L. Cebîșev: Теория Вероятностей изд. АН СССР, 1936 стр. 223

§ 128. În multe cazuri, rezultatul căutat nu se află prin măsurători directe, ci mărimea măsurată se introduce într-o anumită formulă din care se calculează apoi cea căutată; evident că fiecărei erori a mărimilor date îi va corespunde şi o eroare în mărimea căutată. Să presupunem că mărimea căutată este z iar mărimea măsurată direct este x şi că avem următoarea relaţie între z şi x:

$$z = f(x). \tag{24}$$

Să presupunem că valoarea corectă a lui x este

$$x = a,$$

ceea ce înseamnă că valoarea corectă a lui z este

$$z = f(a) = b.$$

Să presupunem că prin măsurarea mărimii x s-au obţinut valorile

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

adică, s-au comis erorile

$$\varepsilon_1 = a - a_1, \quad \varepsilon_2 = a - a_2, \ldots, \quad \varepsilon_k = a - a_k, \tag{25}$$

astfel încît eroarea medie a lui x este

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}}. \tag{26}$$

Se pune întrebarea care este eroarea medie a mărimii z?

Evident că valorile lui z, calculate după formula (24), vor fi:

$$\begin{aligned} b_1 &= f(a_1) = f(a - \varepsilon_1), \\ b_2 &= f(a_2) = f(a - \varepsilon_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_k &= f(a_k) = f(a - \varepsilon_k), \end{aligned}$$

cărora le vor corespunde erorile

$$\begin{aligned} \eta_1 &= b - b_1 = f(a) - f(a - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 f'(a), \\ \eta_2 &= b - b_2 = f(a) - f(a - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 f'(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k &= b - b_k = f(a) - f(a - \varepsilon_k) = \varepsilon_k f'(a), \end{aligned}$$

deoarece mărimile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ se presupun atît de mici, încît la dezvoltarea funcţiilor

$$f(a - \varepsilon_1), f(a - \varepsilon_2), \ldots, f(a - \varepsilon_k)$$

în serie Taylor ne putem mărgini numai la primul termen.

Eroarea medie a lui z va fi:

$$\eta = \sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_k^2}{k}} = f'(a) \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}},$$

adică pe baza formulei (26)

$$\eta = \varepsilon f'(a). \tag{27}$$

Menționăm cazul cel mai simplu al acestei formule cînd

$$z = Ax, \tag{28}$$

unde A este o constantă; atunci vom avea:

$$\eta = A\varepsilon. \tag{29}$$

§ 129. Să presupunem acum, că mărimea căutată z este o funcție de două variabile x și y, care se determină prin observații separate, independent una de cealaltă. Aceste mărimi pot avea și denumiri diferite, de exemplu x poate prezenta o lungime, iar y un unghi.

Dacă la mărimea x eroarea medie este α, iar la y eroarea medie este β, se pune întrebarea, care este eroarea medie γ a lui z, definit de ecuația

$$z = f(x, y).$$

Să începem cu cazul cel mai simplu

$$z = x + y,$$

și să presupunem că valoarea adevărată a lui x este a și că cele măsurate sînt

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$$

ceea ce înseamnă că erorile măsurătorilor sînt

$$\alpha_1 = a - a_1, \quad \alpha_2 = a - a_2, \ldots, \quad \alpha_k = a - a_k.$$

Eroarea medie a variabilei x va fi atunci

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2}{k}}. \tag{30}$$

În același timp vom presupune că valoarea adevărată a lui y este b, că cele măsurate sînt

$$b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

erorile măsurătorilor fiind

$$\beta_1 = b - b_1, \quad \beta_2 = b - b_2, \ldots, \quad \beta_n = b - b_n$$

și că eroarea medie este

$$\beta = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2}{n}}. \tag{31}$$

Pentru a calcula erorile mărimii z, care au aceeași probabilitate, trebuie să se aibă în vedere că determinările lui x și y sînt *independente* între ele, din care cauză nu ar fi just să se combine numai

$$a_1 + b_1, \; a_2 + b_2$$

etc., și erorile corespunzătoare

$$\alpha_1 + \beta_1, \quad \alpha_2 + \beta_2$$

etc., deoarece la observații independente, *fiecare* din erorile seriei α poate să se producă cu aceeași posibilitate concomitent cu *fiecare* din erorile seriei β, astfel încît valorile posibile ale lui γ sînt:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_1 + \beta_2,\ \alpha_1 + \beta_3, \ldots,\ \alpha_1 + \beta_n,\\
&\alpha_2 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \alpha_2 + \beta_3, \ldots,\ \alpha_2 + \beta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_k + \beta_1,\ \alpha_k + \beta_2,\ \alpha_k + \beta_3, \ldots,\ \alpha_k + \beta_n,
\end{aligned}$$

unde γ poate lua kn valori. Suma pătratelor acestor valori este

$$\Sigma\gamma_i^2 = n\Sigma\alpha_i^2 + k\Sigma\,\beta_i^2 + 2\Sigma\alpha_i \cdot \Sigma\beta_i,$$

dar după proprietatea fundamentală a erorilor aleatorii (erorile cu + și cu — sînt la fel de probabile) vom avea egalitățile

$$\Sigma\alpha_i = 0,\quad \Sigma\beta_i = 0.$$

Prin urmare:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Sigma\gamma_i^2}{nk}} = \sqrt{\frac{n\Sigma\alpha_i^2 + k\Sigma\beta_i^2}{nk}} = \sqrt{\frac{\Sigma\alpha_i^2}{k} + \frac{\Sigma\beta_i^2}{n}},$$

însă

$$\frac{\Sigma\alpha_i^2}{k} = \alpha^2,\quad \frac{\Sigma\beta_i^2}{n} = \beta^2,$$

de unde rezultă că

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{32}$$

adică *eroarea medie a sumei a două mărimi independente este egală cu rădăcina patrată a sumei pătratelor erorilor medii.*

Prin compararea acestei teoreme cu cea precedentă, rezultă, că pentru mărimea

$$z = Ax + By \tag{33}$$

eroarea medie γ va fi

$$\gamma = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2}. \tag{34}$$

În adevăr, trebuie să punem în mod provizoriu

$$u = Ax,\ v = By,$$

astfel încît

$$z = u + v,$$

la care se pot apoi aplica formulele (29) și (32).

De aici reiese în mod evident, că pentru mărimea

$$z = Ax + By + Ct \tag{35}$$

vom avea:

$$\gamma = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\delta^2}, \tag{36}$$

unde α, β, γ sînt erorile medii ale mărimilor x, y şi t. În adevăr, nu avem decît să punem provizoriu

$$v = By + Ct$$

şi să aplicăm formulele precedente la suma

$$z = u + v.$$

De aici deducem că, în general, vom avea pentru mărimea

$$z = Ax + By + Ct + \cdots + Fw$$

eroarea medie

$$\gamma = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\delta^2 + \cdots + F^2\omega^2}, \tag{37}$$

notaţiile înţelegîndu-se de la sine.

Dacă presupunem acum că avem, în general

$$z = f(x, y, t, \ldots, w),$$

eroarea γ_i a lui z, corespunzătoare erorilor

$$\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \ldots, \omega_i,$$

va fi pe baza seriei lui Taylor egală cu:

$$\gamma_i = f(a, b, \ldots, h) - f(a - \alpha_i, b - \beta_i, \ldots, h - \omega_i) =$$
$$= \alpha_i \cdot f'_x(a, b, \ldots, h) + \beta_i f'_y(a, b, \ldots, h) + \cdots + \omega_i \cdot f'_w(a, b, \ldots, h),$$

sau punînd

$$A = f'_x(a, b, \ldots, h),\ B = f'_y(a, b, \ldots, h), \ldots, F = f'_w(a, b, \ldots, h),$$

vom avea

$$\gamma_i = A\alpha_i + B\beta_i + \cdots + F\omega_i,$$

adică γ_i se exprimă în acelaşi fel ca şi fiecare eroare separată a funcţiei liniare

$$z = Ax + By + \cdots + Fw,$$

de unde rezultă

$$\gamma = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + \cdots + F^2\omega^2}. \tag{38}$$

Dacă mărimea z ar fi definită printr-o funcţie implicită

$$G(z, x, y, t, \ldots, w) = 0, \tag{39}$$

derivatele ei parţiale ar fi

$$A = -\frac{G'_x(c, a, b, \ldots, h)}{G'_z(c, a, b, \ldots, h)},\quad B = -\frac{G'_y(c, a, b, \ldots, h)}{G'_z(c, a, b \ldots, h)},\quad \ldots, F = -\frac{G'_w(c, a, b, \ldots, h)}{G'_z(c, a, b, \ldots, h)},$$

unde c este valoarea adevărată a lui z, care se determină din ecuaţia

$$G(c, a, b, \ldots, h) = 0. \tag{40}$$

Se înţelege de la sine că formula (38) fiind cea generală, conţine ca şi cazuri particulare, formulele (36) şi (37).

§ 130. Am văzut că, dacă mărimea x este determinată direct de observaţii, valoarea ei cea mai probabilă este media aritmetică

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

din valorile observate, care se presupun toate ca avînd aceeaşi precizie şi care au eroarea medie ε; se pune întrebarea care este eroarea medie a mărimii x?

Ne putem închipui, că x este o funcţie liniară a variabilelor

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} = \frac{1}{k}x_1 + \frac{1}{k}x_2 + \cdots + \frac{1}{k}x_k,$$

unde fiecare din variabilele $x_1,\ x_2, \ldots, x_k$ au eroarea medie ε; după formula (38), eroarea medie a lui x va fi atunci:

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{k^2}\varepsilon^2 + \frac{1}{k^2}\varepsilon^2 + \cdots + \frac{1}{k^2}\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}. \tag{41}$$

În acelaşi raport $1 : \sqrt{k}$ se vor afla şi erorile probabile ale mărimii x şi a mărimilor a_i.

Observăm aici că formula (41) a fost obţinută în ipoteza că eroarea medie a mărimilor a este cunoscută, pentru aceasta însă este nevoie ca să se cunoască şi valoarea *adevărată* a mărimii x; erorile $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots, \varepsilon_k$ ale observaţiilor individuale vor fi:

$$\varepsilon_1 = a - a_1,\ \varepsilon_2 = a - a_2, \ldots,\ \varepsilon_k = a - a_k \tag{42}$$

şi eroarea medie

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}}; \tag{43}$$

însă de cele mai multe ori nu se cunoaşte valoarea adevărată a lui x şi atunci se ia în locul ei valoarea cea mai probabilă, adică se presupune

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k},$$

şi calculînd după formulele (42) mărimile

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_k,$$

nu se va calcula mărimea ε după formula (43), ci după formula

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k-1}}, \tag{44}$$

astfel încît vom avea

$$\eta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k(k-1)}}. \tag{45}$$

Nu vom deduce formula (44).

§ 131. Am considerat cazul, cînd mărimea căutată este una singură și cînd ea este determinată din observații directe; un caz mai general, și care se întîlnește mai des este următorul: există cîteva, să zicem n, mărimi necunoscute

$$x,\ y,\ z,\ldots,\ w \tag{46}$$

pentru a căror determinare fiecare observație ne dă o ecuație de forma

$$F(x,\ y,\ z,\ldots,\ w) = A + \alpha. \tag{47}$$

astfel încît, atunci cînd se efectuează k observații, obținem k ecuații

$$\begin{aligned} F_1(x,\ y,\ z,\ldots,\ w) &= N_1 = A_1 + \alpha_1,\\ F_2(x,\ y,\ z,\ldots,\ w) &= N_2 = A_2 + \alpha_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_k(x,\ y,\ z,\ldots,\ w) &= N_k = A_k + \alpha_k, \end{aligned} \tag{48}$$

unde $F_1,\ F_2,\ldots,F_k$ sînt funcții bine determinate, $N_1,\ N_2,\ldots,N_k$ sînt valorile obținute prin observații, $A_1,\ A_2,\ldots,A_k$ sînt anumite constante despre care se va vorbi mai jos, iar $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sînt corecții mici la aceste constante.

Dacă numărul observațiilor k este egal cu numărul necunoscutelor n, se obțin din ecuațiile (48) valorile acestor necunoscute care verifică exact aceste ecuații; în acest caz însă nu ne putem da seama de mărimea erorilor, din care cauză va trebui ca numărul observațiilor k, și deci al ecuațiilor (48) să fie *cu mult mai mare* decît numărul necunoscutelor n.

Luînd în sistemul (48) n ecuații, determinăm din ele valorile necunoscutelor $x,\ y,\ z,\ldots,w$, pe care le vom rotunji pentru a simplifica calculele următoare, astfel încît ele vor reprezenta numai valorile aproximative ale acestor necunoscute; să notăm aceste valori cu:

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ldots,\ w_0. \tag{49}$$

Substituim aceste valori în primii membri ai ecuațiilor (48) și calculăm valorile

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0,\ldots,\ w_0) &= A_1,\\ F_2(x_0, y_0, z_0,\ldots,\ w_0) &= A_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_k(x_0, y_0, z_0,\ldots,\ w_0) &= A_k. \end{aligned} \tag{50}$$

Atunci avem:

$$\alpha_1 = N_1 - A_1,\ \alpha_2 = N_2 - A_2,\ldots,\ \alpha_k = N_k - A_k,$$

unde *numai mărimile α sînt supuse erorilor observațiilor*; aceste mărimi vor mai fi pe lîngă aceasta și *mici*.

Deoarece valorile $x_0,\ y_0,\ z_0,\cdots,w_0$ verifică ecuațiile (48) numai aproximativ, vom presupune pentru a obține valori mai precise că

$$x = x_0 + \xi,\quad y = y_0 + \eta,\quad z = z_0 + \zeta,\ldots,\ w = w_0 + \omega,$$

unde $\xi, \eta, \zeta,\ldots,\omega$ sînt corecțiile care trebuie adăugate la valorile $x_0, y_0, z_0,\ldots,w_0$ Aceste corecții se presupun atît de mici, încît la dezvoltarea funcțiilor

$$F_i(x_0 + \xi,\ y_0 + \eta,\ \ldots,\ w_0 + \omega) \qquad (i = 1, 2,\ldots,\ k)$$

Scanned with OKEN Scanner

în seriile Taylor ne putem mărgini numai la *primele* puteri ale mărimilor

$$\xi, \eta, \ldots, \omega$$

astfel încît vom avea:

$$F_i(x_0 + \xi, y_0 + \eta, \ldots, w_0 + \omega) =$$

$$= (F_i)_0 + \xi\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 + \cdots + \omega\left(\frac{\partial F_i}{\partial w}\right)_0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

notațiile înțelegîndu-se de la sine. Pe baza egalităților (50) se pot înlocui atunci ecuațiile (48) prin următoarele:

$$\xi\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 + \cdots + \omega\left(\frac{\partial F_i}{\partial w}\right)_0 = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{51}$$

unde valorile coeficienților

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F_i}{\partial w}\right)_0$$

vor fi niște constante cunoscute, care nu sînt supuse erorilor ce se produc la observații. Notîndu-le respectiv cu

$$a_i, b_i, \ldots, g_i,$$

vom avea pentru determinarea necunoscutelor

$$\xi, \eta, \ldots, \omega$$

k ecuații *liniare*, de forma

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \cdots + g_1\omega &= \alpha_1, \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \cdots + g_2\omega &= \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \cdots + g_k\omega &= \alpha_k. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

al căror număr este cu mult mai mare decît numărul necunoscutelor, iar mărimile

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

sînt date prin observații directe.

Se pune întrebarea în ce fel trebuie să se combine aceste ecuații, pentru a obține valorile *cele mai probabile* ale necunoscutelor.

Să admitem la început că erorile medii ale tuturor mărimilor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, sînt egale, adică toate observațiile au același grad de precizie.

§ 132. Am ajuns astfel la următoarea problemă *generală*: este dat un sistem de k ecuații

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \cdots + g_1\omega &= \alpha_1, \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \cdots + g_2\omega &= \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \cdots + g_k\omega &= \alpha_k \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu n necunoscute

$$\xi, n, \zeta, \ldots, \omega,$$

al căror număr este cu mult mai mic decît numărul ecuațiilor; membrii cunoscuți

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

ai acestor ecuații sînt dați direct prin observații și trebuie să se găsească valorile *cele mai probabile* ale necunoscutelor.

Să presupunem, că am luat un sistem oarecare de valori

$$\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \ldots, \omega = \omega_0, \tag{54}$$

pe care le-am substituit în ecuațiile (53), alcătuind apoi diferențele

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi_0 + b_1\eta_0 + \cdots + g_1\omega_0 - \alpha_1 &= \varepsilon_1, \\ a_2\xi_0 + b_2\eta_0 + \cdots + g_2\omega_0 - \alpha_2 &= \varepsilon_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k\xi_0 + b_k\eta_0 + \cdots + g_k\omega_0 - \alpha_k &= \varepsilon_k. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Aceste diferențe vor reprezenta atunci erorile aleatorii, care ar trebui să se producă la mărimile observate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ în cazul sistemului de valori (54).

Probabilitatea apariției simultane a acestor erori este după legea lui Gauss proporțională cu mărimea

$$\left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)^k e^{-\frac{1}{h^2}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_k^2\right)},$$

deoarece prin ipoteză, valoarea medie a tuturor mărimilor α_i este aceeași, ceea ce înseamnă că mărimea h este peste tot una și aceeași.

Această probabilitate va fi și mai mare, cînd suma

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_k^2$$

va fi *minimă*.

De aici rezultă că, pentru aflarea valorilor celor mai probabile ale necunoscutelor noastre, trebuie să alcătuim expresia

$$V = (a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega - \alpha_1)^2 + (a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega - \alpha_2)^2 + \\ + \ldots + (a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega - \alpha_k)^2 \tag{56}$$

și să determinăm necunoscutele:

$$\xi, \eta, \ldots, \omega$$

astfel încît valoarea lui V să fie minimă.

După o regulă cunoscută, aceste valori sînt determinate de ecuațiile

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial \omega} = 0, \tag{57}$$

care în forma dezvoltată vor fi:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1(a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega) + a_2(a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega) + \ldots \\
&\quad \ldots + a_k(a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega) = \sum_i a_i\alpha_i, \\
&b_1(a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega) + b_2(a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega) + \ldots \\
&\quad \ldots + b_k(a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega) = \sum_i b_i\alpha_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&g_1(a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega) + g_2(a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega) + \ldots \\
&\quad \ldots + g_k(a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega) = \sum_i g_i\alpha_i.
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Ecuațiile (53) se numesc ecuații *convenționale* sau fundamentale, iar ecuațiile (58) se numesc *normale*. Evident, numărul ecuațiilor normale este *egal* cu numărul necunoscutelor, oricare ar fi numărul ecuațiilor convenționale.

Formulele (58) exprimă următoarea regulă pentru alcătuirea ecuațiilor normale în condițiile date.

Regula fundamentală. Pentru a alcătui prima ecuație normală pe baza celor convenționale date, trebuie să înmulțim fiecare ecuație convențională cu coeficientul primei necunoscute din ecuația respectivă, adunînd apoi toate ecuațiile obținute în acest fel.

Pentru a alcătui a doua ecuație normală, trebuie să înmulțim fiecare din ecuațiile convenționale cu coeficientul celei de a doua necunoscute din ecuația respectivă, adunînd apoi toate ecuațiile obținute în acest fel.

În același fel se va proceda și pentru formarea celorlalte ecuații normale.

Astfel, sistemul normal de ecuații va fi următorul (dacă se omit indicii la semnele sumelor pentru a simplifica scrierea):

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma a^2 \cdot \xi + \Sigma ab \cdot \eta + \Sigma ac \cdot \zeta + \ldots + \Sigma ag \cdot \omega = \Sigma a\alpha, \\
&\Sigma ba \cdot \xi + \Sigma b^2 \cdot \eta + \Sigma bc \cdot \zeta + \ldots + \Sigma bg \cdot \omega = \Sigma b\alpha, \\
&\Sigma ca \cdot \xi + \Sigma cb \cdot \eta + \Sigma c^2 \cdot \zeta + \ldots + \Sigma cg \cdot \omega = \Sigma c\alpha, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Sigma ga \cdot \xi + \Sigma gb \cdot \eta + \Sigma gc \cdot \zeta + \ldots + \Sigma g^2 \cdot \omega = \Sigma g\alpha.
\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Evident, că sumele

$$\Sigma ab = \Sigma ba, \quad \Sigma ac = \Sigma ca, \ldots,$$

adică toate sumele simetrice în raport cu diagonala principală sînt egale între ele, astfel încît formarea ecuațiilor normale se reduce la calculul următoarelor sume:

$$\begin{aligned}
&\Sigma a^2, \ \Sigma ab, \ \Sigma ac, \ldots, \ \Sigma ag, \ \Sigma a\alpha, \\
&\Sigma b^2, \ \Sigma bc, \ldots, \ \Sigma bg, \ \Sigma b\alpha, \\
&\Sigma c^2, \ldots, \ \Sigma cg, \ \Sigma c\alpha, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\Sigma g^2, \ \Sigma g\alpha.
\end{aligned}$$

Fiecare sumă constă din k termeni, al căror calcul se efectuează foarte simplu cu o riglă de calcul, după schema care se va arăta mai departe.

Din cauza numeroaselor înmulțiri, trebuie să se efectueze în timpul calculelor un control permanent, pentru a ne convinge că nu s-au făcut greșeli. În acest scop trebuie să se formeze pentru fiecare ecuație convențională suma tuturor coeficienților și a membrului cunoscut, adică trebuie să se formeze sumele:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + g_1 + \alpha_1, \\ s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + g_2 + \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_k &= a_k + b_k + c_k + \ldots + g_k + \alpha_k. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

În acest caz, vom avea evident:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma as &= \Sigma a^2 + \Sigma ab + \Sigma ac + \ldots + \Sigma ag + \Sigma a\alpha, \\ \Sigma bs &= \Sigma ba + \Sigma b^2 + \Sigma bc + \ldots + \Sigma bg + \Sigma b\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma gs &= \Sigma ga + \Sigma gb + \Sigma gc + \ldots + \Sigma g^2 + \Sigma g\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

aceste egalități servesc pentru controlul calculelor.

§ 133. Înainte de a explica alcătuirea schemei de calcul, vom arăta în ce fel se calculează erorile medii ale necunoscutelor

$$\xi, \eta, \ldots, \omega.$$

Să admitem că mărimile $\xi, \eta, \ldots, \omega$ aflate prin rezolvarea ecuațiilor normale sînt substituite în ecuațiile fundamentale date și că s-au calculat abaterile

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \ldots + g_i\omega - \alpha_i = v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Aceste abateri vor reprezenta mărimile erorilor la valorile observate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *dacă valorile cele mai probabile ale mărimilor* $\xi, \eta, \ldots, \omega$, *determinate din ecuațiile normale sînt considerate ca valorile lor adevărate*, ceea ce vom admite provizoriu, și vom pune

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \ldots + g_i\omega - \alpha_i = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Eroarea medie a mărimilor observate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ va fi:

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}}. \tag{63}$$

Însă, deoarece $\xi, \eta, \ldots, \omega$ nu sînt valorile adevărate, ci numai cele probabile, urmează că vom pune ca și în cazul unei singure ecuații

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k - n}}. \tag{63'}$$

Evident, că sumele

$$\Sigma a\alpha, \quad \Sigma b\alpha, \quad \Sigma c\alpha, \ldots, \Sigma g\alpha \tag{64}$$

sînt funcţii liniare de mărimile

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k. \tag{65}$$

Coeficienţii $a_1, b_1, \ldots, g_k$ *nu sînt supuşi unor erori la observaţii* şi sînt constanţi. Este deci evident că şi mărimile căutate, $\xi, \eta, \ldots, \omega$, vor fi funcţii liniare de sumele (64) şi deci şi funcţii liniare de mărimile

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k. \tag{66}$$

Să presupunem că avem:

$$\xi = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_k\alpha_k, \tag{67}$$

unde factorii

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$$

depind numai de coeficienţii

$$a_1, b_1, \ldots, g_k$$

ai ecuaţiilor fundamentale.

Dacă noi am afla aceşti factori, am cunoaşte după formula (38) eroarea medie β a mărimii ξ, şi anume am avea:

$$\beta^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2)\,\varepsilon^2,$$

deoarece eroarea medie a tuturor mărimilor observate (66) este aceeaşi şi egală cu ε.

Totul, s-a redus astfel la determinarea valorii

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2.$$

Să ne închipuim că am rezolvat sistemul de ecuaţii normale după metoda multiplicatorilor, adică am înmulţit prima ecuaţie cu multiplicatorul M_1, a doua cu multiplicatorul M_2, etc., iar ultima ecuaţie cu M_n, şi că adunînd ecuaţiile obţinute, am fi determinat factorii $M_1, M_2, \ldots, M_n$, astfel, încît:

$$\left.\begin{aligned}
&M_1\Sigma a^2 + M_2\Sigma ab + M_3\Sigma ac + \ldots + M_n\Sigma ag = 1,\\
&M_1\Sigma ab + M_2\Sigma b^2 + M_3\Sigma bc + \ldots + M_n\Sigma bg = 0,\\
&M_1\Sigma ac + M_2\Sigma bc + M_3\Sigma c^2 + \ldots + M_n\Sigma cg = 0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&M_1\Sigma ag + M_2\Sigma bg + M_3\Sigma cg + \ldots + M_n\Sigma g^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

În acest caz, am fi obţinut:

$$\xi = M_1\Sigma a\alpha + M_2\Sigma b\alpha + \ldots + M_n\Sigma g\alpha \tag{69}$$

sau regrupînd termenii,

$$\begin{aligned}
\xi = {} & \alpha_1[M_1a_1 + M_2b_1 + \ldots + M_ng_1] +\\
& + \alpha_2[M_1a_2 + M_2b_2 + \ldots + M_ng_2] +\\
& \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + \alpha_k[M_1a_k + M_2b_k + \ldots + M_ng_k].
\end{aligned} \tag{69'}$$

Această expresie a lui ξ trebuie să fie *identică* cu expresia (67) deoarece egalitatea acestor două expresii trebuie să aibă loc *oricare* ar fi valorile literelor

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h.$$

Vom avea prin urmare,:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= M_1 a_1 + M_2 b_1 + \ldots + M_n g_1, \\ \lambda_2 &= M_1 a_2 + M_2 b_2 + \ldots + M_n g_2, \\ \lambda_3 &= M_1 a_3 + M_2 b_3 + \ldots + M_n g_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_h &= M_1 a_h + M_2 b_h + \ldots + M_{n_h}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_h^2 = {} & (a_1 M_1 + b_1 M_2 + \ldots + g_1 M_n)^2 + \\ & + (a_2 M_1 + b_2 M_2 + \ldots + g_2 M_n)^2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_h M_1 + b_h M_2 + \ldots + g_h M_n)^2. \end{aligned} \tag{71}$$

Evident că membrul al doilea al acestei egalităţi reprezintă o funcţie omogenă cu gradul al doilea în raport cu literele

$$M_1, M_2, \ldots, M_n.$$

Să notăm această funcţie cu

$$\Phi(M_1, M_2, \ldots, M_n).$$

După teorema funcţiilor omogene vom avea:

$$2\Phi(M_1, \ldots, M_n) = M_1 \frac{\partial \Phi}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial \Phi}{\partial M_2} + M_3 \frac{\partial \Phi}{\partial M_3} + \ldots + M_n \frac{\partial \Phi}{\partial M_n}.$$

Nu trebuie decît să comparăm funcţia (71) cu funcţia V [formula (56)], pentru a vedea că singura deosebire dintre ele constă în aceea că în locul literelor

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$$

sînt scrise literele

$$M_1, M_2, \ldots, M_n$$

şi că toate mărimile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ sînt considerate egale cu zero; de aceea primii membri ai ecuaţiilor (68) vor fi tocmai:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial M_n};$$

prin urmare vom avea pe baza acestor ecuaţii:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M_1} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_3} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial M_n} = 0, \tag{72}$$

de unde rezultă:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_h^2 = M_1, \tag{73}$$

iar eroarea medie β, a necunoscutei ξ va fi:

$$\beta = \varepsilon \sqrt{M_1}\,.$$

În acelaş fel vom vedea că determinînd factorii

$$N_1, N_2, \ldots, N_n$$

astfel încît să fie:

$$\left.\begin{aligned} &N_1\Sigma a^2 + N_2\Sigma ab + N_3\Sigma ac + \ldots + N_n\Sigma ag = 0,\\ &N_1\Sigma ab + N_2\Sigma b^2 + N_3\Sigma bc + \ldots + N_n\Sigma bg = 1,\\ &N_1\Sigma ac + N_2\Sigma bc + N_3\Sigma c^2 + \ldots + N_n\Sigma cg = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &N_1\Sigma ag + N_2\Sigma bg + N_3\Sigma cg + \ldots + N_n\Sigma g^2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

obţinem eroarea medie λ a necunoscutei η după formula

$$\gamma = \varepsilon \sqrt{N_2}\,. \qquad (75)$$

Pentru a determina eroarea medie δ a necunoscutei ζ trebue să formăm sistemul

$$\left.\begin{aligned} &P_1\Sigma a^2 + P_2\Sigma ab + P_3\Sigma ac + \ldots + P_n\Sigma ag = 0,\\ &P_1\Sigma ab + P_2\Sigma b^2 + P_3\Sigma bc + \ldots + P_n\Sigma bg = 0,\\ &P_1\Sigma ac + P_2\Sigma bc + P_3\Sigma c^2 + \ldots + P_n\Sigma cg = 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &P_1\Sigma ag + P_2\Sigma bg + P_3\Sigma cg + \ldots + P_n\Sigma g^2 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

de unde va rezulta:

$$\delta = \varepsilon \sqrt{P_3}\,. \qquad (77)$$

Cunoscînd erorile medii vom putea afla şi erorile probabile împărţind pe cele medii cu 0,674, aşa cum s-a arătat în § 126, formula (23).

§ 134. Am presupus că toate observaţiile, care servesc la formarea ecuaţiilor fundamentale au aceeaşi precizie, adică erorile medii ale mărimilor

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

sînt aceleaşi.

În cazul cînd dintr-un motiv oarecare precizia determinării acestor mărimi nu este aceeaşi, iar erorile lor medii sînt diferite, dar totuşi date sau cunoscute, trebuie să reducem la început toate ecuaţiile convenţionale la aceeaşi eroare medie, sau, cum se spune, „la aceeaşi pondere“. Aceasta se face în felul următor.

Să presupunem că erorile medii date ale mărimilor noastre observate sînt

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k.$$

Calculînd atunci mărimea

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_k^2}{k}}\,, \qquad (78)$$

formăm rapoartele

$$p_1 = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad p_2 = \frac{\mu}{\mu_2}, \ \ldots, \ p_k = \frac{\mu}{\mu_k} \tag{79}$$

și înmulțim apoi fiecare din ecuațiile fundamentale (53) cu factorul corespunzător p_i; evident că obținem un sistem de ecuații echivalent cu sistemul (53), la care termenii cunoscuți vor fi:

$$\alpha_1 \frac{\mu}{\mu_1}, \quad \alpha_2 \frac{\mu}{\mu_2}, \ \ldots, \ \alpha_k \frac{\mu}{\mu_k}, \tag{80}$$

ceea ce înseamnă că toți vor avea aceeași eroare medie μ.

Din formula (79) reiese în mod evident că, în locul erorilor medii, se pot lua orice mărimi proporționale cu acestea pentru a face calculul mai simplu. Dacă de exemplu $\mu=0{,}02$ vom obține la fracțiile (79) un numărător egal cu 1, dacă vom înmulți toate rapoartele cu 50. Este de asemenea evident că, la toate ecuațiile pentru care

$$\mu_i = \mu,$$

vom avea

$$p_i = 1.$$

Efectuînd reducerea tuturor ecuațiilor fundamentale la aceeași eroare medie sau pondere[1]), vom trece apoi la formarea ecuațiilor normale așa cum s-a arătat în § 127.

Necesitatea și metoda reducerii tuturor ecuațiilor la aceeași pondere sau la aceeași eroare medie pot fi justificate și altfel, pornind de la formula lui Gauss.

Să presupunem, că în ecuațiile (53) § 132, termenii cunoscuți $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, sînt supuși erorilor medii $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, de mărime diferită, potrivit cărora valorile lui h din formula lui Gauss vor fi și ele diferite și anume

$$h_1 = \mu_1 \sqrt{2}, \quad h_2 = \mu_2 \sqrt{2}, \ \ldots, h_k = \mu_k \sqrt{2},$$

astfel încît probabilitatea apariției simultane a erorilor

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$$

va fi proporțională cu mărimea

$$\frac{1}{h_1 h_2 \ldots h_k (\sqrt{\pi})^k} \, e^{-(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_k^2)},$$

unde

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{h_1}, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{h_2}, \ \ldots, \ \delta_k = \frac{\varepsilon_k}{h_k}.$$

De aici rezultă că cea mai mică valoare nu va fi

$$V = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2,$$

---

[1]) Se numește „pondere“ mărimea $\frac{1}{\mu_i^2}$.

ci

$$V_1 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_k^2.$$

Evident, că simultan cu V_1 va fi minimă și expresia

$$V_2 = q^2 V_1 = (q\delta_1)^2 + (q\delta_2)^2 + \ldots + (q\delta_k)^2,$$

unde q este un număr constant *arbitrar*.

Punînd

$$q\delta_1 = \sigma_1,\ q\delta_2 = \sigma_2, \ldots, q\delta_k = \sigma_k,$$

vom avea:

$$V_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2,$$

care trebuie să fie minimă.

Să luăm

$$q = \mu\sqrt{2},$$

atunci vom avea:

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{\mu_1}\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \frac{\mu}{\mu_2}\varepsilon_2, \ldots, \sigma_k = \frac{\mu}{\mu_k}\varepsilon_k,$$

adică pe baza ecuației (55)

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{\mu_1}(a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \ldots + g_1 w - \alpha_1),$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu}{\mu_2}(a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \ldots + g_2 w - \alpha_2),$$

. . . . . .

$$\sigma_k = \frac{\mu}{\mu_k}(a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \ldots + g_k w - \alpha_k),$$

ceea ce arată că în acest caz, la alcătuirea ecuațiilor normale, trebuie să se reducă mai întîi toate ecuațiile convenționale la aceeași eroare medie, înmulțindu-le respectiv cu

$$\frac{\mu}{\mu_1}, \quad \frac{\mu}{\mu_2}, \ldots, \frac{\mu}{\mu_k},$$

unde μ poate fi ales în mod arbitrar. Am luat mai sus

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_k^2}{k}};$$

în locul acestei valori am fi putut lua de exemplu și

$$\mu = 1$$

sau

$$\mu = \mu_i,$$

sau orice altă valoare care dintr-un motiv oarecare ar simplifica calculul; prin aceasta rezultatul nu s-ar modifica.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea μ este eroarea medie căreia i se atribuie o „pondere" egală cu 1, şi care poate fi luată în mod arbitrar deoarece rezultatul final nu cuprinde valoarea ei.

§ 135. Să alcătuim acum schemele de calcul, ilustrîndu-le în acelaşi timp printr-un exemplu.

Acest exemplu îl vom lua din cursul de astronomie ţinut la Academia navală de către N. I. Zinger, care a profesat acolo mai mult de 40 de ani.

Să presupunem că N este o funcţie de variabilă t definită de egalitatea

$$N = X + Yt + Zt^2,$$

şi că trebuie să se determine valorile cele mai probabile ale coeficienţilor X, Y, Z şi erorile lor medii: β, γ, δ, după următoarele nouă valori ale lui N, obţinute din observaţii cu „ponderi" diferite.

Valorile argumentului t nu sînt supuse erorilor de observaţie (tabela 95).

Tabela 95

i	t_i	N_i	p_i^2	r_i
1	+1,5	6,20	$^1/_2$	0,707
2	+1,1	3,45	1	1
3	+0,7	2,00	1	1
4	+0,3	1,80	1	1
5	—0,1	2.40	1	1
6	—0,5	4,55	1	1
7	—1,0	8,85	1	1
8	—1,5	15,70	$^1/_2$	0,707
9	—2,0	24,40	$^1/_4$	0,500

Astfel, ecuaţiile (47) alcătuite pe baza observaţiilor directe vor fi:

$$\left.\begin{aligned}
X + 1{,}5Y + 2{,}25Z &= +\ 6{,}20,\\
X + 1{,}1Y + 1{,}21Z &= +\ 3{,}45,\\
X + 0{,}7Y + 0{,}49Z &= +\ 2{,}00,\\
X + 0{,}3Y + 0{,}09Z &= +\ 1{,}80,\\
X - 0{,}1Y + 0{,}01Z &= +\ 2{,}40,\\
X - 0{,}5Y + 0{,}25Z &= +\ 4{,}55,\\
X - 1{,}0Y + 1{,}00Z &= +\ 8{,}85,\\
X - 1{,}5Y + 2{,}25Z &= +\ 15{,}70,\\
X - 2{,}0Y + 4{,}00Z &= +\ 24{,}40.
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Înainte de toate vom afla valorile aproximative ale mărimilor X, Y, Z; în acest scop, luăm prima, a cincea şi a opta din aceste ecuaţii şi din ele aflăm, rotunjind valorile:

$$X_0 = 2{,}4,\ Y_0 = -3{,}2,\quad Z_0 = 3{,}8$$

Substituind aceste valori în membrii întîi ai ecuațiilor (*), aflăm valorile care au fost notate prin A_1, A_2,...,; vom avea:

$$\begin{aligned}
2{,}4 - 1{,}5 \cdot 3{,}2 + 2{,}25 \cdot 3{,}8 &= 6{,}15,\\
2{,}4 - 1{,}1 \cdot 3{,}2 + 1{,}21 \cdot 3{,}8 &= 3{,}48,\\
2{,}4 - 0{,}7 \cdot 3{,}2 + 0{,}49 \cdot 3{,}8 &= 2{,}02,\\
2{,}4 - 0{,}3 \cdot 3{,}2 + 0{,}09 \cdot 3{,}8 &= 1{,}78,\\
2{,}4 + 0{,}1 \cdot 3{,}2 + 0{,}01 \cdot 3{,}8 &= 2{,}76,\\
2{,}4 + 0{,}5 \cdot 3{,}2 + 0{,}25 \cdot 3{,}8 &= 4{,}95,\\
2{,}4 + 1{,}0 \cdot 3{,}2 + 1{,}00 \cdot 3{,}8 &= 9{,}40,\\
2{,}4 + 1{,}5 \cdot 3{,}2 + 2{,}25 \cdot 3{,}8 &= 15{,}75,\\
2{,}4 + 2{,}0 \cdot 3{,}2 + 4{,}00 \cdot 3{,}8 &= 24{,}00.
\end{aligned}$$

Scăzînd aceste valori din mărimile M, obținem următoarele valori pentru numerele α_1, α_2,..., α_9:

$$+0{,}05, -0{,}03, -0{,}02, +0{,}02, -0{,}36, -0{,}40, -0{,}55, -0{,}05, +0{,}40;$$

Așadar, punînd

$$X = 2{,}4 + \xi, \quad Y = -3{,}2 + \eta, \quad Z = 3{,}8 + \zeta,$$

găsim ecuațiile convenționale scrise în tabela 96, care nu mai necesită explicații.

Tabela 96

i	a_i	b_i	c_i	α_i	p_i
1	1,00	1,5	2,25	0.05	0,707
2	1,00	1,1	1,21	—0,03	1
3	1,00	0,7	0,49	—0,02	1
4	1,00	0,3	0,09	0,02	1
5	1,00	—0,1	0,01	—0,36	1
6	1,00	—0,5	0.25	—0,40	1
7	1,00	—1,0	1,00	—0,55	1
8	1,00	—1,5	2,25	—0,05	0,707
9	1,00	—2,0	4,00	0,40	0,5

Înmulțind toți coeficienții necunoscutelor, cum și mărimile α_i arătate în această tabelă cu p_i, vom reduce toate aceste ecuații la ecuații în care eroarea medie a membrilor cunoscuți, egală cu $\alpha_i p_i$, va fi aceeași.

Aceste ecuații reduse le înscriem în coloanele II, III, IV, V, ale tabelei 97, unde în prima coloană sînt indicate numerele de ordine ale ecuațiilor.

În coloana VI sînt înscrise sumele

$$s = a + b + c + \alpha.$$

În coloanele VII — XVIII sînt înscrise produsele a^2, ab, ac,..., cs așa cum se arată la capătul fiecăreia din aceste coloane.

Calculele încep cu completarea coloanei VI, după care se alcătuiesc spre verificare sumele numerelor care se află în coloanele II, III, IV, V, VI. Numărul care se află în linia „sumele" și în coloana VI, trebuie să fie egal cu suma numerelor care se află într-o linie; astfel

$$14{,}506 = 7{,}914 - 0{,}50 + 8{,}232 - 1{,}140,$$

și aceasta servește la verificare.

După aceea, fixînd la o riglă de calcul cursorul la numărul a_1 completăm prima linie a coloanelor VII, VIII, IX, X, XI. Apoi punem cursorul pe numărul a_2 și completăm rîndul al doilea al aceloraşi coloane etc., pînă la ultima, după care luăm sumele numerelor care se găsesc în aceste coloane și verificăm calculul după egalitatea

$$12{,}310 = 7{,}250 + 0{,}0 + 6{,}300 - 1{,}240.$$

Completăm apoi în aceeași ordine coloanele XII, XIII, XIV, XV și efectuăm verificarea cu ajutorul egalității

$$6{,}300 + 0{,}0 - 1{,}425 + 0{,}620 = 5{,}495.$$

După aceea în aceeași ordine coloanele XVI, XVII, XVIII și verificăm calculul după egalitatea

$$11{,}837 + 6{,}300 - 1{,}425 - 0{,}298 = 16{,}414.$$

Cu aceasta se termină calculul coeficienților și al membrilor cunoscuți ai ecuațiilor normale. Rezolvarea ecuațiilor normale și calculul abaterilor sînt arătate în tabela 98 și 99.

În cazul cînd calculul s e efectuează cu rigla de calcul și se cer nu numai valorile cele mai probabile ale necunoscutelor ci și erorile lor medii sau probabile, este mai avantajos să se înlocuiască termenii cunoscuți prin litere, de exemplu A, B și C, scriind ecuațiile normale din exemplul nostru în felul următor:

$$\left.\begin{aligned} 7{,}250\xi \qquad\qquad + 6{,}300\zeta &= A, \\ 6{,}300\eta - 1{,}425\zeta &= B, \\ 6{,}300\xi - 1{,}425\eta + 11{,}837\zeta &= C. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Eliminarea necunoscutelor în vederea rezolvării acestor ecuații se face cel mai avantajos în felul următor: împărțind fiecare ecuație cu coeficientul primei necunoscute (în cazul nostru particular numai prima și a treia ecuație), avem

$$\begin{aligned} \xi \qquad\qquad + 0{,}869\,\zeta &= 0{,}1377\,A, \\ 6{,}300\eta - 1{,}425\,\zeta &= B, \\ \xi - 0{,}2263\eta + 1{,}880\,\zeta &= 0{,}1588\,C; \end{aligned}$$

de unde eliminînd pe ξ, obținem:

$$\begin{aligned} 6{,}300\,\eta - 1{,}425\zeta &= B, \\ -\,0{,}2263\eta + 1{,}011\zeta &= -\,0{,}1377A + 0{,}1588\,C. \end{aligned}$$

Tabela 97

Schema și un exemplu de alcătuire și rezolvare a ecuațiilor normale

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
Nr. crt. al ecuației convenționale	ξ a_i	η b_i	ζ c_i	α_i	s_i	a_i^2	$a_i\,b_i$	$a_i\,c_i$	$a_i\,\alpha_i$	$a_i\,s_i$	b_i^2	$b_i\,c_i$	$b_i\alpha i$	$b_i s_i$	c_i^2	$c_i\alpha_i$	$c_i s_i$
1	0,707	1,06	1,591	0,035	3,393	0,5	0,75	1,125	0,025	2,398	1,125	1,687	0,038	3,600	2,531	0,056	5,402
2	1	1,10	1,21	−0,03	3,28	1	1,10	1,21	−0,03	3,28	1,21	1,331	−0,033	3,608	1,464	−0,036	3,972
3	1	0,70	0,49	−0,02	2,17	1	0,70	0,49	−0,02	2,17	0,49	0,343	−0,014	1,519	0,240	−0,010	1,054
4	1	0,30	0,09	0,02	1,41	1	0,30	0,09	0,02	1,41	0,09	0,027	0,006	0,423	0,008	0,002	0,127
5	1	−0,10	0,01	−0,36	0,55	1	−0,10	0,01	−0,36	0,55	0,01	−0,001	0,036	−0,055	0	−0,004	0,006
6	1	−0,50	0,25	−0,40	0,35	1	−0,50	0,25	−0,40	0,35	0,25	−0,125	0,200	−0,175	0,063	−0,100	0,088
7	1	−1,00	1,00	−0,55	0,45	1	−1,00	1,00	−0,55	0,45	1,00	−1,000	0,550	−0,450	1,000	−0,550	0,450
8	0,707	−1,06	1,591	−0,035	1,203	0,5	−0,75	1,125	−0,025	0,852	1,125	−1,687	0,037	−1,275	2,531	−0,056	1,915
9	0,500	−1,00	2,000	0,200	1,70	0,25	−0,50	1,00	0,10	0,85	1,00	2,000	−0,200	−1,700	4,000	0,400	3,400
Sumele	7,914	−0,50	8,232	−1,140	14,506	7,250	0	6,300	−1,240	12,310	6,300	−1,425	+0,620	+ 5,495	11,837	−0,298	16,414

Proba $7{,}914 - 0{,}50 + 8{,}232 - 1{,}140 = 14{,}506$ $\quad 7{,}250 + 0{,}000 + 6{,}300 - 1{,}240 = 12{,}310$

$6{,}300 \quad +0{,}000 \quad -1{,}425 \quad +0{,}620 = 5{,}495$

$11{,}837 \quad +6{,}300 \quad -1{,}425 \quad -0{,}298 = 16{,}414$

Ecuațiile normale:

$$6{,}300\xi - 1{,}425\eta + 11{,}837\zeta = -0{,}289$$
$$6{,}300\eta - 1{,}425\zeta = +0{,}620$$
$$7{,}250\xi + 6{,}300\zeta = -1{,}240$$

Tabela 98

Soluția generală a ecuațiilor normale

ξ	η	ζ	A	B	C
1	0	0,869	0,1377	0	0
1	−0,2263	1,880	0	0	0,1588
	6,300	−1,425	0	1,000	0
	−0,2263	1,011	−0,1377	0	+0,1588
	1	−0,2263	0	0,1588	0
	1	−4,469	0,609	0	−0,702
		−4,243	0,609	−0,1588	−0,702

$$\zeta = -0{,}1435A + 0{,}0374B + 0{,}1654C$$
$$0{,}2263\zeta = -0{,}0323 + 0{,}0084 + 0{,}0373$$

$$\eta = -0{,}0323A + 0{,}1672B + 0{,}373C$$
$$-0{,}869 \quad \zeta = +0{,}1247A - 0{,}0325B - 4{,}1437C$$

$$\xi = 0{,}2624A - 0{,}0325B - 0{,}1437C$$

Tabela 99

Nr. de ordine al ecuației i	I $a_i\xi$	II $b_i\eta$	III $c_i\zeta$	IV Total (I)+(II)+(III)	V α_i	VI $\varepsilon_i = (IV) - (V)$	VII ε_i^2
1	−0,214	0,141	0,242	0,169	0,035	0,13	0,017
2	−0,303	0,146	0,183	0,026	−0,03	0,06	0,004
3	−0,303	0,093	0,066	−0,144	−0,02	−0,12	0,014
4	−0,303	0,039	0,014	−0,250	0,02	−0,27	0,073
5	−0,303	−0,013	0,002	−0,314	−0,36	0,05	0,003
6	−0,303	−0,066	0,038	−0,331	−0,40	0,07	0,005
7	−0,303	−0,132	0,152	−0,283	−0,55	0,27	0,073
8	−0,214	−0,141	0,242	−0,113	−0,035	−0,08	0,006
9	−0,152	−0,132	0,303	+0,019	+0,20	−0,18	0,032
						$\Sigma\varepsilon_i^2 =$	0,227

$$\varepsilon^2 = \frac{0{,}225}{9-3} = 0{,}0375$$

$$\varepsilon = 0{,}19$$

	Valoarea necunoscutelor	Erorile medii	Erorile probabile ±
$\xi =$	$0{,}2624 \cdot (-1{,}240) - 0{,}0325 \cdot 0{,}620 - 0{,}1437 \cdot (-0{,}298) = -0{,}3256 - 0{,}0201 + 0{,}0434 = -0{,}3027$	$\beta = \varepsilon \cdot \sqrt{0{,}2624} = 0{,}19 \cdot 0{,}51 = 0{,}10$	$\rho_1 = +0{,}067$
$\eta =$	$-0{,}0323 \cdot (-1{,}240) + 0{,}1672 \cdot 0{,}620 + 0{,}373 \cdot (-0{,}298) = +0{,}0401 + 0{,}1036 - 0{,}0112 = +0{,}1325$	$\gamma = \varepsilon \cdot \sqrt{0{,}1672} = 0{,}19 \cdot 0{,}41 = 0{,}08$	$\rho_2 = +0{,}054$
$\zeta =$	$-0{,}1435 \cdot (-1{,}240) + 0{,}0374 \cdot 0{,}620 + 0{,}1654 \cdot (-0{,}298) = +0{,}1780 + 0{,}0232 - 0{,}0496 = +0{,}1516$	$\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{0{,}1654} = 0{,}19 \cdot 0{,}41 = 0{,}08$	$\rho_3 = +0{,}054$

Procedînd cu aceste ecuaţii în acelaşi fel, găsim

$$\eta - 0{,}2263\zeta = \quad 0{,}1588B,$$
$$\eta - 4{,}469\zeta = +\,0{,}609A - 0{,}702C.$$

Eliminînd pe η, avem:

$$-\,4{,}243\zeta = +\,0{,}609A - 0{,}1588B - 0{,}702C,$$

de unde rezultă:

$$\zeta = -\,0{,}1435A + 0{,}0374B + 0{,}1654C.$$

Substituind apoi, obţinem

$$0{,}2263\zeta = -\,0{,}0323A + 0{,}0084B + 0{,}0373C,$$
$$\eta = -\,0{,}0323A + 0{,}1672B + 0{,}0373C$$

şi după aceea

$$-\,0{,}869\zeta = +\,0{,}1247A - 0{,}0325B - 0{,}1437C$$

şi prin substituţie

$$\xi = 0{,}2624A - 0{,}0325B - 0{,}1437C.$$

Astfel găsim că soluţia *generală* este

$$\begin{aligned} \xi &= \quad 0{,}2624A - 0{,}0325B - 0{,}1437C, \\ \eta &= \quad 0{,}0323A + 0{,}1672B + 0{,}0373C, \\ \zeta &= -\,0{,}1435A + 0{,}374\ B + 0{,}1654C. \end{aligned} \tag{82}$$

Pentru a obţine valorile necunoscutelor, punem

$$A = -\,1{,}240,\ B = 0{,}620,\ C = -\,0{,}298,$$

de unde

$$\xi = -\,0{,}3027,\ \eta = 0{,}1325,\ \zeta = 0{,}1516.$$

Punînd apoi

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0,$$

avem:

$$M_1 = 0{,}2624.$$

Punînd

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 0,$$

găsim:

$$N_2 = 0{,}1672,$$

şi în sfîrşit pentru

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 1$$

obţinem

$$P_3 = 0{,}1654.$$

Evident, că am fi putut scrie aceste mărimi dintr-odată, deoarece ele sînt coeficienţii din formula (82) care se găseşte în diagonala principală.

Rămîne să se afle valoarea erorii medii ε a acestor observaţii.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta, calculăm mai întîi „abaterile“ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_9$ de unde vom avea apoi după formula (64)

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_9^2}{k-n}} = \sqrt{\frac{0{,}225}{9-3}} = 0{,}19$$

Prin urmare, erorile medii ale necunoscutelor vor fi:

pentru necunoscuta ξ $\quad \beta = \sqrt{0{,}2624} \cdot \varepsilon = 0{,}10,$
pentru necunoscuta η $\quad \gamma = \sqrt{0{,}1672} \cdot \varepsilon = 0{,}08,$
pentru necunoscuta ζ $\quad \delta = \sqrt{0{,}1654} \cdot \varepsilon = 0{,}08,$

și erorile lor probabile

$$\rho_1 = 0{,}67\beta = 0{,}067,$$
$$\rho_2 = 0{,}67\gamma = 0{,}054,$$
$$\rho_3 = 0{,}67\delta = 0{,}054.$$

Așadar valorile lui ξ, η, ζ vor fi:

$$\xi = -0{,}303 \pm 0{,}067,$$
$$\eta = +0{,}133 \pm 0{,}054,$$
$$\zeta = +0{,}152 \pm 0{,}054.$$

și deci

$$X = 2{,}400 + \xi = +2{,}097 \pm 0{,}067,$$
$$Y = -3{,}200 + \eta = -3{,}067 \pm 0{,}054,$$
$$Z = +3{,}800 + \zeta = +3{,}948 \pm 0{,}054.$$

§ 136. În § 132 s-a arătat, că aflarea valorilor celor mai probabile ale celor n necunoscute

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega,$$

din sistemul de ecuații convenționale

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \cdots + g_1\omega &= \alpha_1, \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \cdots + g_2\omega &= \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \cdots + g_k\omega &= \alpha_k \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

după metoda celor mai mici pătrate este echivalentă cu problema aflării minimului funcției

$$V = (a_1\xi + b_1\eta + \cdots + g_1\omega - \alpha_1)^2 + \cdots$$
$$\cdots + (a_k\xi + b_k\eta + \cdots + g_k\omega - \alpha_k)^2,$$

unde se presupune că $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ sînt variabile *independente*, adică, valoarea uneia din ele nu este determinată prin celelalte.

În acest caz, valorile căutate ale lui $\xi, \eta, \ldots, \omega$, se determină din cele n ecuații

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \omega} = 0, \qquad (83)$$

Scanned with OKEN Scanner

care dezvoltate, reprezintă sistemul de ecuații normale corespunzătoare condițiilor date.

La unele probleme însă, mărimile

$$x, y, z, \ldots, w,$$

pentru care $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ reprezintă corecții mici, sînt legate între ele prin anumite relații, *independente de observații*. Astfel, de exemplu, dacă x, y, z sînt unghiurile aceluiași triunghi, trebuie să avem:

$$x + y + z = 180°,$$

astfel încît corecțiile ξ, η, ζ trebuie să aibă valori pentru care suma

$$\xi + \eta + \zeta = 0,$$

după cum rezultă din derivarea formulei precedente.

Să presupunem așa dar că între variabilele

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$$

există i ecuații *liniare* de forma

$$\left.\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + \cdots + G_1\omega &= L_1, \\ A_2\xi + B_2\eta + \cdots + G_2\omega &= L_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ A_i\xi + B_i\eta + \cdots + G_i\omega &= L_i, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

al căror număr i este mai mic decît n și care au loc independent de observații, astfel încît mărimile observate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nu figurează în aceste relații.

În acest caz valorile variabilelor $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ care realizează minimul lui V nu se mai determină prin ecuațiile (83), deoarece acum problema s-a redus la aflarea așa-numitului minim relativ al funcției V.

La rezolvarea acestei probleme pot fi folosite diferite metode dintre care vom examina două.

Prima metodă constă în următoarele: din ecuațiile (84) putem determina i variabile, de exemplu

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \rho,$$

în funcție de celelalte $n - i$:

$$\sigma, \tau, \varphi, \ldots, \omega;$$

evident că se obțin expresii de forma

$$\left.\begin{aligned} \xi &= h_1\sigma + f_1\tau + \cdots + q_1\omega - r_1, \\ \eta &= h_2\sigma + f_2\tau + \cdots + q_2\omega - r_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \rho &= h_i\sigma + f_i\tau + \cdots + q_i\omega - r_i, \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

unde $h_1, f_1 \cdots, q_i, r_i$ vor fi numere constante cunoscute.

Substituind variabilele (85) în expresia lui V, obținem la început formula de tipul

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + \cdots + g_1\omega - \alpha_1 &= h_1'\sigma + f_1'\tau + \cdots + g_1'\omega - r_1', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k\xi + b_k\eta + \cdots + g_k\omega - \alpha_k &= h_k'\sigma + f_k'\tau + \cdots + q_k'\omega - r_k', \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

unde $h_1', f_1', \ldots, q_k', r_k'$, vor fi de asemenea constante cunoscute; aceasta înseamnă că expresia pentru V se va transforma după această substituție în următoarea

$$W = (h_1'\sigma + f_1'\tau + \cdots + q_1'\omega - r_1')^2 + \cdots + (h_k'\sigma + f_k'\tau + \cdots + q_k'\omega - r_k')^2.$$

În această expresie, variabilele $\sigma, \tau, \ldots, \omega$, nu sînt legate între ele prin nici o relație și sînt independente, de unde rezultă că valorile lor pentru care V devine minim, se vor determina din ecuațiile:

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega} = 0, \tag{87}$$

adică din ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma h'^2\sigma + \Sigma h'f'\tau + \cdots + \Sigma h'q'\omega &= \Sigma h'r', \\ \Sigma f'h'\sigma + \Sigma f'^2\tau + \cdots + \Sigma f'q'\omega &= \Sigma f'r', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \Sigma q'h'\sigma + \Sigma q'f'\tau + \cdots + \Sigma q'^2\omega &= \Sigma q'r'. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Evident, că aceste ecuații reprezintă ecuațiile „normale" pentru sistemul următoarelor ecuații „convenționale":

$$\left.\begin{aligned} h_1'\sigma + f_1'\tau + \cdots + q_1'\omega &= r_1', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ h_k'\sigma + f_k'\tau + \cdots + q_k'\omega &= r_k'. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

De aici rezultă următoarea regulă: exprimînd din ecuațiile (84) i variabile

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \rho$$

în funcție de celelalte $n - i$:

$$\sigma, \tau, \ldots, \omega,$$

se vor substitui expresiile aflate în ecuațiile convenționale date reducîndu-le la forma

$$\left.\begin{aligned} h_1'\sigma + f_1'\tau + \cdots + q_1'\omega &= r_1', \\ h_2'\sigma + f_2'\tau + \cdots + q_2'\omega &= r_2', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ h_k'\sigma + f_k'\tau + \cdots + q_k'\omega &= r_k'. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Pentru aceste ecuații transformate se vor alcătui apoi după regula din § 132 ecuațiile normale corespunzătoare.

Ecuațiile normale formate în acest fel trebuie să fie rezolvate în raport cu mărimile

$$\sigma, \tau, \ldots, \omega,$$

considerate ca necunoscute, substituindu-se apoi valorile aflate în expresiile (85) pentru celelalte necunoscute, astfel încît se vor putea determina și acestea din urmă.

Procedeul al doilea constă în folosirea metodei multiplicatorilor lui Lagrange, pentru determinarea minimului relativ al funcției V. Această metodă constă, după cum se știe în următoarele.

Scriind ecuațiile (84) care leagă variabilele

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$$

sub forma

$$\left.\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + \cdots + G_1\omega - L_1 &= 0, \\ A_2\xi + B_2\eta + \cdots + G_2\omega - L_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ A_i\xi + B_i\eta + \cdots + G_i\omega - L_i &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{84'}$$

înmulțim primii membri ai acestor ecuații, cu multiplicatorii constanți nedeterminați

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$$

și formăm apoi expresia

$$\begin{aligned} W = V &+ \lambda_1 (A_1\xi + B_1\eta + \cdots + G_1\omega - L_1) + \\ &+ \lambda_2 (A_2\xi + B_2\eta + \cdots + G_2\omega - L_2) + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \lambda_i (A_i\xi + B_i\eta + \cdots + G_i\omega - L_i), \end{aligned} \tag{91}$$

în care avem după cele precedente

$$\begin{aligned} V = &(a_1\xi + b_1\eta + \cdots - \alpha_1)^2 + \\ &+ (a_2\xi + b_2\eta + \cdots - \alpha_2)^2 + \cdots + (a_k\xi + b_k\eta + \cdots - \alpha_k)^2. \end{aligned}$$

Avem apoi ecuațiile

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial \omega} = 0, \tag{92}$$

al căror număr este n.

Aceste n ecuații împreună cu cele i ecuații (84) servesc pentru determinarea celor $n + i$ necunoscute

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega; \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i.$$

Nu ne vom opri asupra demonstrației acestei metode pentru aflarea valorilor extreme relative, căci ea poate fi găsită în orice curs de analiză, astfel încît presupunem că cititorul cunoaște această metodă.

Dezvoltînd ecuațiile (92), obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a_1^2\xi + \Sigma ab\eta + \cdots + \Sigma ag\omega + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \cdots + A_i\lambda_i &= \Sigma a\alpha, \\ \Sigma ba\xi + \Sigma b^2\eta + \cdots + \Sigma bg\omega + B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 + \cdots + B_i\lambda_i &= \Sigma b\alpha, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \Sigma ga\xi + \Sigma gb\eta + \cdots + \Sigma g^2\omega + G_1\lambda_1 + G_2\lambda_2 + \cdots + G_i\lambda_i &= \Sigma g\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Luînd în considerare faptul că ansamblul termenilor care cuprind semnul Σ, reprezintă tocmai sistemul de ecuații normale pentru sistemul inițial (53) de ecuații convenționale, obținem următoarea regulă.

Pe baza sistemului dat de ecuații convenționale (53), calculăm după schema din § 135 ceoficienții

$$\begin{aligned} &\Sigma a^2,\ \Sigma ab,\ \Sigma ac,\ldots,\ \Sigma ag,\ \Sigma a\alpha,\\ &\Sigma b^2,\ \Sigma bc,\ldots,\ \Sigma bg,\ \Sigma b\alpha,\\ &\Sigma c^2,\ldots,\ \Sigma cg,\ \Sigma c\alpha,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\Sigma g^2,\ \Sigma g\alpha \end{aligned}$$

și pentru control, sumele:

$$\Sigma as,\ \Sigma bs,\ldots,\ \Sigma gs.$$

Sistemul de ecuații normale va fi atunci:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a^2\xi + \Sigma ab\eta + \cdots + \Sigma ag\omega + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \cdots + A_i\lambda_i = \Sigma a\alpha,\\ &\Sigma ba\xi + \Sigma b^2\eta + \cdots + \Sigma bg\omega + B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 + \cdots + B_i\lambda_i = \Sigma b\alpha,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\Sigma ga\xi + \Sigma gb\eta + \cdots + \Sigma g^2\omega + G_1\lambda_1 + G_2\lambda_2 + \cdots + G_i\lambda_i = \Sigma g\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Din aceste ecuații și din ecuațiile (84) aflăm mărimile

$$\xi,\ \eta,\ldots,\ \omega;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_i.$$

Valorile găsite

$$\xi,\ \eta,\ldots,\ \omega$$

vor fi valorile cele mai probabile de care avem nevoie.

Comparînd aceste două metode, se observă că la prima metodă calculul coeficienților

$$h_1',\ f_1',\ldots,\ q_i',\ r_i'$$

și apoi al coeficienților sistemului corespunzător de ecuații normale, necesită aproape aceeași muncă ca și în metoda a doua; în ceea ce privește rezolvarea ecuațiilor, trebuie să se rezolve mai întîi la prima metodă un sistem de i ecuații (84) și apoi un sistem de $n - i$ ecuații (88).

La a doua metodă, trebuie să se rezolve un sistem de $n + i$ ecuații, ceea ce ar putea necesita o muncă cu mult mai mare în schimb însă calculele sînt la această metodă cu mult mai simetrice și mai ușor de controlat.

Cînd numărul necunoscutelor și al ecuațiilor convenționale corespunzătoare este mare, alcătuirea ecuațiilor normale, rezolvarea lor și calculul erorilor probabile reprezintă o muncă foarte mare, despre care ne pot da o idee următoarele cifre. În anul 1822 Gauss a ridicat planul orașului Hannover; într-una din scrisorile sale către astronomul Olbers, el scrie: „După trei luni de muncă asiduă am terminat după metoda celor mai mici pătrate calculele de nivelare care au cuprins cca 300 ecuații convenționale cu 55 necunoscute".

Se pare că cel mai mare număr de necunoscute care s-a întîlnit vreodată în metoda celor mai mici pătrate a fost la lucrările de ridicare a hărții topografice a Indiei — cca 2500 ecuații convenționale cu 88 necunoscute; munca biroului de calculat a durat doi ani.

ANEXA

Tabela valorilor coeficienților pentru formula de interpolare a lui Stirling

Formula de interpolare a lui Stirling, v. p. formula (IX).

$$y_{n+k}=y_n+k\cdot\frac{\Delta y_{n-1}+\Delta y_n}{2}+\frac{k^2}{2}\Delta^2 y_{n-1}+$$
$$+\frac{(k+1)\,k(k-1)}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{n-2}+\Delta^3 y_{n-1}}{2}+\frac{(k+1)\,k\cdot k(k-1)}{24}\cdot\Delta^4 y_{n-2}+\ldots$$

Tabela 100

Valorile coeficienților $A=\frac{k^2}{2}$; $B=\frac{(k+1)k(k-1)}{6}$; $C=\frac{(k+1)kk\,(k-1)}{24}$

k	A	B	C	k	A	B	C
0,00	+0,00000	—0,0000	—0,0000	0,25	+0,03125	—0,0391	—0,0024
,01	,00005	,0017	,0000	,26	,03380	,0404	,0026
,02	,00020	,0033	,0000	,27	,03645	,0417	,0028
,03	,00045	,0050	,0000	,28	,03920	,0430	,0030
,04	,00080	,0067	,0001	,29	,04205	,0443	,0032
0,05	+0,00125	—0,0083	—0,0001	0,30	+0,04500	—0,0455	—0,0034
,06	,00180	,0100	,0001	,31	,04805	,0467	,0036
,07	,00245	,0116	,0002	,32	,05120	,0479	,0038
,08	,00320	,0133	,0003	,33	,05445	,0490	,0040
,09	,00405	,0149	,0003	,34	,05780	,0501	,0043
0,10	+0,00500	—0,0165	—0,0004	0,35	+0,06125	—0,0512	—0,0045
,11	,00605	,0181	,0005	,36	,06480	,0522	,0047
,12	,00720	,0197	,0006	,37	,06845	,0532	,0049
,13	,00845	,0213	,0007	,38	,07220	,0542	,0051
,14	,00980	,0229	,0008	,39	,07605	,0551	,0054
0,15	+0,01125	—0,0244	—0,0009	0,40	+0,08000	—0,0560	—0,0056
,16	,01280	,0260	,0010	,41	,08405	,0568	,0058
,17	,01445	,0275	,0012	,42	,08820	,0576	,0060
,18	,01620	,0290	,0013	,43	,09245	,0584	,0063
,19	,01805	,0305	,0014	,44	,09680	,0591	,0065
0,20	+0,02000	—0,0320	—0,0016	0,45	+0,10125	—0,0598	—0,0067
,21	,02205	,0335	,0018	,46	,10580	,0604	,0069
,22	,02420	,0349	,0019	,47	,11045	,0610	,0072
,23	,02645	,0363	,0021	,48	,11520	,0616	,0074
,24	,02880	,0377	,0023	,49	,12005	,0621	,0076
0,25	+0,03125	—0,0391	—0,0024	0,50	+0,12500	—0,0625	—0,0078

Scanned with OKEN Scanner

Tabela valorilor coeficienţilor pentru formula de interpolare a lui Newton

Formula de interpolare a lui Newton

$$y_{n+k} = y_n + k\Delta y_n + \frac{k\,(k-1)}{2}\,\Delta^2 y_n + \frac{k\,(k-1)\,(k-2)}{2}\,\Delta^3 y_n + \cdots$$

Valoarea coeficienţilor $A = \frac{k\,(k-1)}{2}$; $B = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$; $C = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}$

k	A	B	C	k	A	B	C
0,00	—0,00000	+0,0000	—0,0000	0,50	—0,12500	+0,0625	—0,0391
,01	,00495	,0033	,0024	,51	,12495	,0621	,0386
,02	,00980	,0065	,0048	,52	,12480	,0616	,0382
,03	,01455	,0095	,0071	,53	,12455	,0610	,0377
,04	,01920	,0125	,0093	,54	,12420	,0604	,0372
0,05	—0,02375	+0,0154	—0,0114	0,55	—0,12375	+0,0598	—0,0366
,06	,02820	,0182	,0134	,56	,12320	,0591	,0361
,07	,03255	,0209	,0153	,57	,12255	,0584	,0355
,08	,03680	,0235	,0172	,58	,12180	,0576	,0346
,09	,04095	,0261	,0190	,59	,12095	,0568	,0342
0,10	—0,04500	+0,0285	—0,0207	0,60	—0,12000	+0,0560	—0,0336
,11	,04895	,0308	,0223	,61	,11895	,0551	,0329
,12	,05280	,0331	,0238	,62	,11780	,0542	,0322
,13	,05655	,0352	,0253	,63	,11655	,0532	,0315
,14	,06020	,0373	,0267	,64	,11520	,0522	,0308
0,15	—0,06375	+0,0393	—0,0280	0,65	—0,11375	+0,0512	—0,0301
,16	,06720	,0412	,0293	,66	,11220	,0501	,0293
,17	,07055	,0430	,0304	,67	,11055	,0490	,0285
,18	,07380	,0448	,0316	,68	,10880	,0479	,0278
,19	,07695	,0464	,0326	,69	,10695	,0467	,0270
0,20	—0,08000	+0,0480	—0,0336	0,70	—0,10500	+0,0455	—0,0262
,21	,08295	,0495	,0345	,71	,10295	,0443	,0253
,22	,08580	,0509	,0354	,72	,10080	,0430	,0245
,23	,08855	,0522	,0362	,73	,09855	,0417	,0237
,24	,09120	,0535	,0369	,74	,09620	,0404	,0228
0,25	—0,09375	+0,0547	—0,0376	0,75	—0,09375	+0,0391	—0,0220
,26	,09620	,0558	,0382	,76	,09120	,0377	,0211
,27	,09855	,0568	,0388	,77	,08855	,0363	,0202
,28	,10080	,0578	,0393	,78	,08580	,0349	,0194
,29	,10295	,0587	,0398	,79	,08295	,0335	,0185
0,30	—0,10500	+0,0595	—0,0402	0,80	—0,08000	+0,0320	—0,0176
,31	,10695	,0602	,0405	,81	,07695	,0305	,0167
,32	,10808	,0609	,0408	,82	,07380	,0290	,0158
,33	,11055	,0615	,0411	,83	,07055	,0275	,0149
,34	,11220	,0621	,0413	,84	,06720	,0260	,0140
0,35	—0,11375	+0,0626	—0,0415	0,85	—0,06375	+0,0244	—0,0131
,36	,11520	,0630	,0416	,86	,06020	,0229	,0122
,37	,11655	,0633	,0416	,87	,05655	,0213	,0113
,38	,11780	,0636	,0417	,88	,05280	,0197	,0104
,39	,11895	,0638	,0416	,89	,04895	,0181	,0095
0,40	—0,12000	—0,0640	—0,0416	0,90	—0,04500	+0,0165	—0,0037
,41	,12095	,0641	,0415	,91	,04095	,0149	,0078
,42	,12180	,0641	,0414	,92	,03680	,0132	,0069
,43	,12255	,0641	,0412	,93	,03255	,0116	,0060
,44	,12320	,0641	,0410	,94	,02820	,0100	,0051
0,45	—0,12375	+0,0639	—0,0408	0,95	—0,02375	+0,0083	—0,0043
,46	,12420	,0638	,0405	,96	,01920	,0067	,0034
,47	,12455	,0635	,0402	,97	,01455	,0050	,0025
,48	,12480	,0632	,0398	,98	,00980	,0033	,0017
,49	,12495	,0629	,0395	,99	,00495	,0017	,0008
0.50	—0,12500	+0,0625	—0,0391	1,00	—0,00000	+0,0000	—0,0000

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Din partea editurii 4
Prefață la ediția întîi 5
Prefață la ediția a doua 5

Capitolul I. *Introducere. Regulile generale ale calculelor prin aproximații* .....

§§ 1—3. Noțiuni despre precizia calculelor. Eroarea absolută și relativă .. 7
§ 4. Operațiile aritmetice principale 9
§§ 5, 6. Calculul cu logaritmi 11
§ 7. Logaritmii lui Gauss ai sumelor și diferențelor 14
§ 8. Regulele generale ale calculelor prin aproximații 17

Capitolul II. *Rezolvarea ecuațiilor numerice* 18

§§ 9—13. Bazele metodei lui Lobacevski 18
§§ 14,15. Exemple pentru calculul rădăcinilor reale după metoda lui Lobacevski 23
§§ 16—18. Metode de calcul al rădăcinilor complexe 28
§§ 19,20. Cazul rădăcinilor egale sau foarte apropiate 39
§§ 21, 22. Îmbunătățirea valorilor aproximative ale rădăcinilor 46
§ 23. Cazul rădăcinilor complexe 51
§ 24. Exemple de calcul al rădăcinilor reale și complexe 52

Capitolul III. *Calculul aproximativ al integralelor definite* 60

§ 25. Exprimarea ariilor, a volumelor etc. prin integrale definite simple 60
§ 26. Regula trapezelor 64
§ 27. Regula lui Simpson 66
§ 28. Formula de interpolare a lui Lagrange 68
§ 29. Regula lui Côtes 70
§ 30. Formula lui Cebîșev 75
§ 31. Formula lui Gauss 83
§§ 32, 33. Exemple 92
§ 34. Calculul unei integrale cu limita superioară variabilă, pe cale analitică sau grafică 104
§ 35. Cazuri particulare 107
§ 36. Calculul integralelor multiple 112

Capitolul IV. *Dispozitive mecanice pentru calculul integralelor definite* 113

§ 37. Teoria generală a planimetrelor 113
§ 38. Planimetrul lui Amsler 117
§ 39. Integratorul lui Amsler 122
§ 40. Planimetrul-toporaș 125
§ 41. Integraful lui Abdank-Abakanovici 182

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V. *Dezvoltarea funcțiilor în serii trigonometrice* 130

§§ 42—44. Formulele generale pentru calculul coeficienților unei serii trigonometrice 130
§§ 45—47. Teorema lui Dirichlet 136
§§ 48, 49. Exemple de dezvoltare a funcțiilor în serii trigonometrice 147
§ 50. Convergența seriilor trigonometrice. Integrarea și derivarea lor 154
§ 51. Rezolvarea unei probleme din calculul probabilităților 158
§ 52. Formulele lui Fourier 163
§ 53. Aflarea coeficienților unei serii trigonometrice, cînd calculul se mărginește la un număr dat de termeni 167
§§ 54—59. Mărirea rapidității convergenței seriilor trigonometrice 171
§ 60. Analizatorul armonic al lui Henrici 196
§ 61. Analizatorul lui Mader 200
§ 62. Dezvoltarea unei funcții dată grafic în unde componente a căror lungime este necunoscută 203
§§ 63, 64. Dezvoltarea funcțiilor date grafic în unde componente, a căror lungime este cunoscută 208

Capitolul VI. *Formulele care exprimă legătura dintre sumă și integrală și dintre diferențe și derivate. Formule de interpolare* 215

§ 65. Formula lui Euler 215
§ 66. Exemple de aplicare a formulei lui Euler 220
§§ 67, 68. Interpolarea prin diferențe; diferitele formule de interpolare de acest fel 226
§ 69. Formule pentru calculul integralelor prin diferențe 245
§ 70. Exprimarea derivatelor prin diferențe 248
§§ 71—73. Metodele de interpolare expuse de Gauss. Aplicarea acestor metode la calculul integralelor și derivatelor 252
§ 74. Exemple 267

Capitolul VII. *Integrarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale* 272

§§ 75—77. Folosirea teoremei lui Taylor pentru dezvoltarea soluției în serie după puterile variabilei independente 272
§§ 78, 79. Dezvoltarea soluției în serie după puterile parametrilor mici care intră în ecuație 279
§ 80. Integrarea ecuațiilor liniare prin metoda aproximațiilor succesive 284
§ 81. Dezvoltarea soluției în serie după puterile valorilor inițiale ale funcției necunoscute și ale derivatelor ei 289
§ 82. Exemple. Mișcarea pendulului sferic 292
§§ 83—87. Metoda aproximațiilor succesive, aplicată la ecuațiile mișcării oscilatorii 300
§ 88. Metoda lui Picard 314
§§ 89, 90. Metoda lui Euler pentru integrarea numerică aproximativă a ecuațiilor diferențiale ordinare 319
§ 91. Observație cu privire la metoda lui Cauchy 322
§ 92. Metoda lui Runge 323
§§ 93—95. Metoda lui Adams 327
§§ 96, 97. Metoda lui Störmer 335
§§ 98—100. Exemple 338
§§ 101—106. Calculul traiectoriei unui obuz 350
§ 107. Calculul formei unei picături 374
§ 108. Calculul funcțiilor fundamentale în problemele fizicii matematice 377
§§ 109, 110. Observație despre metoda lui Legendre pentru calculul numeric al integralelor 382
§§ 111—116. Integrarea ecuației mișcării trenului 384
§ 117. Observația lui Laplace 397

Capitolul VIII. *Metoda celor mai mici pătrate* 398

§ 118. Introducere 398
§§ 119, 120. Clasificarea erorilor 398

Scanned with OKEN Scanner

§§ 121—126. Formula lui Gauss și verificarea ei 402
§ 127. Consecințele cele mai simple ale formulei lui Gauss 412
§§ 128, 129. Eroarea medie și proprietățile ei 414
§§ 130, 131. Rezolvarea unui sistem de ecuații după metoda celor mai mici pătrate 418
§ 132. Formarea ecuațiilor normale 420
§ 133. Calculul erorilor probabile 423
§ 134. Reducerea ecuațiilor convenționale la aceeași pondere 426
§ 135. Exemplu 429
§ 136. Cazul cînd, afară de ecuațiile convenționale, necunoscutele mai sînt legate prin alte ecuații exacte 435

Anexă. Tabela valorilor coeficienților formulei de interpolare a lui Stirling 440
Tabela valorilor coeficienților formulei de interpolare a lui Newton 441

T. 2.500

Controlul științific al traducerii: Prof. D. V. Ionescu

Responsabil de carte: Pop Avram
Tehnoredactor: Dragomir Elena
Corector responsabil: Mitu Aristide

Dat la cules 25.10.56. Bun de tipar 31.01.57. Hîrtie velină de 65 gr/m.p. 70×100/16. Coli editoriale 31,31. Coli de tipar 28,125. Planșe tipo 1. Comanda P.S. 2946. A. 02280. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari și mici 518.

Tiparul executat sub com. nr. 756 la Combinatul Poligrafic Casa Scînteii „I. V. STALIN", București — R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Pag.	Rîndul	În loc de	Se va citi	Din vina
71	19 sus	$= y_0 \dfrac{\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\cdots}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\cdots}$	$= y_0 \dfrac{\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\cdots}$	Tip.
89	2 sus	$\int_{-1}^{+1} 2F_k(x)\, F_k' = (x)\, dx$	$\int_{-1}^{+1} 2F_k(x)\, F_k'(x)\, dx$	„
94	6 sus	$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4}\Big[$	$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2}\Big[$	Editurii
269	10 sus	$\frac{(t-1)\cdot t\cdot(t-1)}{6}$	$\frac{(t-1)\cdot t\cdot(t+1)}{6}$	Editurii
275	15 jos	$= 0{,}00101\, t^6$.	$- 0{,}00101\, t^6$.	Tip.
306	13 jos	$- c_2 \varphi_0 - h\alpha_0^3$	$- c_2 \varphi_0 - h\varphi_0^3$	Editurii
349	tabela 67 coloana IV rd. 1 sus	0,00477	0,00747	Tip.
358	5 sus	$y_0 = y_0 + \Delta y_0$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	Editurii
368	tabela 75, coloana IX, rd. 1 jos	2,6177	2,6117	Editurii

Scanned with OKEN Scanner